Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(3), 226-234
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.103030

Hans汉斯

Similar Structure of Solution for a Class of Non-Homogeneous Boundary Value Problems of Hypergeometric Equation

Min Zhou[1*], Shunchu Li[1*], Xiaoxu Dong[1], Pengshe Zheng[1], Qinmin Gui[2]

[1]Institution for Applied Mathematics of Xihua University, Chengdu Sichuan
[2]Beijing Dongrunke Petroleum Technology Co., Ltd., Beijing
Email: *zhouminmath@163.com, *lishunchu@163.com

Received: Feb. 24th, 2020; accepted: Mar. 10th, 2020; published: Mar. 17th, 2020

Abstract

In this paper, the solution of a class of nonhomogeneous boundary value problems for hypergeometric equation is studied in detail. It is founded that the solution's similar structure formula can be obtained by constructing the derivation function, the left similar kernel function and the right similar kernel function; and then, a similar construction method for solving the similar structure formula is proposed. A solution of boundary value problem to a specific hypergeometric equation further explained that comparing with the traditional solution steps, it is more convenient and faster to solve boundary by using the similar construction method. Further, the similar structure formula of solution is expressed as the product of continued fraction, which not only shows the formal beauty of the solution, but also reflects the interrelation between the solution of the definite solution equation and the boundary condition coefficient.

Keywords

Hypergeometric Equation, Nonhomogeneous Boundary, Similar Kernel Function, Similar Structure Formula of Solution, Continued Fraction

超几何方程的一类非齐次边值问题解的相似结构

周　敏[1*]，李顺初[1*]，董晓旭[1]，郑鹏社[1]，桂钦民[2]

[1]西华大学应用数学研究所，四川　成都
[2]北京东润科石油技术股份有限公司，北京
Email: *zhouminmath@163.com, *lishunchu@163.com

*通讯作者。

文章引用: 周敏, 李顺初, 董晓旭, 郑鹏社, 桂钦民. 超几何方程的一类非齐次边值问题解的相似结构[J]. 理论数学, 2020, 10(3): 226-234. DOI: 10.12677/pm.2020.103030

收稿日期：2020年2月24日；录用日期：2020年3月10日；发布日期：2020年3月17日

摘　要

本文对超几何方程的一类非齐次边值问题的解做了深入分析，发现可以通过构造引解函数和左、右相似核函数，得到解的相似结构式，并提出求解相似结构式的相似构造法。对一个具体的超几何方程边值问题的求解进一步说明：相较于传统的求解步骤，运用相似构造法求解边值问题更加快速便捷；解的相似结构式表示为连分式乘积，不仅体现了解的形式美，更反映出定解方程的解与边界条件系数之间的相互联系。

关键词

超几何方程，非齐次边界，相似核函数，解的相似结构，连分式

1. 引言

微分方程的应用渗透于许多的工程问题，要解决工程中所遇到的问题免不了会涉及微分方程的求解，早在十七世纪Legendre、Euler就开始了对微分方程解的研究，并在十八世纪被Kummer、Hermite、Laguerre等人进一步丰富和加深[1] [2]，在随后的时间里研究工作者也纷纷投入到微分方程解的研究中。纵观微分方程解研究的发展历史，微分方程的求解常需要用到特殊函数，如：Bessel函数、Hermit函数、Legendre函数、Jacobi 函数等超几何函数，正是如此，针对超几何方程的求解问题的研究显得极为重要。近年，李顺初等人研究了二阶齐次常微分方程边值问题[3]-[8]，并对其解的相似结构做了深入分析，得到微分方程的解具有某种相似结构：可以表示为连分式的乘积形式且其结构形式只与某一边界条件有关，而其所谓的相似核函数与定解方程和另外的边界条件有关。

基于以上研究，本文探讨了双边非齐次的欧拉超几何的第三类边值问题解的问题，通过对其解结构特点的观察及分析，提出了超几何方程边值问题解的相似结构法，得到了边值问题解的相似结构式。解的相似结构式由两个相似核函数与边界系数构成，并且一个边界条件影响一个相似核函数。本文针对超几何方程边值问题解的研究为解决计算机仿真、电磁场分析等实际工程问题奠定了相应的理论基础；解的相似构造法极大地缩减了繁琐的求解过程和计算时间，为工程模型的求解提供了一种简捷、实用的新方法；解的相似结构也为编制相应的分析软件提供了极大便利。

2. 主要结论

本文研究如下超几何方程非齐次边值问题

$$\begin{cases} x(1-x)y''+\left[c-(a+b+1)\right]y'-aby=0 \\ (my+ny')_{x=\alpha}=Q \\ \left[ey+(1+ef)y'\right]_{x=\beta}=T \end{cases} \tag{1}$$

式中：$a,b,c,m,n,e,f,\alpha,\beta$ 均为实数，$\beta>\alpha>0$。得到了解的相似结构。

定理如果 $c\neq$ 整数，那么边值问题(1)有如下解的相似结构

$$y=T\cdot\frac{1}{e+\frac{1}{f+\Phi_1(\beta)}}\cdot\frac{1}{f+\Phi_1(\beta)}\cdot\Phi_1(x)+Q\cdot\frac{1}{m+\frac{n}{\Phi_2(\alpha)}}\cdot\frac{1}{\Phi_2(\alpha)}\Phi_2(x) \tag{2}$$

其中

$$\Phi_1(x)=\frac{m\varphi_{0,0}(\alpha,x)+n\varphi_{0,1}(\alpha,x)}{m\varphi_{1,0}(\alpha,\beta)+n\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)} \tag{3}$$

为左相似核函数；

$$\Phi_2(x)=\frac{e\varphi_{0,0}(x,\beta)+(1+ef)\varphi_{1,0}(x,\beta)}{e\varphi_{0,1}(\alpha,\beta)+(1+ef)\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)} \tag{4}$$

为右相似核函数；

$$\Phi_2(x)=\frac{e\varphi_{0,0}(x,\beta)+(1+ef)\varphi_{1,0}(x,\beta)}{e\varphi_{0,1}(\alpha,\beta)+(1+ef)\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)} \tag{5}$$

$$\varphi_{1,0}(x,y)=\frac{\partial\varphi_{0,0}(x,y)}{\partial x},\varphi_{0,1}(x,y)=\frac{\partial\varphi_{0,0}(x,y)}{\partial y},\varphi_{1,1}(x,y)=\frac{\partial\varphi_{1,0}(x,y)}{\partial y} \tag{6}$$

为引解函数；

$$F(a,b,c,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k}x^k\ (c\neq 0,-1,-2,\cdots) \tag{7}$$

为超比级数。

定理的证明：

当 $c\neq$ 整数时，边值问题(1)中的第一个方程具有如下通解

$$y=AF(a,b,c,x)+Bx^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x) \tag{8}$$

其中，$y_1=F(a,b,c,x),y_2=x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)$ 是边值问题(1)中的第一个定解方程的两个线性无关的解。下面求解通解的系数 A,B。

根据超几何函数的微分性质得[9]

$$y_1'=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,x) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}y_2'=&(1-c)x^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)\\&+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{2-c}x^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,x)\end{aligned} \tag{10}$$

进而得到 y'。

将 y,y' 带入(1)中的第二、三方程得关于 A,B 的二元方程组如下

$$
\begin{aligned}
&A\left[mF(a,b,c,\alpha)+n\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\alpha)\right]\\
&+B\left\{m\alpha^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)\right.\\
&+n\cdot\left[(1-c)\alpha^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)\right.\\
&\left.\left.+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{2-c}\alpha^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\alpha)\right]\right\}=Q
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&A\left[eF(a,b,c,\beta)+(1+ef)\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\beta)\right]\\
&+B\left\{\beta^{1-c}eF(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)\right.\\
&+(1+ef)\left[(1-c)\beta^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)\right.\\
&\left.\left.+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{2-c}\beta^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\beta)\right]\right\}=T
\end{aligned}
\tag{12}
$$

方程系数矩阵的行列式可转化为

$$
\begin{aligned}
d=&\begin{vmatrix} m\alpha^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha) & mF(a,b,c,\alpha)\\ e\beta^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta) & eF(a,b,c,\beta)\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix} n\left[(1-c)\alpha^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)+\frac{(a+1-c)}{2-c}\right. & \\ \left.\cdot(b+1-c)\cdot\alpha^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\alpha)\right] & n\frac{ab}{c}F(a,b,c,\alpha)\\ e\beta^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta) & eF(a,b,c,\beta)\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix} m\alpha^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha) & mF(a,b,c,\alpha)\\ (1+ef)\left[(1-c)\beta^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)+\frac{(a+1-c)}{2-c}\right. & \\ \left.\cdot(b+1-c)\beta^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\beta)\right] & (1+ef)\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\beta)\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix} n\left[(1-c)\alpha^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)+\frac{(a+1-c)}{2-c}\right. & \\ \left.\cdot(b+1-c)\alpha^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\alpha)\right] & n\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\alpha)\\ (1+ef)\left[(1-c)\beta^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)+\frac{(a+1-c)}{2-c}\right. & \\ \left.\cdot(b+1-c)\beta^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\beta)\right] & (1+ef)\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\beta)\end{vmatrix}\\
=&em\varphi_{0,0}(\alpha,\beta)+en\varphi_{0,1}(\alpha,\beta)+(1+ef)m\varphi_{1,0}(\alpha,\beta)+(1+ef)n\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

此外

$$d_1=T\left\{m\alpha^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)\right.$$
$$+n\cdot\left[(1-c)\alpha^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{2-c}\alpha^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\alpha)\right]\right\}$$
$$-Q\left\{\beta^{1-c}eF(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)\right.$$
$$+(1+ef)\left[(1-c)\beta^{-c}\cdot F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{2-c}\beta^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\beta)\right]\right\}$$

$$d_2=Q\left[eF(a,b,c,\beta)+(1+ef)\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\beta)\right]$$
$$-T\left[mF(a,b,c,\alpha)+n\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\alpha)\right]$$

应用克拉默法则[10]得 $A=\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{d}},B=\frac{\mathrm{d}_2}{\mathrm{d}}$，将 A,B 带入(8)式得

$$y=\frac{Tm}{d}\left\{\alpha^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)F(a,b,c,x)\right.$$
$$\left.-F(a,b,c,\alpha)x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)\right\}$$
$$+\frac{Tn}{d}\left\{F(a,b,c,x)\left[(1-c)\alpha^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\alpha)\right.\right.$$
$$\left.+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{2-c}\alpha^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\alpha)\right]$$
$$\left.-\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\alpha)x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)\right\}$$

$$+\frac{Qe}{d}\left\{F(a,b,c,\beta)x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)\right.$$
$$\left.-F(a,b,c,x)\beta^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)\right\}$$
$$+\frac{Q(1+ef)}{d}\left\{\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,\beta)x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)\right.$$
$$-\left[(1-c)\beta^{-c}\cdot F(a+1-c,b+1-c,2-c,\beta)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{2-c}\beta^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,\beta)\right]F(a,b,c,x)\right\}$$

$$
=\frac{Tm\varphi_{0,0}(\alpha,x)+Tn\varphi_{0,1}(\alpha,x)+Qe\varphi_{0,0}(x,\beta)+Q(1+ef)\varphi_{1,0}(x,\beta)}{em\varphi_{0,0}(\alpha,\beta)+en\varphi_{0,1}(\alpha,\beta)+(1+ef)m\varphi_{1,0}(\alpha,\beta)+(1+ef)n\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)}
$$

$$
\left(\Phi_1(x)\triangleq\frac{m\varphi_{0,0}(\alpha,x)+n\varphi_{0,1}(\alpha,x)}{m\varphi_{1,0}(\alpha,\beta)+m\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)},\Phi_2(x)\triangleq\frac{e\varphi_{0,0}(x,\beta)+(1+ef)\varphi_{1,0}(x,\beta)}{e\varphi_{0,1}(\alpha,\beta)+(1+ef)\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)}\right)
$$

$$
=T\cdot\frac{1}{e\Phi_1(\beta)+1+ef}\cdot\Phi_1(x)+Q\cdot\frac{1}{m\Phi_2(\alpha)+n}\cdot\Phi_2(x)
$$

$$
=T\cdot\frac{1}{e+\dfrac{1}{f+\Phi_1(\beta)}}\cdot\frac{1}{f+\Phi_1(\beta)}\cdot\Phi_1(x)+Q\cdot\frac{1}{m+\dfrac{n}{\Phi_2(\alpha)}}\cdot\frac{1}{\Phi_2(\alpha)}\Phi_2(x)
$$

证毕。

3. 相似构造法的提出

定理证明了超几何方程存在解的相似结构式，那么如何迅速得到相似结构式？本文作出了如下三点总结。

第一步：构造引解函数

根据所给方程类型以及方程系数限定，得到方程的两个线性无关的解 $F(a,b,c,x),x^{1-c}F(a+1-c.b+1-c,2-c,x)$，利用这两个线性无关解构造引解函数如下

$$
\varphi_{0,0}(x,y)=\begin{vmatrix} x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x) & F(a,b,c,x) \\ y^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,y) & F(a,b,c,y) \end{vmatrix}
$$

$$
\varphi_{0,1}(x,y)=\begin{vmatrix} \begin{matrix}(1-c)x^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)+\dfrac{(a+1-c)}{2-c}\\ \cdot(b+1-c)\cdot x^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,x)\end{matrix} & \dfrac{ab}{c}F(a,b,c,x) \\ y^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,y) & F(a,b,c,y) \end{vmatrix}
$$

$$
\varphi_{1,0}(x,y)=\begin{vmatrix} x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x) & F(a,b,c,x) \\ \begin{matrix}(1-c)y^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,y)+\dfrac{(a+1-c)}{2-c}\\ \cdot(b+1-c)y^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,y)\end{matrix} & \dfrac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,y) \end{vmatrix}
$$

$$
\varphi_{1,1}(x,y)=\begin{vmatrix} \begin{matrix}(1-c)x^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,x)+\dfrac{(a+1-c)}{2-c}\\ \cdot(b+1-c)x^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,x)\end{matrix} & \dfrac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,x) \\ \begin{matrix}(1-c)y^{-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c,y)+\dfrac{(a+1-c)}{2-c}\\ \cdot(b+1-c)y^{1-c}F(a+2-c,b+2-c,3-c,y)\end{matrix} & \dfrac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1,y) \end{vmatrix}
$$

第二步：构造左、右相似核函数

根据左边值条件中所涉及的系数 m,n、边界值 α 以及引解函数 $\varphi_{k,l}(x,y),k,l=0,1$ 构造左边界的相似核函数 $\Phi_1(x)$，将边界值 β 带入左边界的相似核函数，计算出 $\Phi_1(\beta)$；根据得右边值条件中涉及的系数 e,f、边界值 β 以及引解函数构造右边界的相似核函数 $\Phi_2(x)$ 将边界值 α 带入右边界的相似核函数，计算出 $\Phi_2(\alpha)$。

第三步：求得解的相似结构

对于超几何方程的非齐次边值问题(1)，结合左右边值条件中涉及的系数 m,n,e,f 以及所求得的左、右相似核函数，根据(2)式，得到边值问题解的相似结构。

4. 相似构造法的举例

求解如下超几何方程非齐次边值问题

$$\begin{cases} x(1-x)y''-2.25y'-y=0 \\ (2y+y')_{x=1}=5 \\ [4y+y']_{x=\beta}=10 \end{cases} \tag{13}$$

与边值问题(1)相比，本例中的 $a=1,b=1,c=0.75,m=2,n=1,e=4,f=0,\alpha=1,\beta=2,Q=5,T=10$，根据相似构造法的步骤，直接求出(13)式得解相似结构。

第一步：构造引解函数

根据方程 $x(1-x)y''-2.25y'-y=0$ 的两个线性无关解 $x^{0.25}F(1.25,1.25,1.75,x)$、$F(1,1,0.75,x)$ 得到非齐次边值问题(13)的引解函数

$$\varphi_{0,0}(x,y)=\begin{vmatrix} x^{0.25}F(1.25,1.25,1.75,y,x) & F(1,1,0.75,x) \\ y^{1-0.25}F(1.25,1.25,1.75,y) & F(1,1,0.75,y) \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{0,1}(x,y)=\begin{vmatrix} 0.25x^{-0.75}F(1.25,1.25,1.25,x)+1.25\cdot x^{0.25}F(2.25,2.25,2.25,x) & \frac{8}{3}F(1,1,0.75,x) \\ y^{0.25}F(1.25,1.25,1.25,y) & F(1,1,0.75,y) \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{1,0}(x,y)=\begin{vmatrix} x^{0.25}F(1.25,1.25,1.25,x) & F(1,1,0.75,x) \\ 0.25y^{-0.75}F(1.25,1.25,1.25,y)+1.25y^{0.25}F(2.25,2.25,2.25,y) & \frac{8}{3}F(2,2,1.75,y) \end{vmatrix}$$

$$\varphi_{1,1}(x,y)=\begin{vmatrix} 0.25x^{-0.75}F(1.25,1.25,1.25,x)+1.25x^{0.25}F(2.25,2.25,2.25,x) & \frac{8}{3}F(2,2,1.75,x) \\ 0.25y^{-0.75}F(1.25,1.25,1.25,y)+1.25y^{0.25}F(2.25,2.25,2.25,y) & \frac{8}{3}F(2,2,1.75,y) \end{vmatrix}$$

其中

$$F(1.25,1.25,1.25,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1.25)_k(1.25)_k}{k!(1.25)_k}x^k$$

$$F(1,1,0.75,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_k(1)_k}{k!(0.75)_k}x^k$$

$$F(2.25,2.25,2.25,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2.25)_k(2.25)_k}{k!(2.25)_k}x^k$$

$$F(2,2,1.75,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)_k(2)_k}{k!(1.75)_k}x^k$$

第二步：构造左、右相似核函数

根据(3)式，得到边值问题(13)的左相似核函数

$$\Phi_1(x)=\frac{2\varphi_{0,0}(1,x)+\varphi_{0,1}(1,x)}{2\varphi_{1,0}(1,2)+\varphi_{1,1}(1,2)}$$

进一步求得

$$\Phi_1(2)=\frac{2\varphi_{0,0}(1,2)+\varphi_{0,1}(1,2)}{2\varphi_{1,0}(1,2)+\varphi_{1,1}(1,2)}$$

同理，根据(4)式，得到边值问题(13)的右相似核函数

$$\Phi_2(x)=\frac{4\varphi_{0,0}(x,2)+\varphi_{1,0}(x,2)}{4\varphi_{0,1}(1,2)+\varphi_{1,1}(1,2)}$$

进一步求得

$$\Phi_2(1)=\frac{4\varphi_{0,0}(1,2)+\varphi_{1,0}(1,2)}{4\varphi_{0,1}(1,2)+\varphi_{1,1}(1,2)}$$

第三步：求得解的相似结构

根据(2)式并结合左、右相似核函数以及 $\Phi_1(2),\Phi_2(1)$，得到超几何方程非齐次边值问题(13)的解的相似结构如下

$$y=10\cdot\frac{1}{4+\frac{1}{\Phi_1(2)}}\cdot\frac{1}{\Phi_1(2)}\cdot\Phi_1(x)+5\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{\Phi_2(1)}}\cdot\frac{1}{\Phi_2(1)}\Phi_2(x)$$

5. 结论与认识

1) 通过构造引解函数 $\varphi_{0,0}(x,y)$，$\varphi_{1,0}(x,y)$、$\varphi_{0,1}(x,y)$ 以及 $\varphi_{1,1}(x,y)$，构造左、右相似核函数 $\Phi_1(x)$、$\Phi_2(x)$，得到方程的解式为一个简单优美的连分式乘积表达式，解的相似结构中的参数与边界条件中参数相对应，不同边界条件确定不同的相似核函数。

2) 若将相应结果应用于石油工程问题中，在编制分析软件时更能体现结果的优越性。

基金项目

四川省科技厅 2015 年第一批科技计划项目(基本科研-重点研发) (2015JY0245)；四川省教育厅重点项目(12ZA164)；四川省教育厅自然科学重点项目(15ZA0135)。

参考文献

[1] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[2] Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. (2000) Special Functions. Cambridge University Press, London.

[3] 黄荣军, 李顺初, 许东旭. 求解第一种 Weber 方程边值问题的相似构造法[J]. 绵阳师范学院学报, 2012, 31(11): 1-5.

[4] 唐乙斌, 李顺初, 严娟, 等. Tschebyscheff 方程边值问题解的相似结构[J]. 兵器装备工程学报, 2011, 32(1): 155-156.

[5] 王芙蓉, 李顺初, 许东旭. Airy 方程的一类边值问题的解的相似构造法[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版), 2013(1): 79-85.

[6] 李顺初. 从相似结构到相似构造法的微分方程边值问题求解方法综述[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2015, 34(2): 22-29.

[7] 王强, 李顺初, 蒲俊. 求解一类 Riccati-Bessel 方程边值问题的新方法[J]. 绵阳师范学院学报, 2015, 34(5): 1-7.

[8] 罗梅, 李顺初. 连带 Legendre 微分方程边值问题解的相似结构[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2015, 32(11): 34-37.

[9] 伊布拉基莫夫. 微分方程与数学物理问题[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 111-113.

[10] 陈成钢. 克拉默法则的一个简单证明及其推广[J]. 天津农学院学报, 2013(3): 42-44.