Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(3), 190-200
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.103026

Hans汉斯

Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Convex Constraints on Riemannian Manifolds

Yanjun Zeng

Department of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: 969742311@qq.com

Received: Feb. 22nd, 2020; accepted: Mar. 10th, 2020; published: Mar. 17th, 2020

Abstract

This paper mainly discusses the optimal control problem on the Riemannian manifold. The main considerations are the fixed initial state, the endpoint is free, and the control set is assumed to be convex in a Euclidian space. In this case, a second-order necessary condition is established by introducing an appropriate dual equation, which depends on the curvature tensor in the manifold. In this paper, first- and second-order necessary conditions for optimal control problems with convex constraints on Riemannian manifolds are given.

Keywords

Riemannian Manifold, Optimal Control Problem, Curvature Tensor, Exponential Mapping, Convex Variation

黎曼流形上具有凸约束最优控制问题的必要条件

曾妍郡

西南交通大学数学学院，四川 成都
Email: 969742311@qq.com

收稿日期：2020年2月22日；录用日期：2020年3月10日；发布日期：2020年3月17日

摘 要

本文讨论黎曼流形上的最优控制问题，主要考虑的是初始状态固定，终止状态无约束，控制具有凸约束

文章引用: 曾妍郡. 黎曼流形上具有凸约束最优控制问题的必要条件[J]. 理论数学, 2020, 10(3): 190-200.
DOI: 10.12677/pm.2020.103026

的情况。对于这种情况，通过引入适当的对偶方程，且它依赖于流形中的曲率张量，从而建立二阶必要条件。本文给出了黎曼流形上具有凸约束最优控制问题的一阶和二阶必要条件。

关键词

黎曼流形，最优控制问题，曲率张量，指数映射，凸变分

1. 引言

设 $n \in N, M$ 是一个具有黎曼度量 g 的完全单连通的黎曼流形。设 ∇ 是 M 上与 g 相关的 Levi-Civita 联络，$\rho(\cdot,\cdot)$ 是 M 上的距离函数，T_xM 是 M 在 $x \in M$ 处的切空间，T_x^*M 为该余切空间。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $|\cdot|$ 分别表示与 g 相关的内积和 T_xM 上的范数。另外，分别用 $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM, T_x^*M \equiv \bigcup_{x\in M} T_x^*M$ 和 $C^\infty(M)$ 表示流形上 M 的切丛，余切丛以及光滑函数集。

给定 $T > 0$，凸集 U，$y_0 \in M$ 以及两个函数：

$$f:[0,T]\times M\times U \to TM,\ f^0:[0,T]\times M\times U \to R$$

我们来考虑如下控制系统：

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f\left(t, y(t), u(t)\right) & t\in[0,T],\ y(t)\in M \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

这里 $y(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 分别表示状态变量和控制变量。与(0.1)相关的性能指标值：

$$J\left(u(\cdot)\right) = \int_0^T f^0\left(t, y(t), u(t)\right)\mathrm{d}t \tag{0.2}$$

其中(0.2)里的 $u(\cdot)$ 属于以下允许控制集合：

$$\Omega \equiv \left\{u(\cdot):[0,T]\to U; u(\cdot)\text{是可测的}\right\} \tag{0.3}$$

问题(P)

找到一个 $\bar{u}(\cdot)\in\Omega$，使得：

$$J\left(\bar{u}(\cdot)\right) = \inf_{u(\cdot)\in\mathfrak{A}} J\left(u(\cdot)\right) \tag{0.4}$$

成立。

对于以上问题(P)，我们称 $\bar{u}(\cdot)$ 为最优控制，$\bar{y}(\cdot)$ 是(0.1)中以 $\bar{u}(\cdot)$ 为控制的解，称为最优轨迹，$\left(\bar{u}(\cdot),\bar{y}(\cdot)\right)$ 为最优对。显然，该最优控制问题可以被视为状态被约束在欧氏空间的子流形上最优控制问题。控制问题的核心问题之一是找到最优控的必要和充分性条件，本文主要讨论其必要条件。

有许多工作讨论了状态变量取值于欧氏空间中的最优控制问题。例如文献([1] [2] [3])给出了一阶必要条件的例子，文献([1] [4] [5] [6] [7])给出了二阶必要条件的例子。正如微积分中的那样，即使对于某些状态约束的情况，也可以得出经典控制论[1]中所做的最优控制的一阶必要条件。然而，对于某些最优控制

问题，一阶必要条件不能体现最优控制的足够信息。在这种情况下，一阶必要条件不能为理论分析和数值计算提供足够的信息，因此需要研究二阶(或更高阶)必要条件条件。

对于一些状态被约束在流形上的控制系统，也有一些文献讨论关于最优控制问题的一阶和二阶必要条件。然而，与平坦空间的情况相比，我们认为弯曲空间中的还有一些最优条件是非常不完整的。将平坦空间中的相关结果推广到弯曲空间的假设将是非常有趣的(例如，在研究[8]和[9]中针对二阶最佳条件)。在参考文献[9]中，所提的控制问题的控制集为 $\mathbb{R}^m$ 中的一般集合，对控制作针状变分，而本文是一个凸集，因此做的是凸变分，[9]中的二阶必要条件是针对使得庞特里亚金形最大值原理退化的控制所满足的条件。本文所得到的二阶必要条件，是针对庞特里亚金型最大值原理在古典意义下退化的控制所满足的条件。参考文献[9]所考虑的控制集合是开集的情况。本文结果对文献[9]和文献[10]有重要补充。对不同控制给予不同的条件得到的结果的强弱也是不同的，每种方法各有优势。因此在弯曲空间中依然还有事情要做。

2. 准备

2.1. 指数映射

读者可以在参考文献([8] [9] [11] [12] [13] [14])看到更多的细节。

一个流形 M 上的可导曲线 $\gamma(t), t\in[0,\alpha)\ (\alpha>0)$ 如果满足

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)=0,\ t\in[0,\alpha) \tag{1.1}$$

则被称为测地线。

假设 $x\in M$ 是固定的。对任意的 $v\in T_xM$，这里存在唯一的测地线 $\gamma_v(\cdot)$ 满足 $\gamma_v(0)=x, \dot{\gamma}_v(0)=v$。设 $[0,L_v]$ 是定义在 $\gamma_v(\cdot)$ 上的最大间距。设 $O_x\subset T_xM$ 为向量 v 所在集合使得 $L_v>1$。则定义指数映射：

$$exp_x: O_x\to M,\ exp_v=\gamma_v(1)$$

很显然 O_x 是原点 $O\in T_xM$ 的一个邻域，exp_x 是将经过原点 O，T_xM 中的直线段映射到 M 中过 x 点的测地线上。对于任意的 $v\in T_xM$，定义 exp_x 在点 v 的导数，表示为：

$$dexp_x\big|_v: T_vT_xM\to T_{exp_x v}M \tag{1.2}$$

这里 T_vT_xM 表示流形 T_xM 在点 $v\in T_xM$ 处的切空间。

给定一个 $\varepsilon>0$，

$$\begin{aligned} B(0,\varepsilon) &\equiv \{v\in T_xM; |v|<\varepsilon\} \\ B_x(\varepsilon) &\equiv \{y\in M; \rho(x,y)<\varepsilon\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

我们称 $i(x)\equiv\sup\{\varepsilon>0,\text{映射}exp_x: B(O,\varepsilon)\to B_x(\varepsilon)\text{是微分同胚的}\}$ 为点 x 的单射半径。

2.2. 平行移动

对于一些细节的定义可以参考文献([8] [9] [13] [14])。

对于任意的 $x\in M$ 及 $r,s\in N$，所谓 M 在 x 处的一个 (r,s) 型张量 Γ 是指：$r+s$ 重线性映射：

$$F: \underbrace{T_x^*M\times\cdots\times T_x^*M}_{r}\times\underbrace{T_xM\times\cdots\times T_xM}_{s}\to R$$

其中 r 称为 Γ 的反变阶数，s 称为 Γ 的协变阶数。$\Gamma_s^r(x)$ 表示 M 在 x 点的所有 (r,s) 型张量构成的集合，

其中$\Gamma(x)\in\Gamma_s^r(x)$为该集合中的元素。$\Gamma$在$x\in M$点的范数的定义为：

$$\begin{aligned}&\left|\Gamma(x)\right|=\sup\left\{\Gamma(x)(Y_1,\cdots,Y_r,\lambda_1,\cdots,\lambda_s)\right\};\\&Y_j\in T_x^*M,\lambda_l\in T_xM,\left|Y_j\right|\le 1,\left|\lambda_l\right|\le 1,j=1,\cdots,r,l\in\{1,\cdots,s\}\end{aligned}\tag{1.4}$$

设$\gamma:[0,L_v)\to M$是一个可导曲线，有$\gamma(0)=x\in M,\gamma(L)=y$，且$L>0$。给定一个向量$v\in T_xM$，这里存在一个唯一沿着$\gamma$的向量场$X$，它满足：

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}X=0,\ \forall s\in[0,l_v],\ X(0)=v$$

映射$T_xM\ni v\mapsto X(\gamma(l))\in T_yM$是$T_xM$和$T_yM$之间的线性等距同构。我们称这个映射沿着$\gamma$的平行移动，表示为$L_{xy}^{\gamma}v$。

2.3. 主要引理

(该引力主要引用参考文献[9]，具体内容可参考([9], p.34)。

引理1 假设满足猜想(A1)-(A3)，对任何$\bar u(\cdot)$和$v(\cdot)$满足$\left\|v(\cdot)-\bar u(\cdot)\right\|_\infty<\infty$，设：

$$u^\varepsilon(\cdot)=\bar u(\cdot)+\varepsilon\left(v(\cdot)-\bar u(\cdot)\right),\quad \varepsilon>0$$

其中$y^\varepsilon(\cdot)$是(0.1)中与$u^\varepsilon(\cdot)$相关的解。特别的，$\bar y(\cdot)$是(0.1)中与$\bar u(\cdot)$相关的解。对于任意充分小的ε，我们可以定义一个沿着$\bar y(\cdot)$的向量场：

$$V^\varepsilon(t)=\exp_{\bar y(t)}^{-1}y^\varepsilon(t),\quad t\in[0,T]\tag{1.5}$$

设$V(\cdot)$和$Y(\cdot)$分别表示沿着$\bar y(\cdot)$的向量场分别满足以下方程组：

$$\begin{cases}\nabla_{\dot{\bar y}(t)}V(Z)=\nabla_x f[t](Z,V(t))+\nabla_u f[t](Z,v(t)-\bar u(t))\\V(0)=0\end{cases}\tag{1.6}$$

以及

$$\begin{cases}\nabla_{\dot{\bar y}}Y(Z))=\nabla_x f[t](Z(t),Y(t))+\nabla_x\nabla_u f[t](Z(t),v(t)-\bar u(t),V(t))\\\qquad-\dfrac{1}{2}R(\tilde Z(t),V(t),\bar y(t),V(t))+\dfrac{1}{2}\nabla_x^2 f[t](Z(t),V(t),V(t))\\\qquad+\dfrac{1}{2}\nabla_u^2 f[t](Z(t),v(t)-\bar u(t),v(t)-\bar u(t))\ \ a.e.\ t\in(0,T],\forall Z\in T^*M\\Y(0)=0\end{cases}\tag{1.7}$$

则我们有：

$$V^\varepsilon(t)=\varepsilon V(t)+\varepsilon^2Y(t)+o(\varepsilon^2)\quad\forall t\in(0,T]\tag{1.8}$$

3. 主要结论

对于问题(P)给出如下假设：

(A1)映射：$f:[0,T]\times M\times U\to TM$，$f^0:[0,T]\times M\times U\to R$关于$t$可测，关于$u$连续，且关于$x$是$C^1$的。除此之外存在一个常数$L>1$，使得对所有$s\in[0,T]$，$u\in U$以及$x_1,x_2\in M$有$\rho(x_1,x_2)<\min\{i(x_1),i(x_2)\},i(x)$为$x$点的单射半径。这里$x_0\in M$是一个固定点，使得以下等式成立：

$$\begin{aligned}&\left|f^0(s,x_1,u)-f^0(s,x_2,u)\right|\le L\rho(x_1,x_2)\\&\left|L_{x_1x_2}f(s,x_1,u)-f(s,x_2,u)\right|\le L\rho(x_1,x_2)\\&\left|f^0(s,x_0,u)\right|\le L\\&\left|f(s,x_0,u)\right|\le L\end{aligned}\tag{2.1}$$

(A2) 映射 $f(s,x,u)$ 和 $f^0(s,x,u)$ 在 x 是 C^2 的。进一步，对于所有的 $x_1,x_2\in M$ 有 $\rho(x_1,x_2)<\min\{i(x_1),i(x_2)\},i(x)$，有：

$$\begin{aligned}&\left|\nabla_x f^0(t,x_1,u)-L_{x_2x_1}\nabla_x f^0(t,x_2,u)\right|\le L\rho(x_1,x_2)\\&\left|\nabla_x f(t,x_1,u)-L_{x_2x_1}\nabla_x f(t,x_2,u)\right|\le L\rho(x_1,x_2)\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $\nabla_x f^0(t,x,u)$，$\nabla_x f(t,x,u)$ 分别为 $f^0(t,x,u)$，$f(t,x,u)$ 关于状态变量的协变导数。

(A3) $U\subset R^m$，是凸集。映射 $f(t,x,u)$ 和 $f^0(t,x,u)$ 在 x 是 C^2 的。进一步，对所有的，$u_1,u_2\in U,(t,x)\in[0,T]\times M$。这里 $\nabla_u f^0(t,x,\cdot)$，$\nabla_u f(t,x,\cdot)$ 分别为 $f^0(t,x,u)$，$f(t,x,u)$ 关于控制变量的导数，有：

$$\begin{aligned}&\left|f^0(t,x,u_1)-f^0(t,x,u_2)\right|\le L|u_1-u_2|\\&\left|f(t,x,u_1)-f(t,x,u_2)\right|\le L|u_1-u_2|\\&\left|\nabla_u f^0(t,x,u_1)-\nabla_u f^0(t,x,u_2)\right|\le L|u_1-u_2|\\&\left|\nabla_u f(t,x,u_1)-\nabla_u f(t,x,u_2)\right|\le L|u_1-u_2|\\&\left|\nabla_x f^0(t,x,u_1)-\nabla_x f^0(t,x,u_2)\right|\le L|u_1-u_2|\\&\left|\nabla_x f(t,x,u_1)-\nabla_x f(t,x,u_2)\right|\le L|u_1-u_2|\end{aligned}\tag{2.3}$$

本文对于 $X\in TM$ （或者 $X\in T^*M$），我们用 $\tilde{X}$ 表示 X 的对偶切向量，Hamiltonian 函数：$H:[0,T]\times T^*M\times U\to R$，定义为：

$$H(t,x,\psi,u)\equiv\psi\left(f(t,x,u)\right)-f^0(t,x,u)$$

对任意的 $(t,x,\psi,u)\in[0,T]\times T^*M\times U$。

我们固定一个控制 $\bar{u}(\cdot)\in\Omega$，其中 Ω 是在引言中的公式(0.3)给定。设是 $\bar{y}(\cdot)$ 是(0.1)中与 $\bar{u}(\cdot)$ 相关的解。为了简洁，我们表示：

$$[t]=\left(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)\right)\tag{2.4}$$

其中对任意的 $t\in[0,T]$。

假设 $\psi(t)\in T^*_{\bar{y}(t)}M\ \left(t\in[0,T]\right)$ 是以下一阶对偶方程的解：

$$\begin{cases}\nabla_{\dot{\bar{y}}}\psi(t)=-\nabla_x f[t]\left(\psi(t),\cdot\right)+d_x f^0[t],\quad a.e.\ t\in[0,T]\\ \psi(T)=0\end{cases}\tag{2.5}$$

其中 $d_x f^0$ 表示 f^0 关于状态变量 x 的导数，$\nabla_x f[t]\left(\psi(t),\cdot\right)$ 是一个张量，定义为：

$$\nabla_x f[t]\left(\psi(t),X\left(\bar{y}(t)\right)\right)\equiv\nabla_{X(\bar{y}(t))}f\left(t,\cdot,\bar{u}(\cdot)\right)\psi(t)$$

其中 $\forall\ X\in TM$。

3.1. 一阶必要条件

定理一 假设(A1)~(A3)成立，$U \subset R^m$ 是凸集，$(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 为问题(P)的最优对，则：

$$\nabla_u H(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t))(v(t)-\bar{u}(t)) \le 0 \tag{2.6}$$

在 $[0,T]$ 上处处成立，其中 $\psi(\cdot)$ 是(2.5)的解，$\nabla_u H$ 表示 H 关于 u 求偏导。

3.2. 二阶必要条件

定理二 假设(A1)~(A3)成立，$U \subset R^m$ 是凸集，$(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 为问题(P)的最优对，则使得(2.6)式成立的 $v(\cdot)$，下列不等式成立：

$$\begin{aligned} 0 \ge \int_0^T \Big[& \nabla_x^2 H(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t))(V(t),V(t)) \\ & + 2\nabla_x \nabla_u H(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t))(v(t)-\bar{u}(t),V(t)) \\ & + \nabla_u^2 H(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t))(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)) \\ & - R(\hat{\psi}(t),V(t),\bar{y}(t),V(t)) \Big]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中，$V(\cdot)$ 满足(1.6)。

4. 主要结论证明

4.1. 定理一的证明

任取 $v(\cdot) \in L^\infty(0,T;R^m) \cap \Omega$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，定义：

$$u^\varepsilon(\cdot) \equiv \bar{u}(\cdot) + \varepsilon(v(\cdot)-\bar{u}(\cdot)) \in \Omega$$

以及记 $u^\varepsilon(\cdot)$ 为控制(0.1)的解为 $y^\varepsilon(\cdot)$，由引理 1，当 $\varepsilon > 0$ 充分小，可定义：

$$V^\varepsilon(t) = \exp_{\bar{y}(t)}^{-1} y^\varepsilon(t), \forall\, t \in [0,T]$$

现单位化 $V^\varepsilon(\cdot)$：

$$\hat{V}^\varepsilon(\cdot) = \begin{cases} \dfrac{V^\varepsilon(t)}{\rho(\bar{y}(t),y^\varepsilon(t))}, & |V^\varepsilon(t)| \ne 0 \\ 0 & |V^\varepsilon(t)| = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\beta(\theta;t) = \exp_{\bar{y}(t)} \theta V^\varepsilon(t), \quad \theta \in [0,\rho(\bar{y}(t),y^\varepsilon(t))] \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} \beta(\theta;t) = dexp_{\bar{y}(t)}\big|_O \hat{V}^\varepsilon(t) = \hat{V}^\varepsilon(t) \tag{3.3}$$

由 $\bar{u}(\cdot)$ 的最优性有：

$$\begin{aligned} 0 &\le J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(\bar{u}(\cdot)) \\ &= \int_0^T \left[f^0(t,y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(\cdot)) - f^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)) \right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \Big[f^0(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)) - f^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)) \\ &\quad + f^0(t,y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(\cdot)) - f^0(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)) \Big]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

令：

$$I_1 = \int_0^T \left[f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t)\right) - f^0\left(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)\right) \right] \mathrm{d}t$$
$$I_2 = \int_0^T \left[f^0\left(t, y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(\cdot)\right) - f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t)\right) \right] \mathrm{d}t$$

则有：

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \left[f^0\left(t, \beta(\theta;t), \bar{u}(t)\right) - f^0\left(t, \beta(0;t), \bar{u}(t)\right) \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0} f^0\left(t, \beta(\theta;t), \bar{u}(t)\right) \rho\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\bigg|_{\theta=0} f^0\left(t, \beta(\theta;t), \bar{u}(t)\right) \rho^2\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right) + o\left(\rho^2\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right)\right) \right\} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \left\{ \nabla_x f^0\left(t, \beta(0;t), \bar{u}(t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0} \beta(\theta;t) \right) \rho\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla_x^2 f^0\left(t, \beta(0;t), \bar{u}(t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0} \beta(\theta;t), \frac{\partial}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0} \beta(\theta;t) \right) \rho^2\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right) \\
&\quad \left. + o\left(\rho^2\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right)\right) \right\} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \left\{ \nabla_x f^0[t]\left(\hat{V}^\varepsilon(t)\right) \rho\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\nabla_x^2 f^0[t]\left(\hat{V}^\varepsilon(t), \hat{V}^\varepsilon(t)\right) \rho^2\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right) + o\left(\rho^2\left(\bar{y}(t), y^\varepsilon(t)\right)\right) \right\} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

则：

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial\theta} f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t) + \theta\left(v(t) - \bar{u}(t)\right)\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_0^\varepsilon \nabla_u f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t) + \theta\left(v(t) - \bar{u}(t)\right)\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t \\
&= \varepsilon \int_0^T \nabla_u f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t)\right)\left(v(t) - \bar{u}(t)\right) \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T \int_0^\varepsilon \left[\nabla_u f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t) + \theta\left(v(t) - \bar{u}(t)\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_u f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t)\right) \right] \left(v(t) - \bar{u}(t)\right) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t \\
&= \varepsilon \int_0^T \nabla_u f^0\left(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)\right)\left(v(t) - \bar{u}(t)\right) \mathrm{d}t \\
&\quad + \varepsilon \int_0^T \left[\nabla_u f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t)\right) - \nabla_u f^0\left(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)\right) \right] \left(v(t) - \bar{u}(t)\right) \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^T \int_0^\varepsilon \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial\tau} \nabla_u f^0\left(t, y^\varepsilon(t), \bar{u}(t) + \tau\left(v(t) - \bar{u}(t)\right)\right) \left(v(t) - \bar{u}(t)\right) \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

记：

$$I_2 = \varepsilon \int_0^T \nabla_u f^0\left(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)\right)\left(v(t) - \bar{u}(t)\right) \mathrm{d}t + I_3 + I_4$$

其中，

$$I_3=\varepsilon\int_0^T\left[\nabla_u f^0\left(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)\right)-\nabla_u f^0\left(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)\right)\right]\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$I_4=\int_0^T\int_0^\varepsilon\int_0^\theta\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla_u f^0\left(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)+\tau\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\right)\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t$$

则：

$$\begin{aligned}I_4&=\int_0^T\int_0^\varepsilon\int_0^\theta\nabla_u^2 f^0\left(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)+\tau\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\right)\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\\&=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)(\varepsilon-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^T\int_0^\varepsilon\nabla_u^2 f^0\left(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)\right)\\&\quad-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由积分中值定理：

$$\begin{aligned}&=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\Big[\nabla_u^2 f^0\left(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)+\tau_{\varepsilon,t}\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\right)\\&\quad+\nabla_u^2 f^0\left(t,y^\varepsilon(t),\bar{u}(t)\right)\Big]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

再由 Lebesgue 控制收敛定理：

$$=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T\nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t+o\left(\varepsilon^2\right)$$

对于 I_3，记：

$$\hat{\beta}(\theta;t)=exp_{\bar{y}(t)}\theta V^\varepsilon(t)$$

其中：$\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\beta}(\theta;t)=L_{\hat{\beta}(0)\hat{\beta}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_O\hat{\beta}(\theta;t)=L_{\bar{y}(t)\hat{\beta}(\theta)}V^\varepsilon(t)$。

则：

$$\begin{aligned}I_3&=\varepsilon\int_0^T\int_0^1\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla_u f^0\left(t,\hat{\beta}(\theta;t),\bar{u}(t)\right)\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\\&=\varepsilon\int_0^T\int_0^T\nabla_x\nabla_u f^0\left(t,\hat{\beta}(\theta;t),\bar{u}(t)\right)\left(v(t)-\bar{u}(t),L_{\bar{y}(t)\hat{\beta}(\theta;t)}V^\varepsilon(t)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\\&=\varepsilon\int_0^T\int_0^T L_{\hat{\beta}(\theta;t)\bar{y}(t)}\nabla_x\nabla_u f^0\left(t,\hat{\beta}(\theta;t),\bar{u}(t)\right)\left(v(t)-\bar{u}(t),V^\varepsilon(t)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理且将(1.8)带入上式得：

$$\begin{aligned}&=\varepsilon\int_0^T\nabla_x\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),V^\varepsilon(t)\right)\\&\quad+\varepsilon\int_0^T\int_0^1\left[L_{\hat{\beta}(\theta;t)\bar{y}(t)}\nabla_x\nabla_u f^0\left(t,\hat{\beta}(\theta;t)\bar{u}(t)\right)-\nabla_x\nabla_u f^0[t]\right]\left(v(t)-\bar{u}(t),V^\varepsilon(t)\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\\&=\varepsilon^2\int_0^T\nabla_x\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right)+o\left(\varepsilon^2\right)\end{aligned}$$

综上：

$$
\begin{aligned}
0 &\le J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(\bar{u}(\cdot)\right)\\
&=\varepsilon\int_0^T \nabla_x f^0[t]V(t)\mathrm{d}t\\
&\quad+\varepsilon^2\int_0^T\left[\nabla_x f^0[t]\left(Y(t)\right)+\frac{1}{2}\nabla_x^2 f^0[t]\left(V(t),V(t)\right)\right]\mathrm{d}t+o\left(\varepsilon^2\right)\\
&\quad+\varepsilon\int_0^T \nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\varepsilon^2\int_0^T \nabla_x\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T \nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t+o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}
$$

进一步有：

$$
0\le\frac{J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(\bar{u}(\cdot)\right)}{\varepsilon}
$$

当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，

$$
0\le\int_0^T\left[\nabla_x f^0[t]\left(V(t)\right)+\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\right]\mathrm{d}t
$$

将对偶方程(2.5)带入得到：

$$
0\le\int_0^T\left(\nabla_{\dot{y}(t)}\psi(t)+\nabla_x f[t]\left(\psi(t),V(t)\right)\right)\mathrm{d}t+\int_0^T \nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\ge 0
$$

再由(1.6)得：

$$
\begin{aligned}
0&\le\int_0^T\left(\nabla_{\dot{y}(t)}\psi(t)+\nabla_{\dot{y}(t)}V\left(\psi(t)\right)\right)\mathrm{d}t-\int_0^T\nabla_u f[t]\left(\psi(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^T\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\nabla_{\dot{y}(t)}\psi(t)\mathrm{d}t+\left\langle V(T),\psi(T)\right\rangle-\left\langle V(0),\psi(0)\right\rangle\\
&\quad-\int_0^T\nabla_{\dot{y}(t)}\psi(t)\mathrm{d}t-\int_0^T\nabla_u f[t]\left(\psi(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^T\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\left[-\nabla_u f[t]\left(\psi(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)+\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\right]\\
&=\int_0^T-\nabla_u H\left(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t)\right)\left(v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由参考文献([1], p.105)中的方法将以上积分型极大值原理变为(2.6)，证毕。

4.2. 定理二的证明

若 $v(\cdot)\in\Omega$ 满足(2.6)有：

$$
\begin{aligned}
0&\le\frac{J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(\bar{u}(\cdot)\right)}{\varepsilon^2}\\
&=\int_0^T\left[\nabla_x f^0[t]\left(Y(t)\right)+\frac{1}{2}\nabla_x^2 f^0[t]\left(V(t),V(t)\right)\right]\\
&\quad+\int_0^T\nabla_x\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^T\nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{o\left(\varepsilon^2\right)}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

当$\varepsilon \to 0^+$时，

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{J\left(u^{\varepsilon}(\cdot)\right)-J\left(\bar{u}(\cdot)\right)}{\varepsilon^2} \\ &= \int_0^T \left[\nabla_x f^0[t]\left(Y(t)\right)+\frac{1}{2}\nabla_x^2 f^0[t]\left(V(t),V(t)\right)\right] \\ &\quad + \int_0^T \nabla_x \nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

将对偶方程(2.5)带入得到：

$$\begin{aligned} 0 \le \int_0^T &\Big[\nabla_{\dot{y}(t)}\psi(t)+\nabla_x f[t]\left(\psi(t),Y(t)\right)+\frac{1}{2}\nabla_x^2 f^0[t]\left(V(t),V(t)\right) \\ &+\frac{1}{2}\nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)+\nabla_x\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right)\Big]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

再将(1.7)带入其中，利用与证明定理一相同的方法得到：

$$\begin{aligned} 0 \le \int_0^T &\Big[\nabla_{\dot{y}(t)}\psi(t)+\nabla_{\dot{y}(t)}Y\left(\psi(t)\right)-\nabla_x\nabla_u f[t]\left(\psi(t),v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right) \\ &+\frac{1}{2}R\left(\tilde{\psi}(t),V(t),\dot{y}(t),V(t)\right)-\frac{1}{2}\nabla_x^2 f[t]\left(\psi(t),V(t),V(t)\right) \\ &-\frac{1}{2}\nabla_u^2 f[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)+\frac{1}{2}\nabla_x^2 f^0[t]\left(V(t),V(t)\right) \\ &+\frac{1}{2}\nabla_u^2 f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),v(t)-\bar{u}(t)\right)+\nabla_x\nabla_u f^0[t]\left(v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right)\Big]\mathrm{d}t \\ =\frac{1}{2}\int_0^T &-\Big[\nabla_x^2 H\left(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t)\right)\left(V(t),V(t)\right) \\ &+2\nabla_x\nabla_u H\left(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t)\right)\left(v(t)-\bar{u}(t),V(t)\right) \\ &+\nabla_u^2 H\left(t,\bar{y}(t),\psi(t),\bar{u}(t)\right)-R\left(\tilde{\psi}(t),V(t),\dot{y}(t),V(t)\right)\Big]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

证毕。

参考文献

[1] 雍炯敏，楼红卫．最优控制理论简明教程[M]．北京：高等教育出版社, 2006.

[2] Bell, D.J. and Jacobson, D.H. (1975) Singular Optimal Control Problems. Academic Press, London, New York.

[3] Clements, D.J. and Piccoli, B. (1978) Optimal Syntheses for Control Problem: The Linear-Quadratic Problems. Springer-Verlag, Berlin, New York.

[4] Bonnans, J.F. and Hermant, A. (2009) No-Gap Second-Order Optimality Conditions for. Optimal Control Problems with a Single State Constraint and Control. *Mathematical Programming Series B*, **117**, 21-50. https://doi.org/10.1007/s10107-007-0167-8

[5] Knobloch, H.-W. (1981) Higher Order Necessary Conditions in Optimal Control Theory. Springer-Verlag, Berlin, New York. https://doi.org/10.1007/BFb0007271

[6] Lou, H. (2010) Second-Order Necessary/Sufficient Conditions for Optimal Control. Problems in the Absence of Linear Structure. *Discrete & Continuous Dynamical Systems Series B*, **14**, 1445-1464. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2010.14.1445

[7] Osmolovskii, N.P. and Maurer, H. (2012) Applications to Regular and Bang-Bang Control. Second-Order Necessary and Sufficient Optimality Conditions in Calculus of Variations and Optimal Control. SIAM, Philadelphia, PA.

https://doi.org/10.1137/1.9781611972368

[8] Cui, Q., Deng, L. and Zhang, X. (2016) Pointwise Second Order Necessary Conditions for Optimal Control Problems Evolved on Riemannian Manifolds. *Comptes Rendus Mathematique*, **354**, 191-194. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.014

[9] Cui, Q., Deng, L. and Zhang, X. (2018) Second Order Optimality Conditions for Optimal Control Problems on Riemannian Manifolds. https://www.esaim-cocv.org/articles/cocv/abs/2019/01/cocv170091/cocv170091.html

[10] Agrachev, A.A. and Sachkov, Y.L. (2004) Control Theory from the Geometric View Point. Vol. 87 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-662-06404-7

[11] 彼得森(Petersen, P). 黎曼几何[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2007.

[12] 陈维桓, 李兴校, 黎曼几何引论(上册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.

[13] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[14] Deng, L. (2016) Dynamic Programming Method for Control Systems on Manifolds and Its Relations to Maximum Principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **434**, 915-938. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.014