Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(3), 162-166
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.103023

Hans汉斯

Solution on Differential-Difference Equation of Fermat-Type

Bingmao Deng

School of Financial Mathematics and Statics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: dbmao2012@163.com

Received: Feb. 17th, 2020; accepted: Mar. 4th, 2020; published: Mar. 13th, 2020

Abstract

In this paper, we mainly discussed entire solutions with finite order of the following Fermat type differential-difference equation $\left[f'(z)\right]^2+\left[\Delta_c^k f(z)-f(z)\right]^2=1$ and obtained some interesting results.

Keywords

Fermat-Type Equation, Entire Function, Differential-Difference Equation

一类费马型微分–差分方程解的问题

邓炳茂

广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州
Email: dbmao2012@163.com

收稿日期：2020年2月17日；录用日期：2020年3月4日；发布日期：2020年3月13日

摘 要

本文主要研究了以下费马型微分–差分方程的有穷级整函数解的情形，$\left[f'(z)\right]^2+\left[\Delta_c^k f(z)-f(z)\right]^2=1$ 并获得了一些有趣的结论。

关键词

费马型方程，整函数，微分–差分方程

文章引用: 邓炳茂. 一类费马型微分–差分方程解的问题[J]. 理论数学, 2020, 10(3): 162-166.
DOI: 10.12677/pm.2020.103023

1. 引言及主要结果

假设读者熟悉亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的基本内容及相关标准符号(见参考文献[1] [2] [3])。例如，$\rho(f)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r}$ 表示函数 $f(z)$ 的增长级，$S(f)$ 表示所有 $f(z)$ 的小函数所构成的集合。

另外，$f(z+c)$ 表示函数 $f(z)$ 的平移，$\Delta_c f(z)=f(z+c)-f(z)$，$\Delta_c^n f(z)=\Delta_c\left(\Delta_c^{n-1}f(z)\right)$ 分别表示其一阶差分及 n 阶差分。

在早期，对于费马型函数方程 $f^n(z)+g^n(z)=1$ 解的讨论，已有许多经典结果[4] [5] [6]。

在 2004 年，Yang and Li [6]考虑了以下费马型微分方程解的情形，他们证明了

定理 1. 设 k 是一个正整数，$b_0,b_1,\cdots,b_{k-1},b_k\neq 0$ 是常数，$L(f)=\sum_{j=0}^{k}b_j f^{(j)}$。则费马型方程 $\left[f(z)\right]^2+\left[L(f)\right]^2=1$ 的超越亚纯解必具有以下的形式，

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(Pe^{az}+\frac{1}{P}e^{-az}\right),$$

其中 P,a 是非零常数，并且满足

$$\sum_{j=0}^{k}b_j a^j=\frac{1}{i},\quad \sum_{j=0}^{k}b_j(-a)^j=-\frac{1}{i}.$$

近年来，许多学者研究了差分方程、微分－差分方程解的存在性及增长性问题[1] [7]-[12]。

2012 年，Liu 等人[11]研究了以下费马型差分－微分方程，并获得了以下结论。

$$\left[f'(z)\right]^2+\left[f(z+c)-f(z)\right]^2=1. \tag{1.1}$$

定理 2. 方程(1.1)式的超越有穷级整函数解必定具有以下形式

$$f(z)=\sin(2z+Bi)/2,$$

其中，$c=(\pi+2n\pi)/2$，n 是一个正整数，B 是一个常数。

还有许多相关的结果，请参见文献[13] [14] [15]。

本文的主要目的是研究方程(1.1)中的平移为高阶差分的解的形式问题，即研究

$$\left[f'(z)\right]^2+\left[\Delta_c^k f(z)-f(z)\right]^2=1. \tag{1.2}$$

本人主要证明了以下结论。

定理 3. 设 $f(z)$ 是微分－差分方程(1.2)的有穷级整函数解，则 $f(z)$ 必定具有以下形式之一：

$f(z)\equiv\pm1$，或者

$f(z)=\dfrac{e^{az+b}-e^{-aiz-b}}{2a}+d=\dfrac{1}{ai}\sin(aiz+bi)+d$，其中 a,b,d 是常数，并且满足 $e^{kac}=(-1)^k$，

$$\left(e^{ac}-1\right)^k\neq 1,\quad a=i\left(e^{ac}-1\right)^k-i.$$

由定理 3，可得以下推论。

推论 1. 当(1.2)式中的 $k=1$ 时，(1.2)式的解必具有以下形式：

$f(z)\equiv\pm1$，或者

$f(z)=\dfrac{1}{3}\sin(3z+bi)+d$，其中 b,d 是常数， $c=(\pi+n\pi)/3$。

2. 一些引理

引理 1 ([3])设 $f_i(z)(1\le i\le n)(n\ge2)$ 是亚纯函数， $g_i(z)(1\le i\le n)(n\ge2)$ 是整函数，并且满足：

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\mathrm{e}^{g_i(z)}\equiv0;$$

对任意的 $1\le i\le n$， $1\le k<l\le n$ 时，均有

$$T(r,f_j)=S(r,\mathrm{e}^{g_h-g_l}),\ r\to\infty,\ r\notin E,$$

其中 $E\subset(1,\infty)$ 是对数测度有穷的集合。

则 $f_i(z)\equiv0(1\le i\le n)$。

引理 2 ([3]) (Hadamard 分解定理)设 $f(z)$ 是有穷级整函数，$\{z_1,z_2,\cdots\}\subset C\setminus\{0\}$ 是其零点，并且 0 是其 k 重零点，则

$$f(z)=z^kP(z)\mathrm{e}^{Q(z)},$$

其中 $P(z)$ 是由 $f(z)$ 除零之外的所有零点构成的典型乘积， $Q(z)$ 是一个满足 $\deg Q\le\rho(f)$ 的多项式。

3. 定理 3 的证明

设 $f(z)$ 是方程(1.2)的有穷级整函数解，将(1.3)改写成下式

$$\left[f'(z)+i\left(\Delta_c^k f(z)-f(z)\right)\right]\left[f'(z)-i\left(\Delta_c^k f(z)-f(z)\right)\right]=1。\tag{3.1}$$

从(3.1)式可知，$f'(z)+i\left(\Delta_c^k f(z)-f(z)\right)$ 与 $f'(z)-i\left(\Delta_c^k f(z)-f(z)\right)$ 均没有零点，由引理 3，Hadamard 分解定理可得：

$$\begin{cases} f'(z)+i\left(\Delta_c^k f(z)-f(z)\right)=\mathrm{e}^{p(z)}; \\ f'(z)-i\left(\Delta_c^k f(z)-f(z)\right)=\mathrm{e}^{-p(z)}, \end{cases}\tag{3.2}$$

其中 $p(z)$ 是一个多项式。

解(3.2)式，可得

$$f'(z)=\frac{\mathrm{e}^{p(z)}+\mathrm{e}^{-p(z)}}{2},\tag{3.3}$$

$$\Delta_c^k f(z)-f(z)=\frac{\mathrm{e}^{p(z)}-\mathrm{e}^{-p(z)}}{2i}.\tag{3.4}$$

以下分两种情形讨论。

情形 1. $f(z)$ 是超越整函数。则由(3.3)式知， $p(z)$ 是非常数多项式。令 $\deg p=m$， 则 $m\ge1$。

对(3.4)式两边同时求一阶导，可得

$$\left[\Delta_c^k f(z)-f(z)\right]'=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j f'(z+jc)-f'(z)=\frac{p'(z)}{2i}\left[\mathrm{e}^{p(z)}+\mathrm{e}^{-p(z)}\right].\tag{3.5}$$

另一方面，由(3.3)式，可得

$$f'(z+jc)=\frac{1}{2}\left[e^{p(z+jc)}+e^{-p(z+jc)}\right]. \tag{3.6}$$

结合(3.5)与(3.6)式，经简单计算可得

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\left[e^{p(z+jc)}+e^{-p(z+jc)}\right]-\left[e^{p(z)}+e^{-p(z)}\right]=-ip'(z)\left[e^{p(z)}+e^{-p(z)}\right]. \tag{3.7}$$

合并同类项，即得

$$\left[ip'(z)-1+(-1)^k\right]\left[e^{p(z)}+e^{-p(z)}\right]+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\left[e^{p(z+jc)}+e^{-p(z+jc)}\right]=0. \tag{3.8}$$

若 $m\geq 2$，则对任意的 $0\leq j<l\leq k$，均有

$$\rho\left(e^{p(z+jc)-p(z+lc)}\right)=m-1\geq 1,\ 且\ \rho\left(e^{p(z+jc)+p(z+lc)}\right)=m\geq 2.$$

由(3.8)式，结合引理 2，可得 $(-1)^{k-k}C_k^k=0$，矛盾。

因此，$m=1$。因此，可设 $p(z)=az+b$，其中 $a\neq 0$。则 $p(z+jc)=az+b+ajc=p(z)+ajc$，$p(z)-p(z+jc)=-ajc$，与 $p(z)+p(z+jc)=2p(z)+ajc$。

(3.8)式两边同时乘以 $e^{p(z)}$，并化简，可得

$$\left[ia-1+(-1)^k\right]\left[e^{2p(z)}+1\right]+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\left[e^{p(z)+p(z+jc)}+e^{p(z)-p(z+jc)}\right]=0.$$

即

$$\left[ia-1+(-1)^k\right]\left[e^{2p(z)}+1\right]+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\left[e^{2p(z)+ajc}+e^{-ajc}\right]=0. \tag{3.9}$$

由(3.9)式可得

$$e^{2p(z)}\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{ajc}+ia-1\right]+\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{-ajc}+ia-1\right]=0. \tag{3.10}$$

注意到 $\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{ajc}=\left(e^{ac}-1\right)^k$，$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{-ajc}=\left(e^{-ac}-1\right)^k$。由(3.10)，可得

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{ajc}+ia-1=0;\\ \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{-ajc}+ia-1=0.\end{cases}$$

否则，由(3.10)式，有

$$e^{2p(z)}=-\frac{\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{-ajc}+ia-1}{\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^je^{ajc}+ia-1},$$

即得 $e^{2p(z)}$ 是一个常数，这与 $\deg p=m=1$ 矛盾。

从而

$$\begin{cases}\left(e^{ac}-1\right)^k+ia-1=0;\\ \left(e^{-ac}-1\right)^k+ia-1=0.\end{cases} \tag{3.11}$$

解(3.11)式，易得$\left(e^{ac}\right)^k=(-1)^k$，且$\left(e^{ac}-1\right)^k\neq 1$，$a=i\left(e^{ac}-1\right)^k-i$。因此，$f(z)$具有以下形式

$$f(z)=\frac{e^{az+b}-e^{-az-b}}{2a}+d=\frac{1}{ai}\sin[aiz+bi]+d.$$

情形 2. $f(z)$是多项式。则由(3.3)式可得$p(z)$是一个常数，因此，$f'(z)$恒为常函数，从而$f(z)=az+b$。如果$k\geq 2$，则显然$\Delta_c^k f(z)\equiv 0$，代入(1.2)式，可得$a^2+(az+b)^2=1$，解得$a=0$，$b=\pm 1$。如果$k=1$，则$\Delta_c^k f(z)\equiv ac$，代入(1.2)式，可得$a^2+(ac-az-b)^2=1$，同样解得$a=0$，$b=\pm 1$。因此，$f(z)\equiv\pm 1$。

定理 3 证明完毕。

基金项目

国家自然科学基金青年资助项目(11901119)。

参考文献

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[3] Yi, H.X. and Yang, C.C. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing.

[4] Gross, F. (1966) On the Equation $f^n + g^n = 1$. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **72**, 86-88. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11429-5

[5] Gross, F. (1966) On the Equation $f^n + g^n = h^n$. *The American Mathematical Monthly*, **73**, 1093-1096. https://doi.org/10.2307/2314644

[6] Yang, C.C. and Li, P. (2004) On the Transcendental Solutions of a Certain Type of Nonlinear Differential Equations. *Archiv der Mathematik*, **82**, 442-448. https://doi.org/10.1007/s00013-003-4796-8

[7] Chen, M.F., Gao, Z.S. and Du, Y.F. (2017) Existence of Entire Solutions of Some Non-Linear Differential-Difference Equations. *Journal of Inequalities and Applications*, **90**, 17 p. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1368-1

[8] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1

[9] Laine, I., Rieppo, J. and Silvennoinen, H. (2005) Remarks on Complex Difference Equations. *Computational Methods and Function Theory*, **5**, 77-88. https://doi.org/10.1007/BF03321087

[10] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Difference Analogue of the Lemma on the Logarithmic Derivative with Applications to Difference Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **314**, 477-487. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.04.010

[11] Liu, K., Cao, T.B. and Cao, H.Z. (2012) Entire Solutions of Fermat Type Differential-Difference Equations. *Archiv der Mathematik*, **99**, 147-155. https://doi.org/10.1007/s00013-012-0408-9

[12] Liu, K. (2015) Fermat Type Differential and Difference Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **159**, 1-10. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0534-3

[13] Gao, L.Y. (2017) On Entire Solutions of Two Types of Systems of Complex Differential-Difference Equation. *Acta Mathematica Scientia*, **37B**, 187-194. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(16)30124-2

[14] 高凌云. 关于一类复微分-差分方程组的解[J]. 数学年刊, 2017, 38A(1): 23-30.

[15] Gao, L.Y. (2016) Entire Solutions of Two Types of Systems of Complex Differential-Difference Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **59**, 677-684.