

# Relation and Lagrange-Point Conjecture of 2 Spherical Centers of 8 Intersection Points between Euler-Line and Orthogonal 4 Spheres

—Application of Pythagorean Theorem of Four-Dimensional Volume (Formula 8)

Guowei Cai

Shanghai Huimei property Co., Ltd., Shanghai  
Email: yiersan@139.com

Received: Apr. 1<sup>st</sup>, 2020; accepted: Apr. 21<sup>st</sup>, 2020; published: Apr. 28<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

It is proved that the four points of orthogonal 4-sphere, concave and convex, have their own concentricity and radii, and the three coordinates of their respective concentric coordinates are all the same. It is proved that with the change of the same dimension, the points of the 2 spherical centers and the Euler-line have the difference of common point, collinear, coplanar and common body. The figure shows that the Euler-line meets the line of 2 spherical centers approximately at the H point. According to the connection of 4 soap bubbles, the conjecture of 5 Lagrange-points is proposed.

## Keywords

Volume Pythagorean Theorem, Orthogonal 4 Spheres, Eight Intersections of Sphere, Lagrange Point, Proof, Algorithm

---

# 正交4球面8交点2共球心与欧拉线关系及 $L_n$ 猜想

——四维体积勾股定理的应用(公式八)

蔡国伟

上海汇美房产有限公司, 上海  
Email: yiersan@139.com

## 摘要

证明正交4球，球面内凹、外凸各4点有各自的共球心及半径，其各自球心坐标的3个分坐标代数值都相同，并得出2球心间距公式；且证明随相同维数的变化，2球心与欧拉线各点具有共点、共线、共面、共体的区别。图示欧拉线与2球心连线约交于H垂心点；根据4个肥皂泡相接，提出5个拉格朗日点的猜想。

## 关键词

体积勾股定理，正交4球，球面8交点，拉格朗日点，证明，算法

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial International License (CC BY-NC 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

正交4球[1] 8球面交点[2]为8原点，其中各4点内凹、外凸的2共球半径及其球心坐标的性质有哪些特征？以及2球心连线与欧拉线[3]的关系如何？自然界中可见哪些现象？

## 2. 证明正交4球球面内凹和外凸各4交点共球半径及其坐标

### 2.1. 设共球半径及其球心坐标符号

#### 2.1.1. 正交4球球面内凹4交点坐标见文[2]，其共球半径及球心符号为

设4个球面内凹交点  $A_-, B_-, C_-, D_-$  坐标见文[2]，共球半径平方为  $r_-^2$ ，共球球心为  $O_-$ 。

#### 2.1.2. 正交4球球面外凸4交点坐标见文[2]，其共球半径及球心符号为

设4个球面外凸交点  $A_+, B_+, C_+, D_+$  坐标见文[2]，共球半径平方为  $r_+^2$ ，共球球心为  $O_+$ 。

### 2.2. 计算证明正交4球球面内凹、外凸各4点2个共球半径及其球心坐标

根据文[2]得知，正交4球的球面构成内凹、外凸各4点3球面交点为8原点，其中可分内凹4点和外凸4点2组。计算证明2组各4原点共球和球心坐标如下：

#### 2.2.1. 计算证明正交4球球面内凹4交点的共球半径及其球心坐标

证明正交4球面4内凹交点共球球心有相同的3个分坐标，且均为共球半径的  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，即共球半径为各相同分坐标的  $\sqrt{3}$  倍。即证明：

正交4球面4内凹交点共球半径为：

$$r_- = \frac{\sqrt{3abcd}}{abc + abd + acd + bcd + v} \quad (1)$$

3个分坐标相同的共球球心坐标为：

$$O_- \begin{cases} x = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ y = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ z = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \end{cases} \quad (2)$$

证明如下:

- 根据 2 点距离公式, 球面内凹 4 原点  $A_-$ ,  $B_-$ ,  $C_-$ ,  $D_-$ , 与其共球球心  $O_-$  可联立方程组为:

$$r_-^2 = \begin{cases} |O_-A_-|^2 = \left[ x - \frac{-abc(abc + bcd + v)t}{d(v + bcd)} \right]^2 + \left( y - \frac{-a^2bc^2t}{v + bcd} \right)^2 + \left( z - \frac{-a^2b^2ct}{v + bcd} \right)^2 \\ |O_-B_-|^2 = \left( x - \frac{-ab^2c^2t}{v + acd} \right)^2 + \left[ y - \frac{-abc(abc + acd + v)t}{d(v + acd)} \right]^2 + \left( z - \frac{-a^2b^2ct}{v + acd} \right)^2 \\ |O_-C_-|^2 = \left( x - \frac{-ab^2c^2t}{v + abd} \right)^2 + \left( y - \frac{-a^2bc^2t}{v + abd} \right)^2 + \left[ z - \frac{-abc(abc + abd + v)t}{d(v + abd)} \right]^2 \\ |O_-D_-|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 \end{cases}$$

这里:  $t = \frac{-d^2}{v + abc}$ ,  $v = \sqrt{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2} = 6V_{ABCD}$ ;

- 用高斯消元法求得内凹 4 点共球心  $O_- (x, y, z)$  坐标为:

$$O_- \begin{cases} x = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ y = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ z = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \end{cases}$$

(注: 上述 3 个分坐标代数值均相同)

- 将上述坐标代入联立公式任何一行, 得内凹 4 点共球半径为:

$$r_- = \frac{\sqrt{3}abcd}{abc + abd + acd + bcd + v}$$

公式(1)、公式(2)证毕。

### 2.2.2. 计算证明正交 4 球球面外凸 4 交点的共球半径及其球心坐标

证明正交 4 球面 4 外凸交点共球球心有相同的 3 个分坐标, 且均为共球半径的  $\frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{2bcd}{abc + v} \right)$ , 其共球半径为各相同分坐标的  $\frac{\sqrt{3}(abc + v)}{abc - 2bcd + v}$  倍, 且与内凹共球半径共轭, 区别在分母正的体积元为负。即证明:

正交 4 球面 4 外凸交点共球半径为:

$$r_+ = \frac{\sqrt{3}abcd}{abc + abd + acd + bcd - v} \quad (3)$$

3 个分坐标相同的共球球心坐标为:

$$O_+ \begin{cases} x = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \\ y = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \\ z = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \end{cases} \quad (4)$$

证明如下:

- 根据 2 点距离公式, 球面外凸 4 原点  $A_+, B_+, C_+, D_+$  与其共球球心  $O_+$  可联立方程组为:

$$r_+^2 = \begin{cases} |O_+A_+|^2 = \left[ x - \frac{abc(abc-bcd+v)t}{d(v-bcd)} \right]^2 + \left( y - \frac{-a^2bc^2t}{v-bcd} \right)^2 + \left( z - \frac{-a^2b^2ct}{v-bcd} \right)^2 \\ |O_+B_+|^2 = \left( x - \frac{-ab^2c^2t}{v-acd} \right)^2 + \left[ y - \frac{abc(abc-acd+v)t}{d(v-acd)} \right]^2 + \left( z - \frac{-a^2b^2ct}{v-acd} \right)^2 \\ |O_+C_+|^2 = \left( x - \frac{-ab^2c^2t}{v-abd} \right)^2 + \left( y - \frac{-a^2bc^2t}{v-abd} \right)^2 + \left[ z - \frac{abc(abc-abd+v)t}{d(v-abd)} \right]^2 \\ |O_+D_+|^2 = \left( x - \frac{-2ab^2c^2t}{v-abc} \right)^2 + \left( y - \frac{-2a^2bc^2t}{v-abc} \right)^2 + \left( z - \frac{-2a^2b^2ct}{v-abc} \right)^2 \end{cases}$$

这里:  $t = \frac{-d^2}{v+abc}$ ,  $v = \sqrt{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2} = 6V_{ABCD}$ ;

- 用高斯消元法求得外凸 4 点共球心  $O_+(x, y, z)$  坐标为:

$$O_+ \begin{cases} x = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \\ y = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \\ z = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \end{cases}$$

(注: 上述 3 个分坐标代数值均相同)

- 将上述坐标代入联立公式任何一行, 得外凸 4 点共球半径为:

$$r_+ = \frac{\sqrt{3}abcd}{abc+abd+acd+bcd-v}$$

公式(3)、公式(4)证毕。

### 2.2.3. 计算证明正交 4 球球面内凹、外凸共球球心间距

证明正交 4 球面内凹、外凸交点 2 共球球心间距为:

$$O_-O_+ = \left( 1 - \frac{2bcd}{v+abc} \right) r_+ - r_- \quad (5)$$

- 根据 2 点距离公式, 因内凹、外凸 2 共球球心坐标均分别相同, 其距离公式

$$|O_+O_-|^2 = 3 \left[ \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} - \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd+v} \right]^2$$

- 两边开方为:

$$\begin{aligned}
 |O_+O_-| &= \sqrt{3} \left[ \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} - \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd+v} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}abcd}{abc+abd+acd+bcd-v} \frac{v+abc-2bcd}{v+abc} - \frac{\sqrt{3}abcd}{abc+abd+acd+bcd+v} \\
 &= \left( 1 - \frac{2bcd}{v+abc} \right) r_+ - r_-
 \end{aligned}$$

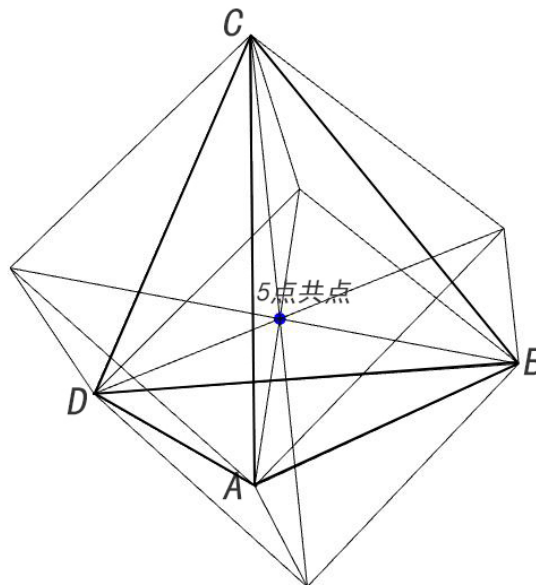
公式(5)验证毕。

### 2.3. 证明正交 4 球球面内凹、外凸 2 共球心与欧拉线关系

#### 2.3.1. 证明当 4 维相同, 5 点共点

当正交 4 球半径均相同时, 内凹、外凸球面交点 2 共球球心  $O_-, O_+$  与  $H, G, O$  欧拉线(欧拉线权取 3 点坐标见文[3], 其余点作省略) 5 点均共点。其坐标为位置: 见图 1。

$$H\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = G\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = O\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = O_-\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = O_+\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) \quad (6)$$



**Figure 1.** 4-Dimensional same, 5-point common point graph  
**图 1.** 四维相同, 5 点共点图

公式(1)坐标共点验证如下:

当  $(a=b=c=d)$  时:

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2} \Rightarrow v = 2a^3; \\
 t &= \frac{-d^2}{v+abc} \Rightarrow t = \frac{-a^2}{2a^3+a^3} = \frac{-1}{3a}
 \end{aligned}$$

- 验算垂心  $H$  坐标:

$$H \begin{cases} x = \frac{-ab^2c^2t}{v} \\ y = \frac{-a^2bc^2t}{v} \\ z = \frac{-a^2b^2ct}{v} \end{cases} \Rightarrow H \begin{cases} x = \frac{-a^5}{2a^3} \left( \frac{-1}{3a} \right) = \frac{a}{6} \\ y = \frac{-a^5}{2a^3} \left( \frac{-1}{3a} \right) = \frac{a}{6} \\ z = \frac{-a^5}{2a^3} \left( \frac{-1}{3a} \right) = \frac{a}{6} \end{cases}$$

- 验算重心  $G$  坐标:

$$G \begin{cases} x = \frac{a+bct}{4} \\ y = \frac{b+act}{4} \\ z = \frac{c+abt}{4} \end{cases} \Rightarrow G \begin{cases} x = \frac{a+a^2 \left( \frac{-1}{3a} \right)}{4} = \frac{a}{6} \\ y = \frac{a+a^2 \left( \frac{-1}{3a} \right)}{4} = \frac{a}{6} \\ z = \frac{a+a^2 \left( \frac{-1}{3a} \right)}{4} = \frac{a}{6} \end{cases}$$

- 验算外接球球心  $O$  坐标:

$$O \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left( a + bct \frac{v+2abc}{v} \right) \\ y = \frac{1}{2} \left( b + act \frac{v+2abc}{v} \right) \\ z = \frac{1}{2} \left( c + abt \frac{v+2abc}{v} \right) \end{cases} \Rightarrow O \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left[ a + a^2 \left( \frac{-1}{3a} \right) \frac{2a^3+2a^3}{2a^3} \right] = \frac{a}{6} \\ y = \frac{1}{2} \left[ a + a^2 \left( \frac{-1}{3a} \right) \frac{2a^3+2a^3}{2a^3} \right] = \frac{a}{6} \\ z = \frac{1}{2} \left[ a + a^2 \left( \frac{-1}{3a} \right) \frac{2a^3+2a^3}{2a^3} \right] = \frac{a}{6} \end{cases}$$

- 验算内凹球面交点共球心  $O_-$  坐标:

$$O_- \begin{cases} x = \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd+v} \\ y = \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd+v} \\ z = \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd+v} \end{cases} \Rightarrow O_- \begin{cases} x = \frac{a^4}{4a^3+2a^3} = \frac{a}{6} \\ y = \frac{a^4}{4a^3+2a^3} = \frac{a}{6} \\ z = \frac{a^4}{4a^3+2a^3} = \frac{a}{6} \end{cases}$$

- 验算外凸球面交点共球心  $O_+$  坐标:

$$O_+ \begin{cases} x = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \\ y = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \\ z = \frac{abcd(v+abc-2bcd)}{(abc+abd+acd+bcd-v)(v+abc)} \end{cases} \Rightarrow O_+ \begin{cases} x = \frac{a^4(2a^3+a^3-2a^3)}{(4a^3-2a^3)(2a^3+a^3)} = \frac{a}{6} \\ y = \frac{a^4(2a^3+a^3-2a^3)}{(4a^3-2a^3)(2a^3+a^3)} = \frac{a}{6} \\ z = \frac{a^4(2a^3+a^3-2a^3)}{(4a^3-2a^3)(2a^3+a^3)} = \frac{a}{6} \end{cases}$$

公式(6)验证毕。

**2.3.2. 当3维相同, 5点共垂线**

当3维相同: 正交4球球面内凹、外凸2共球球心  $O_-, O_+$  连线与  $H, G, O$  欧拉线各点, 5点共垂线(且该垂线过另一点球心)。见图2。

根据文[2]得知: 垂线过球心  $D(bct, act, abt)$ , 也过原点  $D_-(0,0,0)$ , 根据2点式过  $D$  点垂线的直线坐标参数方程为:

$$l_D \begin{cases} x = bctt_n \\ y = actt_n \\ z = abtt_n \end{cases}$$

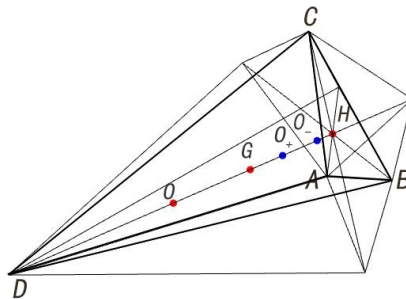
这里:  $t = \frac{-d^2}{v+abc}$ ,  $v = \sqrt{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2}$ 。

当  $(a=b=c)$  时: 根据2点式过  $D$  垂线的直线坐标参数方程为:

$$l_D \begin{cases} x = a^2tt_n \\ y = a^2tt_n \\ z = a^2tt_n \end{cases} = l_D \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a - \sqrt{a^2 + 3d^2})t_n \\ y = \frac{1}{3}(a - \sqrt{a^2 + 3d^2})t_n \\ z = \frac{1}{3}(a - \sqrt{a^2 + 3d^2})t_n \end{cases} \Rightarrow \text{即: } x = y = z = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3}t_n \quad (7)$$

这里:  $v = a^2\sqrt{a^2 + 3d^2}$ ,  $t = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3a^2}$ ,  $a^2t = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3}$  以下同。

可见当3维相同时, 该线每点的3个分坐标均相同, 点的变化仅在于参数  $t_n$ 。



**Figure 2.** 3-D same, 6-point collinear  
**图2.** 三维相同6点共线图

验证如下:

当  $(a=b=c)$  时

- 验算垂心  $H$  坐标为:

$$H \begin{cases} x_H = \frac{-ab^2c^2t}{v} \\ y_H = \frac{-a^2bc^2t}{v} \\ z_H = \frac{-a^2b^2ct}{v} \end{cases} \Rightarrow H \begin{cases} \frac{a(-a + \sqrt{a^2 + 3d^2})}{3\sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3}t_H \\ \frac{a(-a + \sqrt{a^2 + 3d^2})}{3\sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3}t_H \\ \frac{a(-a + \sqrt{a^2 + 3d^2})}{3\sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3}t_H \end{cases}$$

解方程得参数:  $t_H = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + 3d^2}}$ 。

- 验算重心  $G$  坐标为:

$$G \begin{cases} x_G = \frac{a+bct}{4} \\ y_G = \frac{b+act}{4} \\ z_G = \frac{c+abt}{4} \end{cases} \Rightarrow G \begin{cases} \frac{4a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{12} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_G \\ \frac{4a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{12} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_G \\ \frac{4a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{12} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_G \end{cases}$$

解方程得参数:  $t_G = \frac{d^2 - a(a + \sqrt{a^2 + 3d^2})}{4d^2} = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4d^2} - \frac{a\sqrt{a^2 + 3d^2}}{4d^2}$ 。

- 验算外接球球心  $O$  坐标为:

$$O \begin{cases} x_O = \frac{1}{2} \left( a + bct \frac{v+2abc}{v} \right) \\ y_O = \frac{1}{2} \left( b + act \frac{v+2abc}{v} \right) \\ z_O = \frac{1}{2} \left( c + abt \frac{v+2abc}{v} \right) \end{cases} \Rightarrow O \begin{cases} \frac{a^2 - 3d^2 + 2a\sqrt{a^2 + 3d^2}}{6\sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_O \\ \frac{a^2 - 3d^2 + 2a\sqrt{a^2 + 3d^2}}{6\sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_O \\ \frac{a^2 - 3d^2 + 2a\sqrt{a^2 + 3d^2}}{6\sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_O \end{cases}$$

解方程得参数:  $t_O = \frac{-a(a^2 + d^2) + (-a^2 + d^2)\sqrt{a^2 + 3d^2}}{2d^2\sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2d^2} - \frac{a}{2\sqrt{a^2 + 3d^2}} - \frac{a^3}{2d^2\sqrt{a^2 + 3d^2}}$ 。

- 验算内凹球面交点共球心  $O_-$  坐标为:

$$O_- \begin{cases} x_{O_-} = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ y_{O_-} = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ z_{O_-} = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \end{cases} \Rightarrow O_- \begin{cases} \frac{ad}{a + 3d + \sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_{O_-} \\ \frac{ad}{a + 3d + \sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_{O_-} \\ \frac{ad}{a + 3d + \sqrt{a^2 + 3d^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_{O_-} \end{cases}$$

解方程得参数:  $t_{O_-} = \frac{a}{a - d - \sqrt{a^2 + 3d^2}}$ 。

- 验算外凸球面交点共球心  $O_+$  坐标为:

$$O_+ \begin{cases} x_{O_+} = \frac{abcd(v + abc - 2bcd)}{(abc + abd + acd + bcd - v)(v + abc)} \\ y_{O_+} = \frac{abcd(v + abc - 2bcd)}{(abc + abd + acd + bcd - v)(v + abc)} \\ z_{O_+} = \frac{abcd(v + abc - 2bcd)}{(abc + abd + acd + bcd - v)(v + abc)} \end{cases} \Rightarrow O_+ \begin{cases} \frac{a(3a + d - \sqrt{a^2 + 3d^2})}{6(a + d)} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_{O_+} \\ \frac{a(3a + d - \sqrt{a^2 + 3d^2})}{6(a + d)} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_{O_+} \\ \frac{a(3a + d - \sqrt{a^2 + 3d^2})}{6(a + d)} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 3d^2}}{3} t_{O_+} \end{cases}$$



解方程得参数:  $t_{O_+} = \frac{a(-3a-d+\sqrt{a^2+3d^2})}{2(a+d)(-a+\sqrt{a^2+3d^2})}$ 。

- 验算正交球球心  $D$  坐标为:

$$D \begin{cases} x_D = bct \\ y_D = act \\ z_D = abt \end{cases} \Rightarrow D \begin{cases} \frac{a-\sqrt{a^2+3d^2}}{3} = \frac{a-\sqrt{a^2+3d^2}}{3} t_D \\ \frac{a-\sqrt{a^2+3d^2}}{3} = \frac{a-\sqrt{a^2+3d^2}}{3} t_D \\ \frac{a-\sqrt{a^2+3d^2}}{3} = \frac{a-\sqrt{a^2+3d^2}}{3} t_D \end{cases}$$

解方程得参数:  $t_D = 1$ 。

公式(7)证毕。

同理: 当其余 3 组  $ABD, ACD, BCD$  半径相同时, 上述 5 点坐标, 且依次共线过球心  $C, B, A$  垂线(略)。

### 2.3.3. 当 2 维相同, 5 点共垂面

当 2 维相同: 正交 4 球球面内凹、外凸 2 共球球心  $O_-, O_+$  线与  $H, G, O$  欧拉线交于  $H$ , 5 点共垂直面。且该面垂直交同维长 2 球心连线中点、且过另 2 点球心间连线。见图 3。

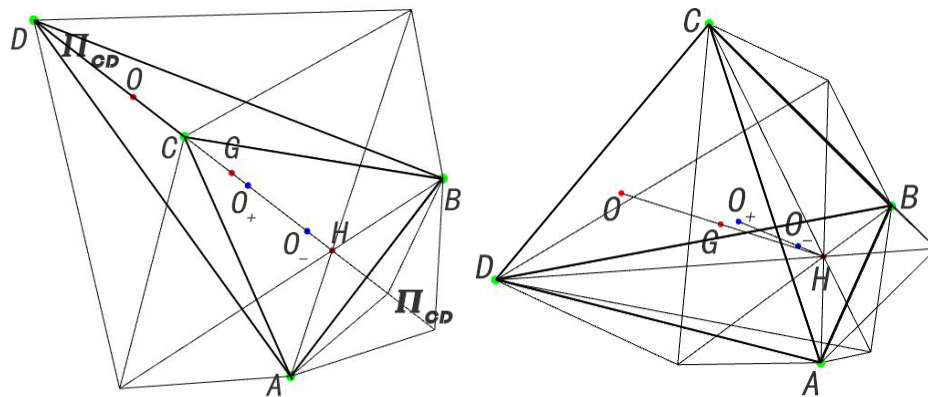


Figure 3. 2-Dimensional same, 7-point coplanar (The above is the diagram of 2 observation points)

图 3. 二维相同, 7 点共面图(上述为 2 个视图)

例:

- 证明当  $(a=b)$  2 维相同,  $O_-, O_+, H, G, O, C, D$  7 点中任意取  $C, D, H$  3 点的平面方程见文[4]为:

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-c \\ act-0 & act-0 & a^2t-c \\ \frac{a^3c^2d^2}{a^2cv+v^2}-0 & \frac{a^3c^2d^2}{a^2cv+v^2}-0 & \frac{a^4cd^2}{a^2cv+v^2}-c \end{vmatrix} = x-y \quad (8)$$

当  $(a=b)$  2 维相同, 欧拉线各点  $H, G, O$  与球面内凹、外凸 2 共球球心  $O_-, O_+$  连线约交于垂心  $H$ ,

上述 5 点共面，该共面垂直交于 A, B 2 球心连线中点，且与 C、D 2 球心连线共面。其平面方程  $\Pi_{CD}$  见文[4]：见图 3。

$$\text{当 } (a=b) \text{ 时: } v = a\sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + 2c^2d^2} = a\sqrt{s_{ACD}^2 + c^2d^2}, \quad t = \frac{-d^2}{v + a^2c} = \frac{-d^2}{a(ac + \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + 2c^2d^2})}$$

$$H \begin{cases} x_H = \frac{-ab^2c^2t}{v} \\ y_H = \frac{-a^2bc^2t}{v} \\ z_H = \frac{-a^2b^2ct}{v} \end{cases} \Rightarrow H \begin{cases} x_H = \frac{a^3c^2d^2}{a^2cv + v^2} = \frac{ac^2d^2}{c^2d^2 + cv + s_{ACD}^2} \\ y_H = \frac{a^3c^2d^2}{a^2cv + v^2} = \frac{ac^2d^2}{c^2d^2 + cv + s_{ACD}^2} \\ z_H = \frac{a^4cd^2}{a^2cv + v^2} = \frac{a^2cd^2}{c^2d^2 + cv + s_{ACD}^2} \end{cases}$$

$$G \begin{cases} x_G = \frac{a + bct}{4} \\ y_G = \frac{b + act}{4} \\ z_G = \frac{c + abt}{4} \end{cases} \Rightarrow G \begin{cases} x_G = \frac{a(a^2c - cd^2 + v)}{4(a^2c + v)} \\ y_G = \frac{a(a^2c - cd^2 + v)}{4(a^2c + v)} \\ z_G = \frac{a^2c^2 - a^2d^2 + cv}{4(a^2c + v)} \end{cases}$$

$$O \begin{cases} x_o = \frac{1}{2} \left( a + bct \frac{v + 2abc}{v} \right) \\ y_o = \frac{1}{2} \left( b + act \frac{v + 2abc}{v} \right) \\ z_o = \frac{1}{2} \left( c + abt \frac{v + 2abc}{v} \right) \end{cases} \Rightarrow O \begin{cases} x_o = \frac{a(-2a^2c^2d^2 + a^2cv - cd^2v + v^2)}{2v(a^2c + v)} \\ y_o = \frac{a(-2a^2c^2d^2 + a^2cv - cd^2v + v^2)}{2v(a^2c + v)} \\ z_o = \frac{-2a^4cd^2 + a^2(c^2 - d^2)v + cv^2}{2v(a^2c + v)} \end{cases}$$

$$O_- \begin{cases} x_{o-} = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ y_{o-} = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \\ z_{o-} = \frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd + v} \end{cases} \Rightarrow O_- \begin{cases} x_{o-} = \frac{a^2cd}{a^2c + a^2d + 2acd + v} \\ y_{o-} = \frac{a^2cd}{a^2c + a^2d + 2acd + v} \\ z_{o-} = \frac{a^2cd}{a^2c + a^2d + 2acd + v} \end{cases}$$

$$O_+ \begin{cases} x_{o+} = \frac{abcd(v + abc - 2bcd)}{(abc + abd + acd + bcd - v)(v + abc)} \\ y_{o+} = \frac{abcd(v + abc - 2bcd)}{(abc + abd + acd + bcd - v)(v + abc)} \\ z_{o+} = \frac{abcd(v + abc - 2bcd)}{(abc + abd + acd + bcd - v)(v + abc)} \end{cases} \Rightarrow O_+ \begin{cases} x_{o+} = \frac{a^2cd(a^2c - 2acd + v)}{(a^2c + a^2d + 2acd - v)(a^2c + v)} \\ y_{o+} = \frac{a^2cd(a^2c - 2acd + v)}{(a^2c + a^2d + 2acd - v)(a^2c + v)} \\ z_{o+} = \frac{a^2cd(a^2c - 2acd + v)}{(a^2c + a^2d + 2acd - v)(a^2c + v)} \end{cases}$$

$$C(0,0,c)$$

$$D(bct, act, abt) \Rightarrow D \begin{cases} x_{O_+} = \frac{a^2cd(a^2c - 2acd + v)}{(a^2c + a^2d + 2acd - v)(a^2c + v)} \\ y_{O_+} = \frac{a^2cd(a^2c - 2acd + v)}{(a^2c + a^2d + 2acd - v)(a^2c + v)} \\ z_{O_+} = \frac{a^2cd(a^2c - 2acd + v)}{(a^2c + a^2d + 2acd - v)(a^2c + v)} \end{cases}$$

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-c \\ act-0 & act-0 & a^2t-c \\ \frac{a^3c^2d^2}{a^2cv+v^2}-0 & \frac{a^3c^2d^2}{a^2cv+v^2}-0 & \frac{a^4cd^2}{a^2cv+v^2}-c \end{vmatrix} = x-y$$

(这里取  $C, D, H$  3点)

将上述  $O_-, O_+, H, G, O, C, D$  7点中任意3点的  $\Pi_{CD}$  平面方程均为:

$$0 = x - y$$

公式(8)证毕。

同理可证: (平面方程参见文[4])

当  $a = c$  则  $H, G, O, O_-, O_+, B, D$  7点共面于  $\Pi_{BD}$  平面, 该平面  $\perp$  交于  $AC$  连线中点, 平面方程为:

$$0 = x - z;$$

当  $b = c$  则  $H, G, O, O_-, O_+, A, D$  7点共面于  $\Pi_{AD}$  平面, 该平面  $\perp$  交于  $BC$  连线中点, 平面方程为:

$$0 = y - z;$$

当  $a = d$  则  $H, G, O, O_-, O_+, B, C$  7点共面于  $\Pi_{BC}$  平面, 该平面  $\perp$  交于  $AD$  连线中点, 平面方程为:

$$0 = \left(2bc + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2}\right)x + acy + abz - abc;$$

当  $b = d$  则  $H, G, O, O_-, O_+, A, C$  7点共面于  $\Pi_{AC}$  平面, 该平面  $\perp$  交于  $BD$  连线中点, 平面方程为:

$$0 = bcx + \left(2ac + \sqrt{a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2}\right)y + abz - abc;$$

当  $c = d$  则  $H, G, O, O_-, O_+, A, B$  7点共面于  $\Pi_{AB}$  平面, 该平面  $\perp$  交于  $CD$  连线中点, 平面方程为:

$$0 = bcx + acy + \left(2ab + \sqrt{2a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\right)z - abc;$$

- 共面的欧拉线  $H, G, O$  与  $O_-, O_+$  连线约交于  $H$  点, 计算证明交点不在  $H$  点:

根据  $G, O$  2点式直线参数方程:  $L_{GO}$

$$L_{GO} = \begin{cases} x = x_G - (x_O - x_G)t_1 \\ y = y_G - (y_O - y_G)t_1 \\ z = z_G - (z_O - z_G)t_1 \end{cases} \quad (9)$$

根据  $O_-, O_+$  2点式直线参数方程:

$$L_{O_-O_+} = \begin{cases} x = x_{O_-} - (x_{O_+} - x_{O_-})t_2 \\ y = y_{O_-} - (y_{O_+} - y_{O_-})t_2 \\ z = z_{O_-} - (z_{O_+} - z_{O_-})t_2 \end{cases} \quad (10)$$

将公式(9)、(10)联立将垂心坐标代入：

$$H = \begin{cases} x_H = x_G - (x_O - x_G)t_1 = x_{O_-} - (x_{O_+} - x_{O_-})t_2 \\ y_H = y_G - (y_O - y_G)t_1 = y_{O_-} - (y_{O_+} - y_{O_-})t_2 \\ z_H = z_G - (z_O - z_G)t_1 \neq z_{O_-} - (z_{O_+} - z_{O_-})t_2 \end{cases} \quad (11)$$

由于  $O_-, O_+$  2 点坐标的  $x, y, z$  分坐标均各自相同，而  $H$  仅  $x, y$  2 分坐标相同  $z$  坐标则不同，因此计算出上述 2 线仅约交于  $H$  点。

不妨将图 3 的代数值 ( $a=2, b=2, c=5, d=6$ ) 计算证明  $O_-, O_+, H$  3 点的间距为：

$$|O_+H| = \sqrt{(x_{O_+} - x_H)^2 + (y_{O_+} - y_H)^2 + (z_{O_+} - z_H)^2} = 1.29344283577058378$$

$$|O_-H| = \sqrt{(x_{O_-} - x_H)^2 + (y_{O_-} - y_H)^2 + (z_{O_-} - z_H)^2} = 0.39753076973069135$$

$$|O_+O_-| = \sqrt{(x_{O_+} - x_{O_-})^2 + (y_{O_+} - y_{O_-})^2 + (z_{O_+} - z_{O_-})^2} = 1.06198212275930686$$

$$O_+O_- + O_-H = 1.45951289248999821$$

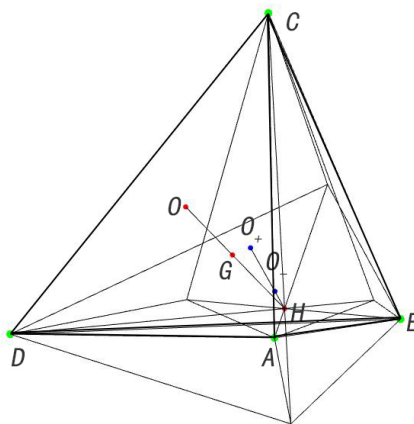
$$|O_+O_-| + |O_-H| - |O_+H| = 1.45951289248999821 - 1.29344283577058378 = 0.1660700567194144$$

因此：虽然共面不平行的 2 线有交点，目测约交点在  $H$  点。其间距和夹角的精确数值仍然需由点坐标得出。

### 2.3.4. 当 4 维均不同，5 点共体

当四维均不同时，正交 4 球球面内凹、外凸 2 共球球心  $O_-, O_+$  线与  $H, G, O$  欧拉线交于  $H$ ，5 点共体(该体包含：4 个正交球的综合体)。其 2 线交点同样无法用公式证明，仅作 3D 图目测可见约交于  $H$  点。

例：当  $a=1, b=2, c=3, d=4$ ，作图后可见欧拉线与凹凸球面共球球心 2 点连线约交于垂心。见图 4



**Figure 4.** 4-D is not the same, 5-point 2-line approximately intersects  $H$ -point  
**图 4.** 四维不相同，5 点 2 线约交于  $H$  点图

### 3. 总结

#### 3.1. 正交 4 球球面内凹、外凸交点 2 共球球心 $O_-, O_+$ 2 点的性质

- $O_-, O_+$  2 点共球球心，各自的分坐标均相同；
- $O_-$  点在  $H$  点附近； $O_+$  点在  $G$  点附近， $O_-$  与  $O_+$  2 点间距等于  $\left(1 - \frac{2bcd}{v+abc}\right)r_+ - r_-$ ；
- $r_-, r_+$  2 个共球半径共轭于分母的体积元。

#### 3.2. $O_-, O_+$ 与欧拉线关系

- 当正交 4 球半径相同时， $O_-$  与  $O_+$  2 点与欧拉线各点共垂心点；
- 当正交 4 球其中 3 球半径相同时， $O_-$  与  $O_+$  2 点与欧拉线各点共垂线；
- 当正交 4 球其中 2 球半径相同时， $O_-$  与  $O_+$  2 点与欧拉线各点共垂面于相同 2 球心间中点；2 球心连线与欧拉线约交于  $H$ ；
- 当正交 4 球半径均不相同， $O_-$  与  $O_+$  2 点与欧拉线共体；2 球心连线与欧拉线约交于垂心  $H$ 。

#### 3.3. 拉格朗日 5 点的猜想

- 自然界中任意 4 个相接的肥皂泡均与正交 4 球是等价的，因此认为引力与泡沫的张力是等价的。引力很难直观，而泡沫张力能方便观察。
- 通过观察泡沫张力：可见正交 4 球球面外凸 4 交点和垂心共 5 点，当在水平面(相当于地球球面)与 3 个相接的肥皂泡等价于 4 球正交，上述 5 点中除了 1 点在 3 肥皂泡球面交点外的其余 4 点均在水平面上。而球面内凹 4 点与外凸 4 点正好反差 180 度，张力相互抵消后内凹 4 点消失，仅见垂心  $H$ 。因此猜想上述 5 点：为正交 4 个天体间  $L_1 \sim L_5$  拉格朗日点[5]。

### 参考文献

- [1] 蔡国伟. 体积勾股定理的证明[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 723-729.
- [2] 蔡国伟. 证明正交四球心间 15 个垂心球及距离公式的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 928-948.
- [3] 蔡国伟. 证明以正交 4 球半径为 4 元数欧拉线的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1043-1059.
- [4] 蔡国伟. 证明正交 4 球 6 平面及四维垂直的四维空间算法[J]. 理论数学, 2020, 10(1): 23-29.
- [5] 张恒谦. 奇妙的拉格朗日点[J]. 中学物理教学参考, 2011, 40(10): 29-30.