Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 245-253
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104032

Hans汉斯

Double Mertens' Second Theorem in the Polynomial Ring over a Finite Field

Miao Wang

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: wmiaod@163.com

Received: Mar. 5th, 2020; accepted: Mar. 24th, 2020; published: Mar. 31st, 2020

Abstract

In 2014, by using the prime hyperbola method Popa developed the following double Mertens estimation:

$$\sum_{pq\le x}\frac{1}{pq}=\left(\ln(\ln x)+B\right)^2-\ln^2 2+2\int_{0+0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right),$$

where p, q are prime numbers and B is Mertens constant. In this paper, by modifying the methods of Popa and based on Dirichlet's hyperbola method, we generalize the Mertens' second theorem to the double case on the polynomial ring over a finite field. During this approach, by modifying Rosen's method on the proof of the Mertens' second theorem in algebraic number field, we give a new proof of the Mertens' second theorem on the polynomial ring over a finite field.

Keywords

Mertens-Type Evaluations, Polynomial Ring over Finite Fields, Arithmetic Functions, Polylogarithm

有限域上一元多项式环中的Mertens第二定理的二重推广

王　杪

华南理工大学数学学院，广东　广州
Email: wmiaod@163.com

收稿日期：2020年3月5日；录用日期：2020年3月24日；发布日期：2020年3月31日

文章引用: 王杪. 有限域上一元多项式环中的 Mertens 第二定理的二重推广[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 245-253.
DOI: 10.12677/pm.2020.104032

摘 要

2014年，罗马尼亚数论学家Popa通过引入素数双曲线法得到Mertens第二定理的二重推广：

$$\sum_{pq\le x}\frac{1}{pq}=\left(\ln(\ln x)+B\right)^2-\ln^2 2+2\int_{0+0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right),$$

其中p，q是素数，B是Mertens常数。在本文中，我们类比Popa的方法，运用Dirichlet双曲线法在有限域上的一元多项式环中得到了Mertens第二定理的二重推广，同时类比Rosen [1]关于代数数域中Mertens第二定理的证明方法，重新证明了有限域上的一元多项式环中的Mertens第二定理。

关键词

Mertens型估计，有限域上的多项式环，算术函数，多重对数函数

1. 引言

为了书写方便，在本文中$\sum_{|P|\le x}$表示求和式$\sum_{\substack{|P|\le x\\ P\in\mathbb{P}}}$，$\sum_{|P||Q|\le x}$表示求和式$\sum_{\substack{|P||Q|\le x\\ P,Q\in\mathbb{P}}}$，其中$\mathbb{P}$为$\mathbb{F}_q[T]$中全体首一不可约多项式的集合。

L. Euler 在 1735 年发表的论文中证明了下面著名的等式：

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\ln(x)+C+O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{1}$$

其中 C 称为 Euler-Mascheroni 常数，约为 0.577。

1874 年，德国数学家 Mertens 进一步得到下面著名的 Mertens 定理，也叫 Mertens 第二定理：

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\ln(\ln x)+B+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{2}$$

其中 B (近似为 0.261)是一个常数。该定理多次出现在本科和研究生数论教科书中，如 T. Apostol [2] (详见 p.90，定理 4.12)，G. Everest，T. Ward [3] (GTM 232，详见该书 p.13)，潘承彪，潘承洞[4] (详见该书 p.50)。

2014 年，罗马尼亚数论学家 Popa [5]通过引入素数双曲线法，即利用如下公式：

$$\sum_{pq\le x}f(p)g(q)=\sum_{p\le\sqrt{x}}f(p)G\left(\frac{x}{p}\right)+\sum_{p\le\sqrt{x}}g(p)F\left(\frac{x}{p}\right)-F\left(\sqrt{x}\right)G\left(\sqrt{x}\right), \tag{3}$$

其中 f,g 是 $N\to R$ 上的函数，$F(x)=\sum_{p\le x}f(p),G(x)=\sum_{p\le x}g(p)$。他通过对$\sum_{pq\le x}\frac{1}{pq}$进行展开，得到如下更加精确的二重 Mertens 估计式：

$$\sum_{pq\le x}\frac{1}{pq}=\left(\ln(\ln x)+B\right)^2-\ln^2 2+2\int_{0+0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right), \tag{4}$$

其中 p,q 是素数，B 是 Mertens 常数。

Mertens 第二定理除了整数环中的上述推广和改进之外，人们在有限域上的一元多项式环 $\mathbb{F}_q[T]$ 中也类比得到了较好的结果。

1979 年，南非数论学家 Knopfmacher 在他编写的书[6]中，通过引入多项式环上的范数，给出了 Mertens 第二定理在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的类比：

定理 1. 下面估计式成立

$$\sum_{|P|\le x}\frac{1}{|P|}=\ln(\ln x)+B_A+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{5}$$

其中 B_A 是 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的 Mertens 常数。

本文的第一个任务是类比 Rosen 在文[1]关于代数数域中 Mertens 第二定理的证明方法，重新证明 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的 Mertens 第二定理，即重新给出了上面定理 1 的证明。同时类比 Popa 在文[5]中的方法，运用 Dirichlet 双曲线法在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中得到了 Mertens 第二定理的二重推广，即下面的定理 2：

定理 2. 下面估计式成立

$$\sum_{|P||Q|\le x}\frac{1}{|P||Q|}=\left(\ln(\ln x)+B_A\right)^2-\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right), \tag{6}$$

其中 B_A 是 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的 Mertens 常数。

2. 预备知识

定义 1. ([7]) 设 $g(x)>0$，若存在常数 $A>0$，使得

$$|f(x)|\le Ag(x), x\in(a,b)$$

成立，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的强函数，记为

$$f(x)=O(g(x)), x\in(a,b).$$

记 $\mathbb{F}_q$ 是 q 元有限域，$\mathbb{F}_q[T]$ 记有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的一元多项式环。

定义 2. ([8]) 令 $g\in\mathbb{F}_q[T]$，如果 $g\ne 0$，则 $|g|=q^{\deg(g)}$，其中 $\deg(g)$ 记多项式 g 的次数。如果 $g=0$，则 $|g|=0$。

下面为著名的素数定理在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的类比。

引理 1. ([8]，**定理 2.2**)令 a_n 表示 $\mathbb{F}_q[T]$ 上的 n 次首一不可约多项式的个数，则

$$a_n=\frac{q^n}{n}+O\left(\frac{q^{\frac{n}{2}}}{n}\right).$$

下面两个引理分别是 Dirichlet 双曲线法和 Abel 求和公式。

引理 2. ([2]，**定理 3.17**) 设 a,b 为正实数且 $ab=x$，有下式成立

$$\sum_{\substack{q,d\\ qd\le x}}f(d)g(q)=\sum_{n\le a}f(n)G\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\le b}g(n)F\left(\frac{x}{n}\right)-F(a)G(b),$$

这里 $F(x)=\sum_{n\le x}f(n), G(x)=\sum_{n\le x}g(n)$。

引理 3. ([9]) 设 m 是一个自然数，$\mu:\mathbb{N}^m\to\mathbb{R}$ 是任意函数，$G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是关于 μ 的 m 阶和函数，即 $G(x)=\sum_{i_1\cdots i_m\le x}\mu(i_1,\cdots,i_m)$。则当 $0<y<x$ 时，对任意在 $[y,x]$ 上的函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$，下面等式成立

$$\sum_{y<i_1\cdots i_m\le x} f(i_1\cdots i_m)\mu(i_1,\cdots,i_m)=f(x)G(x)-f(y)G(y)-\int_y^x G(t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

当 $m=1$ 时，上述引理就是 Abel 求和公式。

定义 3. ([10]) 设 $Li_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为多重对数函数，定义

$$Li_2(x)=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2},$$

$$Li_3(x)=-\int_0^x\frac{Li_2(t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}.$$

引理 4. ([10], p.5, p.155)

(i) 对任意 $x\in(0,1)$，下面等式成立

$$Li_2(x)+Li_3(x)=-\ln x\cdot\ln(1-x)+\frac{\pi^2}{6}.$$

(ii) $Li_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$.

(iii) $Li_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7\zeta(3)}{8}+\frac{(\ln 2)\zeta(2)}{2}+\frac{\ln^3 2}{6}$.

3. 定理 1 的证明

为了证明我们的结论，需要下面的命题。

命题 1. 下面这个估计式成立

$$\sum_{|P|\le x}\frac{\ln|P|}{|P|}=\ln(x)+O(1).$$

证明 定义

$$b_n=\#\{P\,|\,|P|=n\},$$

其中 $n=q^m,m=\deg P$。由引理 1，可得

$$b_n=\frac{q^m}{m}+O\left(\frac{q^{\frac{m}{2}}}{m}\right).$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{|P|\le x}\frac{\ln|P|}{|P|}&=\sum_{n\le x}\frac{\ln n}{n}b_n=\sum_{q^m\le x}\frac{m\cdot\ln q}{q^m}\left[\frac{q^m}{m}+O\left(\frac{q^{\frac{m}{2}}}{m}\right)\right]\\&=\sum_{q^m\le x}\ln q+O\left(\sum_{q^m\le x}\frac{\ln q}{q^{\frac{m}{2}}}\right)=\ln q\sum_{q^m\le x}1+\ln q\cdot O\left(\sum_{q^m\le x}\frac{1}{q^{\frac{m}{2}}}\right),\\&=\ln q\lfloor\log_q x\rfloor+\ln q\cdot O\left(\int_1^{\log_q x}\frac{1}{q^{\frac{t}{2}}}\mathrm{d}t\right)=\ln q\lfloor\log_q x\rfloor+O(1)\\&=\ln q\left\lfloor\frac{\ln x}{\ln q}\right\rfloor+O(1)=\ln x+O(1)\end{aligned}$$

当 t 足够大时，有 $q^{\frac{t}{2}} > \frac{t^2}{2}$ 和 $\frac{1}{q^{\frac{t}{2}}} < \frac{2}{t^2}$。因为 $\int_1^{\infty} \frac{2}{t^2} \mathrm{d}t$ 收敛，所以 $\int_1^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{t}{2}}} \mathrm{d}t$ 也收敛，且 $\int_1^{\log_q x} \frac{1}{q^{\frac{t}{2}}} \mathrm{d}t = O(1)$。

定理 1 的证明 记

$$G(x) = \sum_{n \le x} \frac{b_n}{n} \ln n$$

和

$$f(t) = \frac{1}{\ln t}.$$

由**引理 3**，可得

$$\sum_{|P| \le x} \frac{1}{|P|} = \sum_{n \le x} \frac{b_n}{n} = \sum_{n \le x} \frac{b_n \cdot \ln n}{n \cdot \ln n} = \frac{G(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{G(t)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t. \tag{7}$$

由**命题 1**，我们有

$$G(x) = \sum_{n \le x} \frac{b_n}{n} \ln n = \sum_{|P| \le x} \frac{\ln |P|}{|P|} = \ln x + \gamma(x), \tag{8}$$

其中 $\gamma(x)$ 是有关 x 的有界函数，将(8)代入(7)中，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{|P| \le x} \frac{1}{|P|} &= \frac{\ln x + \gamma(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\ln t + \gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} + \int_2^x \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t \\ &= 1 + \ln \ln x - \ln \ln 2 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) + \int_2^x \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t \end{aligned}.$$

通过

$$\int_2^x \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t = \int_2^{\infty} \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t - \int_x^{\infty} \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t$$

和

$$\int_x^{\infty} \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t = O\left(\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}\right) = O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

我们得到

$$\sum_{|P| \le x} \frac{1}{|P|} = 1 + \ln \ln x - \ln \ln 2 + \int_2^{\infty} \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

最后，记

$$B_A = 1 - \ln \ln 2 + \int_2^{\infty} \frac{\gamma(x)}{t(\ln t)^2} \mathrm{d}t,$$

我们就完成了这个定理的证明。

4. 定理 2 的证明

首先，我们需要得到 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的 Mertens 第一定理，即证明下面这个命题。

命题 2. 下面估计式成立

(i)

$$\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{\ln|P|}{|P|}=\frac{\ln x}{2}+O(1).$$

(ii) 当 $k\ge 2$ 时，我们得到

$$\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{(\ln|P|)^k}{|P|}=\frac{1}{k}(\ln x)^k+O\left((\ln x)^{k-1}\right) \tag{9}$$

和

$$\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{(\ln|P|)^k}{|P|}=\frac{1}{k\cdot 2^k}(\ln x)^k+O\left(\frac{1}{2^{k-1}}(\ln x)^{k-1}\right). \tag{10}$$

证明 (i) 应用命题 1，用 $\sqrt{x}$ 代替 x，即可得到此结果。

(ii) 令

$$G(x)=\sum_{|P|\le x}\frac{\ln|P|}{|P|}=\sum_{n\le x}\frac{b_n\cdot\ln n}{n},$$

应用引理 3 和命题 1，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{|P|\le x}\frac{(\ln|P|)^k}{|P|}&=\sum_{n\le x}\frac{b_n(\ln n)^k}{n}=\sum_{n\le x}\frac{b_n\cdot\ln n}{n}\cdot(\ln n)^{k-1}\\&=(\ln x)^{k-1}G(x)-(k-1)\int_1^x\frac{(\ln t)^{k-2}}{t}\cdot G(t)\mathrm{d}t\\&=(\ln x)^{k-1}(\ln x+O(1))-(k-1)\int_1^x\frac{(\ln t)^{k-2}}{t}\cdot(\ln t+O(1))\mathrm{d}t\\&=(\ln x)^k+(\ln x)^{k-1}O(1)-(k-1)\int_1^x\frac{(\ln t)^{k-2}}{t}\cdot(\ln t+O(1))\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{k}(\ln x)^k+O\left((\ln x)^{k-1}\right)-(k-1)\int_1^x\frac{(\ln t)^{k-2}}{t}\cdot O(1)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{k}(\ln x)^k+O\left((\ln x)^{k-1}\right)\end{aligned}.$$

对于(ii)中的第二部分，我们用 $\sqrt{x}$ 代替(9)中的 x，即可得到(10)。

命题 3. 下面估计式成立

$$\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(1-\frac{\ln|P|}{\ln x}\right)=\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

证明 应用下面这个公式

$$\ln(1-u)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k}\left(|u|<1\right), \tag{11}$$

当 $x>1$ 时，我们得到

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{\ln x}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{k(\ln x)^k}\left(n\le\sqrt{x}\right)$$

和

$$\begin{aligned}\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(1-\frac{\ln|P|}{\ln x}\right)&=\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{b_n\ln\left(1-\frac{\ln n}{\ln x}\right)}{n}=-\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{b_n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{k(\ln x)^k}\\&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(\ln x)^k}\sum_{n\le\sqrt{x}}\frac{b_n(\ln n)^k}{n}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(\ln x)^k}\sum_{|p|\le\sqrt{x}}\frac{(\ln|p|)^k}{|p|}\end{aligned}.$$

由命题 2 (ii)，我们知道

$$\begin{aligned}\sum_{|p|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|p|}\ln\left(1-\frac{\ln|p|}{\ln x}\right)&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k\cdot 2^k}+\frac{1}{(\ln x)^k}O\left(\frac{1}{2^{k-1}}(\ln x)^{k-1}\right)\right)\\&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\cdot 2^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(\ln x)^k}O\left(\frac{1}{2^{k-1}}(\ln x)^{k-1}\right)\end{aligned},\tag{12}$$

再由符号 O 的性质，我们得到

$$\begin{aligned}&-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln x)^k}O\left(\frac{1}{2^{k-1}}(\ln x)^{k-1}\right)\\&=O\left(\frac{2}{\ln x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k}\right)=O\left(\frac{2}{\ln x}\sum_{k=2}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}t^{k-1}\mathrm{d}t\right)=O\left(\frac{2}{\ln x}\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{k=2}^{\infty}t^{k-1}\mathrm{d}t\right).\\&=O\left(\frac{2}{\ln x}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t\right)=O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\end{aligned}\tag{13}$$

由公式(11)，我们得到

$$\frac{\ln(1-u)}{u}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^{k-1}}{k},u\in\left(0,\frac{1}{2}\right],$$

显然，上式中的级数一致收敛，我们对该等式两边同时积分得

$$\int_{0+0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\cdot 2^k}.$$

通过引理 4 (ii)，我们得到

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\cdot 2^k}=\int_{0+0}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}.\tag{14}$$

特别地，把(13)和(14)代入(12)中，我们有

$$\sum_{|p|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|p|}\ln\left(1-\frac{\ln|p|}{\ln x}\right)=\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

定理 2 的证明 记

$$n_1=|P|=q^{\deg P},n_2=|Q|=q^{\deg Q},$$

在引理 2 中，取 $a,b=\sqrt{x}$，我们得到

$$\sum_{|P||Q|\le x}\frac{1}{|P||Q|}=\sum_{n_1n_2\le x}\frac{b_{n_1}b_{n_2}}{n_1n_2}=2\sum_{n_1\le\sqrt{x}}\frac{b_{n_1}}{n_1}F\left(\frac{x}{n_1}\right)-\left[F\left(\sqrt{x}\right)\right]^2$$
$$=2\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}F\left(\frac{x}{|P|}\right)-\left[F\left(\sqrt{x}\right)\right]^2,$$

其中

$$F(x)=\sum_{|P|\le x}\frac{1}{|P|}=\ln(\ln x)+B_A+C(x)$$

$$C(x)=O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

于是有

$$\left[F\left(\sqrt{x}\right)\right]^2=\left[\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right]^2$$
$$=\left[\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A\right]^2+2\left[\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A\right]O\left(\frac{1}{\ln x}\right)+O\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right)$$
$$=\left[\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A\right]^2+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)$$

和

$$\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}F\left(\frac{x}{|P|}\right)=\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\left[\ln\left(\ln\frac{x}{|P|}\right)+B_A+C\left(\frac{x}{|P|}\right)\right]$$
$$=\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(\ln\left(\frac{x}{|P|}\right)\right)+B_AF\left(\sqrt{x}\right)+\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}C\left(\frac{x}{|P|}\right).$$

由于

$$\frac{1}{(\ln x-\ln|P|)}\le\frac{2}{\ln x}\left(|P|\le\sqrt{x}\right),$$

我们得到

$$\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}C\left(\frac{x}{|P|}\right)=\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}O\left(\frac{1}{\ln\frac{x}{|P|}}\right)=\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}O\left(\frac{1}{\ln x-\ln|P|}\right).$$
$$=O\left(\frac{2}{\ln x}\right)\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}=O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)$$

于是有

$$\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}F\left(\frac{x}{|P|}\right)=\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(\ln\frac{x}{|P|}\right)+B_A\left(\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)$$
$$=\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(\ln\frac{x}{|P|}\right)+B_A\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A^2+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right).$$

再通过命题 3 和定理 1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(\ln\frac{x}{|P|}\right)=\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(\ln x-\ln|P|\right)\\
&=\ln(\ln x)\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}+\sum_{|P|\le\sqrt{x}}\frac{1}{|P|}\ln\left(1-\frac{\ln|P|}{\ln x}\right)\\
&=\ln(\ln x)\left(\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\\
&=\left(\ln(\ln x)\right)\left(\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A\right)+\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{\pi^2}{12}+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)
\end{aligned}. \tag{15}$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{|P||Q|\le x}\frac{1}{|P||Q|}&=2\left(\ln(\ln x)\right)\left(\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)+B_A\right)+\ln^2 2-\frac{\pi^2}{6}\\
&\quad-\left(\ln\left(\ln\sqrt{x}\right)\right)^2+B_A^2+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\\
&=2\ln(\ln x)\left(\ln(\ln x)-\ln 2\right)-\left(\ln(\ln x)-\ln 2\right)^2\\
&\quad+2\ln(\ln x)B_A+B_A^2+\ln^2 2-\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\\
&=\left(\ln(\ln x)\right)^2+2\ln(\ln x)B_A+B_A^2-\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\\
&=\left(\ln(\ln x)+B_A\right)^2-\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)
\end{aligned}.$$

这就完成了定理 2 的证明。

参考文献

[1] Rosen, M. (1999) A Generation of Mertens' Theorem. *Journal of the Ramanujan Mathematical Society*, **14**, 1-19.

[2] Apostol, T.M. (2013) Introduction to Analytic Number Theory. Springer Science & Business Media, New York.

[3] Everest, G. and Ward, T. (2006) An Introduction to Number Theory. Springer Science & Business Media, New York.

[4] 潘承彪, 潘承洞. 素数定理的初等证明[M]. 第二版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2017.

[5] Popa, D. (2014) A Double Mertens Type Evaluation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **409**, 1159-1163. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.058

[6] Knopfmacher, J. (1979) Analytic Arithmetic of Algebraic Function Fields. Marcel Dekker Incorporated, New York.

[7] 潘承洞, 于秀源. 阶的估计基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[8] Rosen, M. (2013) Number Theory in Function Fields. Springer Science & Business Media, New York.

[9] Bănescu, M. and Popa, D. (2018) A Multiple Abel Summation Formula and Asymptotic Evaluations for Multiple Sums. *International Journal of Number Theory*, **14**, 1197-1210. https://doi.org/10.1142/S1793042118500732

[10] Lewin, L. (1981) Polylogarithms and Associated Functions. North Holland, New York.