Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 330-338
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104042

Hans汉斯

Existence of Ground States Solution of Nonlinear Schrödinger-Kirchhoff-Type Equation

Weidan Li, Gongming Wei

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: doralll@163.com, gmweixy@163.com

Received: Mar. 24th, 2020; accepted: Apr. 13th, 2020; published: Apr. 20th, 2020

Abstract

In this paper, by using the method of Nehari manifold and Lions lemma, the solutions of nonlinear Schrödinger-Kirchhoff-type equations are transformed into the critical points of the corresponding energy functional, combined with the mountain pass lemma to prove the existence of ground state solution of this kind of equations under certain conditions.

Keywords

Nonlinear Schrödinger-Kirchhoff-Type Equation, Lions Lemma, Nehari Manifold, Ground State Solution, Fatou Lemma

非线性Schrödinger-Kirchhoff型方程基态解的存在性

李伟丹，魏公明

上海理工大学理学院，上海
Email: doralll@163.com, gmweixy@163.com

收稿日期：2020年3月24日；录用日期：2020年4月13日；发布日期：2020年4月20日

摘　要

本文利用Nehari流形的方法和Lions引理，将非线性Schrödinger-Kirchhoff型方程的基态转化为相应能量函的临界点，结合山路引理，证明了该类方程在一定条件下基态解的存在性。

文章引用: 李伟丹, 魏公明. 非线性 Schrödinger-Kirchhoff 型方程基态解的存在性[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 330-338.
DOI: 10.12677/pm.2020.104042

关键词

非线性Schrödinger-Kirchhoff型方程，Lions引理，Nehari流形，基态解，Fatou引理

1. 引言

本文主要讨论如下非线性 Schrödiger-Kirchhoff 型方程

$$-\left(a+b\int_{R^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=b(x)f(u),x\in R^N \tag{0.1}$$

其中 $x\in R^N,u\in H^1\left(R^N\right),a>0,b\geq 0$，在一些可解性条件下的基态解的存在性。当 $V(x)\equiv 0$ 时，

$$-\left(a+b\int_{R^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u),x\in R^N \tag{0.2}$$

称为 Kirchhoff 型方程，该模型来源于物理学中描述弹性绳横向振动的长度变化的公式，即经典的 D'Alembert 波动方程

$$u_{tt}-\left(a+b\int_{R^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u=g(x,u) \tag{0.3}$$

的行波解，其中 u 表示位移，$g(x,u)$ 表示外力，b 表示初始张力，a 表示绳子本身的性质，该式子还广泛应用于生物学中，此时 u 表示人口密度平均数的排列等[1] [2]。

近年来，许多学者开始考虑该模型在不同可解性条件下解的存在性、非平凡解、径向和非径向解以及多解性问题，例如文献[3]作者利用传播和衍射条件讨论了解的存在性和非存在性。Perera 和张志涛在文献[4]中用 Yang 指数和临界群来讨论非平凡解的存在性。毛安民和张志涛在文献[5]中通过下降流的变形方法得到多解和变号解。贺晓明和邹文明在文献[6] [7]中通过局部极大极小值和喷泉定理得到无穷多解。在文献[8]中作者利用局部环绕定理得到解的存在性和多解性。此后，吴鲜等在文献[9] [10]中利用山路引理得到高能量解。在文献[11]中作者讨论临界和次临界条件下的非平凡解的存在性。在文献[12]中作者研究了变号基态解。在文献[13]中作者考虑了如下模型

$$-\left(a+b\int_{R^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(u),x\in R^N. \tag{0.4}$$

当 $V(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}V(x)=V_\infty<\infty$ 时基态解的存在性，受到(0.4)的启发本文将用 Nehari 流形的方法处理带有更一般的非线性项的方程(0.1)。

2. 预备知识

本文方程(0.1)中，记 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，$a>0,b\geq 0$，$F(0)=0$。

(V) $V(x)\in C\left(R^N\right), 0<\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)\le V_\infty<+\infty$。

(B) $b(x)\in L^\infty\left(R^N\right), \lim\limits_{|x|\to\infty}b(x):=b_\infty>0, b(x)\ge b_\infty$，且 $b(x)$ 不恒等于 b_∞。

(F1) 存在 ε，$C_\varepsilon>0$，使得对任意 $u\in R$，$f(u)$ 满足

$$\left|f(u)\right|\le\varepsilon+C_\varepsilon|u|^{p-1}, 4<p<6.$$

(F2) 当 $|u|\to 0$ 时，有 $f(u)=o(|u|)$。

(F3) 对任意的 $u\in R, u\ne 0$，有 $\frac{1}{4}f(u)u-F(u)\ge\frac{t^4}{4}f(tu)u-F(tu)$。

(F4) 对任意 $u\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$u\mapsto\frac{f(u)}{|u|^3}$ 是严格单调递增的。

本文主要结果如下：

定理 1 若条件(V)，(B)，(F1)-(F4)成立，则方程(0.1)有非平凡的基态解，即存在 $u\ne 0$ 是 I 的临界点，使得 $c=\inf\limits_N I$。

为书写的简便，我们将使用如下记号：

$X=\left\{u\in H^1\left(R^N\right)\middle|\int_{R^N}\left[a|\nabla u|^2+V(x)u^2\right]\mathrm{d}x<+\infty\right\}$，其中 $H^1\left(R^N\right)=\left\{u\in L^2\left(R^N\right),\nabla u\in L^2\left(R^N\right)\right\}$。表示 Hilbert 空间，$X$ 空间对应的内积为 $\langle u,v\rangle=\langle u,u\rangle_X=\int_{R^N}\left[a\nabla u\nabla v+V(x)uv\right]\mathrm{d}x$，范数为 $\|u\|^2=\|u\|_X^2=\langle u,u\rangle$。

$L^p\left(R^N\right)$ 表示为 R^N 上 p 次可积函数空间，对应的范数表示为 $\|u\|_p=\left(\int_{R^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, 1\le p<\infty$。

方程(0.1)对应的泛函 $I:X\to R$

$$I(u)=\frac{a}{2}\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{R^N}V(x)u^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}b(x)F(u)\mathrm{d}x, u\in X.$$

若对问题(0.1)的任意非平凡解 w 有 $I(u)\le I(w)$，则问题(0.1)的弱解即为基态解。

定义 Nehari 流形为

$$N=\left\{u\in X\setminus\{0\}, I'(u)(u)=0\right\}.$$

泛函的微分形式为

$$I'(u)(\varphi)=a\int_{R^N}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+b\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{R^N}\nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{R^N}V(x)u\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^N}b(x)f(u)\varphi\mathrm{d}x.$$

若 $\hat{u}$ 满足 $I(\hat{u})=\min\left\{I(u):u\in X\setminus\{0\}, I'(u)=0\right\}$，那么 $\hat{u}$ 记为(0.1)的基态解。

定义如下形式的辅助泛函：

$$I_\infty(u)=\frac{a}{2}\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\int_{R^N}V_\infty u^2\mathrm{d}x-\int_{R^N}b_\infty f(u)\mathrm{d}x, u\in X.$$

同理定义流形 N_∞

$$N_\infty=\left\{u\in X\setminus\{0\}, I'_\infty(u)(u)=0\right\}.$$

定义

$$c_N=\inf_N I(u),\quad c_{N_\infty}=\inf_{N_\infty}I_\infty(u)$$

$$c_1=\inf_{u\in X\setminus\{0\}}\max_{t\ge 0}I(tu),\quad c_{1_\infty}=\inf_{u\in X\setminus\{0\}}\max_{t\ge 0}I_\infty(tu)$$

$$c=\inf_{\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),\quad c_\infty=\inf_{\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t)).$$

其中

$$\Gamma=\left\{\gamma\in C([0,1],X),\gamma(0)=0,I(\gamma(1))<0\right\}.$$

$$\Gamma_\infty=\left\{\gamma\in C([0,1],X),\gamma(0)=0,I_\infty(\gamma(1))<0\right\}.$$

引理 1 假设满足条件(V)，(B)，(F1)，(F2)，(F4)，存在$\delta>0$，有$B_\delta=\{u\in X,\|u\|<\delta\}$，则对任意$u\in\partial B_\delta$有$I>0$。

证明：对任意的，$0<\varepsilon<\dfrac{\min\{a,1\}}{C_2'^2},u\in R$ (其中C_2'由$\|u\|_2\le C_2'\|u\|$，$2\le p\le 2^*$，任意$u\in X$ 给出)，由(F1) (F2)可知，存在常数$A_0,B>0$，使得

$$\left|F(u)\right|\le B\left(|u|^2+|u|^p\right). \tag{1.1}$$

和

$$\left|f(u)\right|\le A_0\left(|u|+|u|^{p-1}\right). \tag{1.2}$$

且(F4)意味着$p>4$，因此存在常数，对充分小的$\delta>0$，

$$\begin{aligned} I(u)&\ge\frac{1}{2}\min\{a,1\}\|u\|^2-\left(\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2+\frac{C_\varepsilon}{p}\|u\|_p^p\right)\\ &\ge\frac{1}{2}\left(\min\{a,1\}-\varepsilon C_2'^2\right)\|u\|^2-C_\varepsilon C_p'^p\|u\|^p.\\ &\ge\frac{1}{4}\left(\min\{a,1\}-\varepsilon C_2'^2\right)\|u\|^2\end{aligned}$$

对所有的$u\in B_\delta$，其中$B_\delta=\{u\in X,\|u\|\le\delta\}$，因此，$I_{\partial B_\delta}\ge\dfrac{1}{4}\left(\min\{a,1\}-\varepsilon C_2'^2\right)\delta^2>0$。 □

类似于文献[14]，引入同胚映射$g:M\to N$和泛函$\varphi:M\to R$，定义如下

$$g(u):=\bar{t}(u),\quad \varphi(u)=I(g(u)).$$

其中$M=\{u\in X:\|u\|=1\}$。

引理 2 (a) ([15]引理 2.3)假设满足条件(V) (B) (F1)~(F4)，对任意的$u\in X\setminus\{0\}$，使得$g_u(t)=I(tu)$，若存在$\bar{t}$使得当$0<t<\bar{t}$时，有$g_u'(t)>0$，当$t>\bar{t}$时，有$g_u'(t)<0$。

(b) 假设满足条件(F2)和(F4)，在X中有u_n弱收敛到u，且$u\ne0$，则对任意的数列$\{t_n\}$，当$n\to\infty$时，$|t_n|\to\infty$，有$\int_{R^N}\dfrac{F(t_nu_n)}{|t_n|^4}dx\to\infty$，那么有$I(t_nu_n)\to-\infty$。

定理 2 假设满足条件(V)，(B)，(F1)-(F4)，则有$c=c_1=c_N$，其中c为I的临界值。

证明：1) 由假设可知，对任意$u\in X\setminus\{0\}$，存在唯一$t(u)>0$，使得$t(u)u\in N$。当$t\ge0$时，可在$t=t(u)$处得到$I(tu)$的最大值

$$\begin{aligned}&t:X\setminus\{0\}\to[0,\infty)\\ &u\mapsto t(u)\end{aligned}.$$

t是连续的，且$u\mapsto t(u)u$是X中单位球面的同胚映射，对(F4)进行积分可知存在常数$C_0>0$，使得

$$\left|F(u)\right| \ge C_0\left(|u|^4-1\right)$$

取适当的$u\in X\setminus\{0\}$，令$g(t)=I(tu),t\in[0,\infty)$，

$$g'(t)=0 \Leftrightarrow u\in N$$

$$\Leftrightarrow \|u\|^2=-t^2\|u\|_2^4+\int_{R^N}\frac{b(x)f(tu)u}{t}\mathrm{d}x.$$

则由引理2知，存在唯一$t=t(u)$，使得$g'(t(u))=0$，且有$t(u)u\in N$，为了证明$t(u)$的连续性，假设存在序列$u_n\to u,u\in X\setminus\{0\}$，容易得到$\{t(u_n)\}$是有界的，若存在$\{t(u_n)\}$的子列收敛到$t_0,(t_0=t(u))$，则$t(u_n)\to t(u)$，再由$X$的单位元到$N$中的连续映射$u\mapsto t(u)u$是反向的拉回映射$u\mapsto \frac{u}{\|u\|}$，即可得到

$$c_N=\inf_N I(u)=\inf_{X\setminus\{0\}}\max_{t\ge 0}I(tu)=c_1.$$

因为对于$u\in X\setminus\{0\},t\to+\infty$时，$I(tu)\to-\infty$，可以得到$c_1\ge c$，流形$N$将$X$分为两个部分，由(F1)和(F2)可知包含原点的分量也包含了原点的邻域，且$u\in X,I(tu)\ge 0$，因为$\langle I'(tu),u\rangle>0$，对于$0\le t\le t(u)$，因而，对于每一个$\gamma\in\Gamma$穿过$N$且$c_N\le c$。

为了证明c是I的临界点，即证I满足PS条件即可[16]，$\Gamma_0=\{\gamma_0:[0,1]\to X,\gamma_0(0)=0,I(\gamma_0(1))<0\}$，有(F1)和(F2)存在$r>0$，使得

$$\min_{\|u\|<r}I(u)=0,\inf_{\|u\|=r}I(u)>0.$$

可以得到

$$c\ge\inf_{\|u\|=r}I(u)>0=\sup_{\gamma_0\in\Gamma_0}\sup_{u\in M_0}I(\gamma_0(u)).$$

由引理可知I满足PS条件。 □

命题 假设满足条件(V)，(B)，(F1)~(F4)，那么有以下结论成立：

(a) I'是弱下半连续的；

(b) 若$\{w_n\}$是φ的PS序列，则$\{g(w_n)\}$是I的PS序列；

(c) 若w是φ的临界点，当且仅当$g(w)$是I的非平凡临界点。

引理3 假设满足条件(V)，(B)，(F1)~(F4)，则方程(0.1)的极限形式存在非平凡解。

证明：首先证明(0.1)的极限方程的基态解[17]，等价于泛函I_∞限制在流形N_∞上的极小值问题，那么由假设$F(0)=0$知，$u=0$是一个局部严格极小值点，$I_\infty(0)=0$，假设$\{v_n\}\in M$为φ_∞的极小化序列，应用Ekland变分原理[17]知，假设$\varphi_\infty'\to 0$，由命题(b)知若$\{v_n\}$是φ_∞的PS序列，则$\{g_\infty(v_n)\}$是I_∞的PS序列，那么$I_\infty'\to 0$，其中$u_n=g_\infty(v_n)\in N_\infty$，同样的由命题(c)(用$I_\infty$替换$I$结论仍然成立)知若$v$是$\varphi_\infty$的临界点，当且仅当$g_\infty(v)$是$I_\infty$的非平凡临界点，其中$u=g_\infty(v)$，即$I_\infty(u)=I_\infty(g_\infty(v))=\varphi_\infty(v)$，则$\inf_M\varphi_\infty=c_\infty$。

先证$\{u_n\}$在X中是有界的，若不然，可设当$n\to\infty$时，$\|u_n\|\to\infty$，令$w_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$，则存在$\{w_n\}$的子列，仍将其记为$\{w_n\}$，那么在X中有w_n弱收敛于w，在$L_{loc}^p(R^N),2\le p<6$中有w_n收敛于w，对任意的$x\in R^N$，有$w_n(x)$几乎处处收敛到$w(x)$，由Sobolev嵌入定理可知$\{w_n\}$在$L_{loc}^p(R^N)$上是有界的，即

$\int_{R^N}|w_n|^p \mathrm{d}x<+\infty$，不是一般性，我们可以假设$\|w\|_p \to T_1 \in[0,+\infty)$，

(i) 若$T_1=0$，由条件(F1)和(F2)知，对任意的$\varepsilon>0, C_\varepsilon>0, t>0, t_2>0, t_p>0$，

$$\left|F(w_n)\right| \leq \varepsilon|w_n|^2+C_\varepsilon|w_n|^p . \tag{1.3}$$

$$\left|\int_{R^N} F(t w_n) \mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon t_2^2\|w_n\|^2+C_\varepsilon t_p^p\|w_n\|^p . \tag{1.4}$$

因为$T_1=0$，即$\|w_n\|_p \to 0$，又序列$\{w_n\}$在$L_{loc}^p(R^N), 2 \leq p<6$上是有界的，则存在$C>0$，当$n \to \infty$，有

$$\left|\int_{R^N} F(t w_n) \mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon C . \tag{1.5}$$

因此，对任意的$t>0$，$\int_{R^N} F(t w_n) \mathrm{d}x \to 0$，再由范数的等价性可知，对任意的$t, \alpha>0$，当$n \to \infty$时，$I_\infty'(w_n)(w_n) \to 0$，可以得到

$$\begin{aligned} c_\infty+\circ(1)=I_\infty(w_n) \geq I_\infty(t w_n) & \geq \frac{\alpha t^2}{2}\|w_n\|^2+\frac{b t^4}{4}\|w_n\|_2^4-\int_{R^N} b_\infty F(t w_n) \mathrm{d}x \\ & \geq \frac{\alpha t^2}{2}\|w_n\|^2-\int_{R^N} b_\infty F(t w_n) \mathrm{d}x \to \frac{\alpha t^2}{2}\end{aligned} \tag{1.6}$$

矛盾(可取$t>\frac{2 c_\infty}{\alpha}$)。

(ii) 若$T_1 \neq 0$，即在$L_{loc}^p(R^N)$中，有w_n不收敛于0，由Lions紧性引理[18]可知，存在$y_n \in R^N$，使得

$$\int_{B(y_n, 1)}|w_n|^2 \mathrm{d}x>0 . \tag{1.7}$$

再有泛函I_∞和流形N_∞的平移不变性可知$w_n \mapsto w_n(\cdot-k), k \in Z^N$是不变的，不妨设$\{y_n\}$是有界的，若不然将$w_n$平移可以得到。由假设在$L_{loc}^p(R^N)$中有$w_n$收敛于$w$，那么式子(1.7)意味着$w \neq 0$，由引理2(b)和Fatou引理得

$$\int_{R^N} \frac{F(t_n u_n)}{\|t_n u_n\|^4} \mathrm{d}x=\int_{R^N} \frac{F(t_n u_n)}{|t_n u_n|^4}\|t_n w_n\| \mathrm{d}x \to+\infty . \tag{1.8}$$

可得$I_\infty(t_n u_n) \to-\infty$，与命题(b) $I_\infty \geq 0$矛盾，则$\{u_n\}$在X中是有界的，那么我们可以其找到子列仍记为$\{u_n\}$，那么在X中有u_n弱收敛于u_0，在$L_{loc}^p(R^N), 2 \leq p<6$中有$u_n$收敛于$u_0$，对任意的$x \in R^N$，有$u_n(x)$几乎处处收敛到$u_0(x)$，在由命题(a) I_∞'是弱序列连续的可知$I_\infty'(u_0)=0$ (即$\because u_n \xrightarrow{w} u, \therefore I_\infty'(u_n) \xrightarrow{w} I_\infty'(u)$)。

其次，我们将证明$u_0 \neq 0$。

类似于前面的证明我们假设$\|u_n\| \to T_2 \in[0,+\infty)$，若$T_2=0$，由条件(F1)和(F2)得

$$\left|f(u_n)\right| \leq \varepsilon|u_n|+C_\varepsilon|u_n|^{p-1} . \tag{1.9}$$

类似(i)的证明有

$$\int_{R^N} f(u_n) u_n \mathrm{d}x \to 0 . \tag{1.10}$$

因此

$$\circ(1)=I_\infty'(u_n) \geq \alpha\|u_n\|^2+b\|u_n\|_2^4-\int_{R^N} b_\infty f(u_n) u_n \mathrm{d}x=\alpha\|u_n\|^2+\circ(1) \tag{1.11}$$

意味着$u_n \to 0$，与$\|u\| \geq \rho>0$和$u_n \in N_\infty$矛盾，则可得$T_2 \neq 0$，即在$L_{loc}^p(R^N)$中有u_n不收敛于0，根据Lions

紧性引理可知存在 $y_n \in Z^N$，使得

$$\int_{B(y_n,1)} |u_n|^2 \mathrm{d}x > 0. \tag{1.12}$$

因为在 $L^p_{loc}(R^N), 2 \le p < 6$ 中有 $u_n \to u_0$，则由(1.12)可知 $u_0 \ne 0$，又因为 $I'_\infty(u_0) = 0$，所以 $u_0 \in N_\infty$，再由 c_∞ 的定义知

$$c_\infty \le I_\infty(u_0). \tag{1.13}$$

结合 Fatou 引理

$$c_\infty + \circ(1) = I_\infty(u_n) - \frac{1}{4} I'_\infty(u_n)(u_n) + \circ(1) \ge I_\infty(u_0) + \circ(1). \tag{1.14}$$

结合(1.13)和(1.14)可得 $I_\infty(u_0) = c_\infty$，因此得到 u_0 是(0.1)极限形式的一个弱解。

3. 主要定理的证明

定理 1 的证明：

类似于引理 3 的证明，设 $u_n \in N$ 满足 $I(u_n) \to c$，且 $I'(u_n) \to 0$，假设 $\{u_n\}$ 在 X 中是有界的，若不然，令 $z_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$，则可以假设在 X 中有 z_n 弱收敛到 z，在 $L^p_{loc}(R^N)$ 中有 z_n 收敛到 z，对任意的 $x \in R^N$ 有 $z_n(x)$ 几乎处处收敛到 $z(x)$。因此，存在序列 $\{y_n\} \in R^N$，使得

$$\int_{B(y_n,1)} |z_n|^2 \mathrm{d}x > 0. \tag{2.1}$$

否则，由 Lions 紧性引理可得 $\|z_n\| \to 0$，则由(1.5)知，对任意的 $t > 0$，有

$$\int_{R^N} F(tz_n) \mathrm{d}x \to 0. \tag{2.2}$$

由 $I'(u_n) \to 0$，我们可以得到

$$c = \lim_{n\to\infty} I(z_n) \ge \lim_{n\to\infty} I(tz_n) \ge \frac{\alpha t^2}{2} \tag{2.3}$$

矛盾，那么(2.1)成立，接下来不妨设 $\{y_n\} \in Z^N$，不妨设 $\{y_n\}$ 是有界的。由假设在 $L^p_{loc}(R^N), 2 \le p < 6$ 中有 z_n 收敛于 z，那么 $z \ne 0$，由引理 2(b)和 Fatou 引理得 $I(t_n z_n) \to -\infty$，与命题(b) $I \ge 0$ 矛盾，则 $\{y_n\}$ 是无界的，可假设 $|y_n| \to \infty$，令 $\tilde{z}(y) = z(y + y_n)$，由于 $\|\tilde{z}_n\| = \|z_n\| = 1$，因此存在 $\tilde{Z}$，使得在 X 中有 $\tilde{z}_n$ 弱收敛到 $\tilde{z}$，在 $L^p_{loc}(R^N)$ 中有 $\tilde{z}_n$ 收敛到 $\tilde{z}$，且对任意的 $x \in R^N$ 有 $\tilde{z}_n(x)$ 几乎处处收敛到 $\tilde{z}(x)$，由(2.1)知

$$\int_{B(0,1)} |\tilde{z}_n|^2 \mathrm{d}x > 0. \tag{2.4}$$

那么有 $\tilde{z} \ne 0$，结合(F2)和(F4)，存在 $\rho > 0$ 对任意的 $\|u\| \ge \rho$，有

$$o \le \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^4} \le \beta - \int_{R^N} b(x) \frac{F(t_n z_n)}{|t_n|^4} = \beta - \infty \to -\infty. \tag{2.5}$$

得到矛盾。

综上可得 $\{u_n\}$ 在 X 上是有界的，则我们可以假设存在 u 使得在 X 中有 u_n 弱收敛到 u，在 $L^p_{loc}(R^N), 2 \le p < 6$ 中有 u_n 收敛到 u，且对任意的 $x \in R^N$ 有 $u_n(x)$ 几乎处处收敛到 $u(x)$，结合(F1)和(F2)

可得 $I'(u)=0$。

下证 $u\neq 0$。有 $\{u_n\}$ 在 X 中是有界的，则有 $\{r_n\}\in R^N$ 使得

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{B(r_n,1)}|u_n|^2\mathrm{d}x>0. \tag{2.6}$$

否则，由 Lions 紧性引理可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_{B(r_n,1)}|u_n|^2\mathrm{d}x\to 0. \tag{2.7}$$

那么 $\{r_n\}$ 是有界的，若不然可找到 $\{r_n\}$ 的无界子列，仍记为 $\{r_n\}$，且 $|r_n|\to\infty$，令 $\tilde{u}_n=u(\cdot+r_n)$，同样地，在 X 中有 $\tilde{u}_n$ 弱收敛到 $\tilde{u}$，在 $L^p_{loc}(R^N),2\le p<6$ 中有 $\tilde{u}_n$ 收敛到 $\tilde{u}$，且对任意的 $x\in R^N$ 有 $\tilde{u}_n(x)$ 几乎处处收敛到 $\tilde{u}(x)$，由(2.6)可知

$$\int_{B(0,1)}|u_n|^2\mathrm{d}x>0.$$

$\tilde{u}\neq 0$，结合 $I'(u_n)\to 0$ 和 $|r_n|\to\infty$，则 $I'_\infty(\tilde{u}_n)\xrightarrow{w}0$，由命题(a) I'_∞ 是弱序列连续的，可以得到，$I'_\infty(\tilde{u})=0$，则 $\tilde{u}\in N_\infty$。同理，由条件 F (3)和 Fatou 引理可得

$$c+\circ(1)=I(u)\ge I_\infty(\tilde{u})=c_\infty+\circ(1).$$

矛盾。故可得 $\{r_n\}$ 是有界的，不妨设 $|r_n|\le\delta$，由(2.6)知

$$\int_{B(0,\delta+1)}|u_n|^2\mathrm{d}x>0.$$

又由于在 $L^p_{loc}(R^N),2\le p<6$ 中有 u_n 收敛于 u，则 $u\neq 0$，且 $I'(u)=0$，故有 $u\in N$，因此 $I(u)\ge c$，结合条件 F (3)和 Fatou 引理得

$$c=\lim_{n\to\infty}I(u_n)=\lim_{n\to\infty}\left(I(u_n)-\frac{1}{4}I'(u_n)(u_n)\right)\ge I(u).$$

综上可得 $I(u)=c$，故 u 是方程(0.1)的基态解。 □

参考文献

[1] Brezis, H. and Nirenberg, L. (1991) Remarks on Finding Critical Points. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **44**, 939-963. https://doi.org/10.1002/cpa.3160440808

[2] Kirchhoff, G. (1883) Mechanik. Teubner, Leipzig.

[3] Ma, T.F. and Munoz Rivera, J.E. (2003) Positive Solutions for a Nonlinear Elliptic Transmission Problem. *Applied Mathematics Letters*, **16**, 243-248. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(03)80038-1

[4] Perera, K. and Zhang, Z. (2006) Nontrivial Solutions of Kirchhoff-Type Problems via the Yang Index. *Differential Equations*, **221**, 246-255. https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.03.006

[5] Mao, A. and Zhang, Z. (2009) Sign-Changing and Multiple Solutions of Kirchhoff Type Problems without the P.S. Condition. *Nonlinear Analysis*, **70**, 1275-1287. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.02.011

[6] He, X. and Zou, W. (2010) Multiplicity of Solutions for a Class of Kirchhoff Type Problems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **26**, 387-394. https://doi.org/10.1007/s10255-010-0005-2

[7] He, X. and Zou, W. (2009) Infinitely Many Positive Solutions for Kirchhoff-Type Problems. *Nonlinear Analysis*, **70**, 1407-1414. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.02.021

[8] Wu, Y. and Liu, S.B. (2015) Existence and Multiplicity of Solutions for Asymptotically Linear Schrodinger-Kirchhoff Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **26**, 191-198. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2015.05.010

[9] Wu, X. (2011) Existence of Nontrivial Solutions and High Energy Solutions for Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations in R^N. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **12**, 1278-1287. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.09.023

[10] Li, Q.Q. and Wu, X. (2014) A New Results on High Energy Solutions for Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations in R^n. *Applied Mathematics Letters*, **30**, 24-27. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.12.002

[11] Li, Q.Q., Wu, X. and Teng, K.M. (2018) Existence of Nontrivial Solutions for Schrödinger-Kirchhoff Type Equations with Critical or Supercritical Growth. *Mathematical Method in the Applied Sciences*, **41**, 1136-1144. https://doi.org/10.1002/mma.4652

[12] Wang, L. and Zhang, L.B. (2018) Cheng Kun Ground State Sign-Changing Solutions for the Schrödinger-Kirchhoff Equation in R^3. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **466**, 1545-1569. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.06.071

[13] Guo, Z.J. (2015) Ground States for Kirchhoff Equations without Compact Condition. *Journal of Differential Equations*, **259**, 2884-2902. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.04.005

[14] 段雪亮, 魏公明. 分数阶非线性 Schrödinger 方程组非平凡基态解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56(3): 33-40.

[15] 张福保, 张慧, 徐君祥. R^n 上耦合的非线性 Schrödinger 方程的正基态解[J]. 中国科学(数学), 2013, 43(1): 33-43.

[16] Lions, P.L. (1984) The Concentration Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, Part 2. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **1**, 223-283. https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30422-X

[17] Struwe, M. (1990) Variational Method. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02624-3

[18] Willem, M. (1996) Minimax Theorem. Birkhäuser, Boston, MA, 39-41. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1