Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(5), 530-539
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.105065

Hans汉斯

On the Well-Posedness of the Quasi-Geostrophic Equation in the Besov-Herz Spaces

Yanxia Xu, Xiaoli Chen*

Department of Mathematics & Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: 157732840@qq.com, *2491248900@qq.com

Received: Apr. 22nd, 2020; accepted: May 14th, 2020; published: May 25th, 2020

Abstract

In this paper, using the Littlewood-Paley decomposition and commutator estimates, we establish the local well-posedness for the quasi-geostrophic equation without viscosity in Besov-Herz spaces, which improves the results in [1] and [4].

Keywords

Local Well-Posedness, Besov-Herz Spaces, Quasi-Geostrophic Equation

准地转方程在Besov-Herz空间上的局部适定性

徐艳霞，陈晓莉*

江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: 157732840@qq.com, *2491248900@qq.com

收稿日期：2020年4月22日；录用日期：2020年5月14日；发布日期：2020年5月25日

摘 要

本文利用Littlewood-Paley分解和交换子估计，建立了无粘准地转方程在Besov-Herz空间上的局部适定性，推广了[1]和[4]的结果。

*通讯作者。

文章引用: 徐艳霞, 陈晓莉. 准地转方程在 Besov-Herz 空间上的局部适定性[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 530-539.
DOI: 10.12677/pm.2020.105065

关键词

局部适定性，Besov-Herz空间，准地转方程

1. 引言

本文研究带有非线性项的热方程

$$\begin{cases}\partial_t\theta-\kappa\Delta\theta=-u\cdot\nabla\theta,(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T),\\ \mathrm{div}u=0,\\ \theta(0,x)=\theta_0(x),x\in\mathbb{R}^2,\end{cases}\tag{1.1}$$

即标准的准地转(quasi-geostrophic)方程，其中 $\kappa>0$ 是粘性系数，$\theta(t,x)$ 是关于 t 和 x 的实值函数。函数 θ 表示位势温度，流速 u 与流函数 Ψ 和 θ 的关系如下

$$u=\left(-\partial_{x_2}\Psi,\partial_{x_1}\Psi\right),\quad (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\Psi=-\theta.\tag{1.2}$$

分数阶 Laplace $(-\Delta)^{-\alpha}$ 按 Fourier 定义为 $\widehat{(-\Delta)^{\alpha}f}(\xi)=|\xi|^{2\alpha}\hat{f}(\xi)$，这里 $\hat{f}(\xi)$ 表示 f 的 Fourier 变换。关于第 j 个分量的 Riesz 变换 $\mathcal{R}_j$，其 Fourier 变换 $\widehat{\mathcal{R}_jf}(\xi)=-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi),j=1,\cdots,N$，其中 N 表示空间维数。因此利用 Riesz 变换的定义，可将(1.2)式改写成

$$u=\left(\partial_{x_2}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta,\partial_{x_1}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta\right)=\left(-\mathcal{R}_2\theta,\mathcal{R}_1\theta\right).$$

除了本身有地球流体力学的相关背景外，二维准地转方程可以看成是三维 Navier-Stokes 方程在二维空间的模型。Constantin，Majda 和 Tabak 在文献[1]首先研究了方程(1.1)的无粘情形。他们建立了方程(1.1)在 Sobolev 空间中的局部适定性和爆破判别准则。此后，准地转方程在各种函数空间上的适定性和爆破准则得以建立。例如 Wu [2]得到了准地转方程在 Morrey 空间中的适定性和爆破判别准则；Chae [3]在 Triebel-Lizorkin 中建立相似的结论；Wang 和 Jia [4]将文[1]中结果推广到 Besov 空间，Xu 和 Tan [5]进一步将他们推广到 Besov-Morrey 空间。

为了得到一类 Lipschitz 函数做 Fourier 变换后的像函数的 Bernsttein 型定理，Herz 在[6]中引入 Herz 空间 $K_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$，它在调和分析的算子理论上有重要的作用。下面给出 Herz 空间和 Besov-Herz 空间的定义。

定义 1.1 [6] 对整数 $k,k\geq-1$，A_k 定义如下

$$A_{-1}=B\left(0,\frac{1}{2}\right),A_k=\left\{x\in R^N:2^{k-1}\leq|x|<2^k\right\},k\geq0,$$

其中 $B(x_0,r)=\left\{x\in\mathbb{R}^N:|x-x_0|<r\right\}$。设 $1\leq p,q\leq\infty,\alpha\in\mathbb{R}$。Herz 空间 $K_{p,q}^{\alpha}=K_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$K_{p,q}^{\alpha}:=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k\geq -1}2^{k\alpha q}\|f\|_{L^p(A_k)}^q\right)^{\frac{1}{q}},q<\infty,\\ \sup\limits_{k\geq -1}2^{k\alpha}\|f\|_{L^p(A_k)},q=\infty^{\frac{1}{q}}.\end{cases}$$

定义 1.2 [7] 假设 $1\leq p,q,r\leq\infty,\alpha,s\in\mathbb{R}$。空间 $BK_{p,q,r}^{\alpha,s}=BK_{p,q,r}^{\alpha,s}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 定义为

$$BK_{p,q,r}^{\alpha,s}=\left\{f\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right):\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}:=\begin{cases}\left(\sum\limits_{j\geq -1}2^{jsr}\|\Delta_j f\|_{K_{p,q}^{\alpha}}^r\right)^{\frac{1}{r}},\text{若 } r<\infty,\\ \sup\limits_{j\geq -1}2^{js}\|\Delta_j f\|_{K_{p,q}^{\alpha}},\text{若 } r=\infty.\end{cases}$$

根据 Besov-Herz 空间的定义可知对任意 $s\in R,B_{p,r}^{s}\left(\mathbb{R}^N\right)\subset BK_{p,\infty,r}^{0,s}\left(\mathbb{R}^N\right)$，这里 $B_{p,r}^{s}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 就是标准的 Besov 空间。

这一节的主要目的是在 Besov-Herz 空间建立无粘准地转方程(1.1)的局部适定性。下面给出当 $\kappa=0$ 时准地转方程的局部适定性结果。

定理 1 假设 $\kappa=0,1\leq p<\infty,1\leq r,q\leq\infty,s\geq\frac{2}{p}+1,0\leq\alpha<2\left(1-\frac{1}{p}\right)$。若 $\theta_0\in BK_{p,q,r}^{\alpha,s}$，则存在时间 $T=T\left(\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\right)$ 使得方程(1.1)有一个唯一的解 $\theta\in C\left([0,T);BK_{p,q,r}^{\alpha,s}\right)$。

注 由于 $K_{p,p}^{0}\left(\mathbb{R}^n\right)=L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$，空间 $BK_{p,q,r}^{\alpha,s}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 包含经典的 Besov 空间。因此定理改进了文[1]和[4]中的局部适定性结论。

2. 预备知识和相关引理

首先给出 Fourier 变换和 Fourier 逆变换的定义。设 $f\in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$，其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi)=\mathcal{F}f(\xi)=\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

$f\in S'\left(\mathbb{R}^N\right)$，其 Fourier 逆变换为

$$\check{f}(x)=\mathcal{F}^{-1}f(x)=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

下面回顾一下 Littlewood-Paley 分解。假设 $\varphi\in S\left(\mathbb{R}^N\right)$ 满足

$0\leq\varphi\leq 1,\mathrm{supp}(\varphi)\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^N:\frac{3}{4}\leq|\xi|\leq\frac{8}{3}\right\}$ 且当 $\xi\neq 0$ 时 $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\varphi\left(2^{-j}\xi\right)=1$.

记

$$\varphi_j(\xi)=\varphi\left(2^{-j}\xi\right),\psi_j(\xi)=\sum_{k\leq j-1}\varphi_k(\xi),\psi_j(\xi)=\sum_{k\leq j-1}\varphi_k(\xi),$$

$$h(x)=\mathcal{F}^{-1}\varphi(x),g(x)=\mathcal{F}^{-1}\psi_0(x).$$

下面给出几个频率局部化算子

$$\dot{\Delta}_j f=\varphi_j(D)f=2^{Nj}\int h\left(2^j y\right)f(x-y)\mathrm{d}y$$

和

$$\dot{S}_j f = \sum_{k\le j-1} \dot{\Delta}_k f = \psi_j(D) f = 2^{Nj}\int_{\mathbb{R}^d} g(2^j y) f(x-y)\mathrm{d}y.$$

根据定义，可推得

$$\dot{\Delta}_j \dot{\Delta}_k f = 0, \text{若} |j-k| \ge 2,$$

$$\dot{\Delta}_j\left(\dot{S}_{k-1} f \dot{\Delta}_k f\right) = 0, \text{若} |j-k| \ge 5.$$

下面给出 Bony 仿积分解的定义

$$uv = \dot{T}_u v + \dot{T}_v u + R(u,v),$$

其中

$$\dot{T}_u v = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{S}_{j-1} u \dot{\Delta}_j v,\ \dot{R}(u,v) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j u \tilde{\dot{\Delta}}_j v,\ \tilde{\dot{\Delta}}_j v = \sum_{|j'-j|\le 1} \dot{\Delta}_{j'} v.$$

引理 2.1 设 $1\le p<\infty$，则有 $L^p(\mathbb{R}^N) \subset K^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^N)$。

下面几个引理在定理的证明过程中起到关键的作用(见[8]、[9])。

引理 2.2 [8] 设 $1<p<\infty, -\frac{N}{p}<\alpha<N\left(1-\frac{1}{p}\right)$。若 T 是在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 上有界的次线性算子且对任意具有紧支集的函数 f 满足

$$|Tf(x)| \le C\int_{R^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}\mathrm{d}y,\quad x\in \mathrm{supp} f.$$

则算子 T 一定在 Herz 空间 $K^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^N)$ 上有界。

显然算子 T 包含 Hardy-Littlewood 极大函数 M 和 Riesz 变换 $\mathcal{R}_j, j=1,\cdots,N$。

引理 2.3 [9] 设 φ 是 $\mathbb{R}^N$ 上可积函数，令 $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \epsilon>0$。假设 φ 的严格递减的最小径向控制函数 Ψ 是可积的，即

$$\Psi(x) = \sup_{|y|\ge|x|} |\varphi(y)| \text{且} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\mathrm{d}x = A<\infty.$$

则对任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^N), 1\le p\le\infty$，存在常数 $C>0$ 使得

$$\sup_{\epsilon>0} |(f*\varphi_\epsilon)(x)| \le CM(f)(x),$$

其中 M 为 Hardy-Littlewood 极大函数。

3. 主要引理的证明

证明定理 1.1 之前，先给出几个重要引理的证明。

引理 3.1 设 $1\le p<\infty, 1\le r,q\le\infty, \alpha\ge 0$ 以及 f 是一螺线向量场. 则当 $s\ge 0$ 时，有

$$\left\| 2^{ks} \left\| [f,\Delta_k]\cdot\nabla g \right\|_{K^\alpha_{p,q}(A^k)} \right\|_{l^r} \lesssim \|\nabla f\|_\infty \|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}} + \|\nabla g\|_\infty \|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}. \tag{3.1}$$

证明 根据 Einstein 关于哑指标 $i\in[1,N]$ 求和的习惯以及 Bony 仿积分解可得

$$\begin{aligned}[f,\Delta_k]\cdot\nabla g &= [f_i,\Delta_k]\partial_i g = f_i\Delta_k\partial_i g - \Delta_k(f_i\partial_i g)\\ &= [T_{f_i},\Delta_k]\partial_i g + T'_{\Delta_k\partial_i g} f_i - \Delta_k(T_{\partial_i g} f_i) - \Delta_k(R(f_i,\partial_i g))\\ &:= I + II + III + IV,\end{aligned}$$

其中 $T'_u v$ 表示 $T_u v+R(u,v)$。结合支集条件，分部积分和散度条件 $\operatorname{div} f=0$，可得

$$\begin{aligned}
|I| &= \left|\sum_{|k'-k|\le 4}\left[S_{k'-1}f_i,\Delta_k\right]\partial_i\Delta_{k'}g\right| \\
&= \left|\sum_{|k'-k|\le 4}\int_{\mathbb{R}^d}\left(S_{k'-1}f_i(x)-S_{k'-1}f_i(y)\right)2^{Nk}h\left(2^k(x-y)\right)\partial_i\Delta_{k'}g(y)\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\sum_{|k'-k|\le 4}\int_{\mathbb{R}^d}\left(S_{k'-1}f_i(x)-S_{k'-1}f_i(y)\right)2^{k(N+1)}(\partial_i)h\left(2^k(x-y)\right)\Delta_{k'}g(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\le C\sum_{|k'-k|\le 4}\left\|\nabla S_{k'-1}f\right\|_\infty\int_{\mathbb{R}^d}2^k|x-y|2^{Nk}\left|\nabla h\left(2^k(x-y)\right)\Delta_{k'}g(y)\right|\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

注意到 $h(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，容易验证 $|x\nabla h(x)|$ 满足引理 2.3 的条件，因此

$$|I|\le C\sum_{|k'-k|\le 4}\left\|\nabla S_{k'-1}f\right\|_\infty M\left(\left|\Delta_{k'}g(\cdot)\right|\right)(x). \tag{3.3}$$

在(3.3)式两边取 $K^{\alpha}_{p,q}$ 范数并用引理 2.2 可得

$$\|I\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\le C\|\nabla f\|_\infty\sum_{|k'-k|\le 4}\left\|M\left(\left|\Delta_{k'}g(\cdot)\right|\right)\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\le C\|\nabla f\|_\infty\sum_{|k'-k|\le 4}\left\|\Delta_{k'}g\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}, \tag{3.4}$$

在(3.4)式两边同时乘以 2^{ks}，然后取 $l^r\ (k\ge -1)$ 范数可得

$$\begin{aligned}
\left\|2^{ks}\|I\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r(k\ge -1)} &\lesssim \|\nabla f\|_\infty\left\|\sum_{|k'-k|\le 4}2^{(k-k')s}2^{k's}\left\|\Delta_{k'}g\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r} \\
&\lesssim \|\nabla f\|_\infty\left\|2^{k's}\left\|\Delta_{k'}g\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r} \\
&\lesssim \|\nabla f\|_\infty\left\|2^{ks}\left\|\Delta_{k}g\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r} \\
&\lesssim \|\nabla f\|_\infty\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

下面估计 II 项。根据 II 的定义有

$$|II|=\left|\sum_{k'\ge k-2}S_{k'+2}\partial_i\Delta_k g\Delta_{k'}f_i(x)\right|\le\sum_{k'\ge k-2}\left\|\nabla\Delta_k g\right\|_\infty\left|\Delta_{k'}f(x)\right|. \tag{3.6}$$

当 $s>0$ 时，利用离散形式的卷积不等式可得

$$\begin{aligned}
\left\|2^{ks}\|II\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r(k\ge -1)} &\lesssim \|\nabla g\|_\infty\left\|\sum_{k'\ge k-2}2^{(k-k')s}2^{k's}\left\|\Delta_{k'}f\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r} \\
&\lesssim \|\nabla g\|_\infty\left\|2^{-ks}\chi_{\{k\ge -2\}}\right\|_{l^1}\left\|2^{k's}\left\|\Delta_{k'}f\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r} \\
&\lesssim \|\nabla f\|_\infty\left\|2^{ks}\left\|\Delta_{k}g\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r}\lesssim\|\nabla g\|_\infty\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

对于 III 项，

$$\begin{aligned}
\|III\|_{K^{\alpha}_{p,q}} &= \left\|\sum_{|k'-k|\le 4}\Delta_k\left(S_{k'-1}\partial_i g\Delta_{k'}f_i\right)(x)\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}} \\
&\lesssim \left\|\sum_{|k'-k|\le 4}M\left(S_{k'-1}\partial_i g\Delta_{k'}f_i\right)\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}} \\
&\lesssim \sum_{|k'-k|\le 4}\left\|M\left(\left|\Delta_{k'}f\right|\right)\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\left\|S_{k'-1}\nabla g\right\|_\infty \\
&\lesssim \|\nabla g\|_\infty\sum_{|k'-k|\le 4}\left\|\Delta_{k'}f\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此类似于(3.5)可得

$$\left\|2^{ks}\|III\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|\nabla g\|_{\infty}\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}. \tag{3.9}$$

利用 $\operatorname{div} f=0$ 和分部积分，可得

$$\begin{aligned}|IV|&=\left|\sum_{k'\ge k-3}\Delta_k\left(\Delta_{k'}f_i\partial_i\tilde{\Delta}_{k'}g\right)\right|=\left|\sum_{k'\ge k-3}\int_{\mathbb{R}^d}2^{kd}h\left(2^k(x-y)\right)\Delta_{k'}f_i(y)\partial_i\tilde{\Delta}_{k'}g(y)\mathrm{d}y\right|\\&=\left|\sum_{k'\ge k-3}\int_{\mathbb{R}^d}2^{kd+k}(\partial_i h)\left(2^k(x-y)\right)\Delta_{k'}f_i(y)\partial_i\tilde{\Delta}_{k'}g(y)\mathrm{d}y\right|\\&\lesssim\sum_{k'\ge k-3}2^kM\left(\Delta_{k'}f\tilde{\Delta}_{k'}g\right)(x)\lesssim\sum_{k'\ge k-3}2^kM\left(\tilde{\Delta}_{k'}g\right)(x)\|\Delta_{k'}f\|_{\infty}\\&\lesssim\sum_{k'\ge k-3}2^kM\left(\tilde{\Delta}_{k'}g\right)(x)2^{-k'}\|\nabla\Delta_{k'}f\|_{\infty}\\&\lesssim\|\nabla f\|_{\infty}\sum_{k'\ge k-3}2^{k-k'}M\left(\tilde{\Delta}_{k'}g\right)(x),\end{aligned} \tag{3.10}$$

利用离散形式的卷积不等式和引理 2.2，可得当 $s+1>0$ 时有

$$\begin{aligned}\left\|2^{ks}\|IV\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}&\lesssim\|\nabla f\|_{\infty}\left\|\sum_{k'\ge k-3}2^{k-k'}2^{ks}\left\|M\left(\tilde{\Delta}_{k'}g\right)\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\\&\lesssim\|\nabla f\|_{\infty}\left\|2^{k-k'}2^{ks}2^{-k's}2^{k's}\left\|M\left(\tilde{\Delta}_{k'}g\right)\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\\&\lesssim\|\nabla f\|_{\infty}\left\|2^{(k-k')(s+1)2^{k's}}\|\Delta_k g\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\\&\lesssim\|\nabla f\|_{\infty}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

结合不等式(3.5)、(3.7)、(3.9)和(3.11)可得不等式(3.1)。

引理 3.2 设 $1\le p<\infty,1\le r,q\le\infty,\alpha\ge 0$ 以及 f 是一螺线向量场。设 $s\ge\frac{n}{p}+1$ 且当 $s=\frac{n}{p}+1$ 时 $r=1$，则存在常数 $C>0$ 使得

$$\left\|2^{ks}\left\|[f,\Delta_k]\cdot\nabla g\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}(A^k)}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}, \tag{3.12}$$

$$\left\|2^{ks}\left\|[f,\Delta_k]\cdot\nabla g\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}(A^k)}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}, \tag{3.13}$$

$$\left\|2^{k(s-1)}\left\|[f,\Delta_k]\cdot\nabla g\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}(A^k)}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s-1}}. \tag{3.14}$$

当 $r=\infty$ 时，按通常的定义做相应的改动即可。

证明 根据 Ein stein 关于哑指标 $i\in[1,N]$ 求和的习惯以及 Bony 仿积分解可得

$$\begin{aligned}[f,\Delta_k]\cdot\nabla g&=[f_i,\Delta_k]\partial_i g=f_i\Delta_k\partial_i g-\Delta_k\left(f_i\partial_i g\right)\\&=\left[T_{f_i},\Delta_k\right]\partial_i g+T'_{\Delta_k\partial_i g}f_i-\Delta_k\left(T_{\partial_i g}f_i\right)-\Delta_k\left(R\left(f_i,\partial_i g\right)\right)\\&:=I+II+III+IV,\end{aligned}$$

类似引理 3.1 中的(3.3)可得

$$\begin{aligned}|I| &\lesssim \sum_{|k'-k|\le 4}\|\nabla S_{k'-1}f\|_\infty M\left(\left|\Delta_{k'}g(\cdot)\right|\right)(x)\\&\lesssim \sum_{|k'-k|\le 4}\sum_{m\le k'-2}\|\nabla\Delta_m f\|_\infty M\left(\left|\Delta_{k'}g(\cdot)\right|\right)(x),\end{aligned}\tag{3.15}$$

取 $K_{p,q}^{\alpha}$ 范数得

$$\begin{aligned}\|I\|_{K_{p,q}^{\alpha}} &\lesssim \sum_{|k'-k|\le 4}\sum_{m\le k'-2}\|\nabla\Delta_m f\|_\infty \left\|M\left(\left|\Delta_{k'}g\right|\right)\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\\&\lesssim \sum_{|k'-k|\le 4}\sum_{m\le k'-2}\|\nabla\Delta_m f\|_\infty \|\Delta_{k'}g\|_{K_{p,q}^{\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

对任意 ρ，按照文献[7]引理 4.4 估计 $R_j^1(u,v)$ 的方法可得

$$\left\|2^{k\rho}\|I\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,\rho}}.\tag{3.17}$$

当 $r=\infty$ 时，做相应的改动即可。特别地，在(3.17)中取 $\rho=s$ 和 $\rho=s-1$ 可得，对 I 可得

$$\left\|2^{ks}\|I\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}},\tag{3.18}$$

$$\left\|2^{k(s-1)}\|I\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s-1}}.\tag{3.19}$$

利用(3.3)和(3.16)，按照文献[7]引理 4.4(ii)估计(4.27)式的方法可得

$$\left\|2^{k(s-1)}\|I\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s-1}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}.\tag{3.20}$$

下面，对 II 利用(3.6)和文献[7]引理 4.4(ii)估计 $R_j^{4,1}(u,v)$ 的方法可得

$$\left\|2^{ks}\|II\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,\rho}},\tag{3.21}$$

$$\left\|2^{k(s-1)}\|II\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s-1}}.\tag{3.22}$$

此外，类似(3.20)可得

$$\left\|2^{k(s-1)}\|II\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s-1}}\|g\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}.\tag{3.23}$$

按照(3.17)的方法，对 III，(3.12)~(3.14)右端的不等式也一样成立。对 IV，利用(3.10)可得

$$\begin{aligned}\|IV\|_{K_{p,q}^{\alpha}} &\lesssim \sum_{k'\ge k-3}\left\|2^k M\left(\Delta_{k'}f\tilde{\Delta}_{k'}g\right)(x)\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\\&\lesssim \sum_{k'\ge k-3}\left\|2^k M\left(\Delta_{k'}f\right)\right\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\left\|\tilde{\Delta}_{k'}g\right\|_\infty\\&\lesssim \sum_{k'\ge k-3}2^{k-k'}\|\Delta_{k'}f\|_{K_{p,q}^{\alpha}}2^{k'\left(\frac{n}{p}+1\right)}\|\Delta_{k'}g\|_{K_{p,q}^{\alpha}}\\&\lesssim\|f\|_{BK_{p,q,\infty}^{\alpha,s}}\sum_{k'\ge k-3}2^{k-k'}2^{k'\left(\frac{n}{p}+1-s\right)}\|\Delta_{k'}g\|_{K_{p,q}^{\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

因此，利用(3.6)和文献[7]引理 4.4(ii)估计 $R_j^{4,1}(u,v)$ 的方法可得，对 IV，(3.12)~(3.13)右端的不等式也一样成立。由于 $\tilde{\Delta}_{k'}\sim\Delta_{k'}$，根据对称性对 IV，(3.14)右端的不等式也成立。

4. 定理 1.1 的证明

在这一节，考虑方程

$$\begin{cases}\partial_t\theta+u\cdot\nabla\theta=0,(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T),\\ \mathrm{div}u=0,\\ \theta(0,x)=\theta_0(x),x\in\mathbb{R}^2.\end{cases} \tag{4.1}$$

定理 1.1 的证明分成下面的五步。

第一步 先验界估计。用算子 Δ_k 作用在方程(4.1)的两边得

$$\partial_t\Delta\theta+u\cdot\nabla\theta=[u,\Delta_k]\cdot\nabla\theta. \tag{4.2}$$

假设 $X_t(\alpha)$ 是下面的常微分方程的解

$$\begin{cases}\partial_t X_t(\alpha)=u(X_t(\alpha),t),\\ X_t(\alpha)\big|_{t=0}=\alpha.\end{cases} \tag{4.3}$$

则从(4.2)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta_k\theta(X_t(\alpha),t)=[u,\Delta_k]\cdot\nabla\theta(X_t(\alpha),t),$$

因此可推得

$$\left|\Delta_k\theta(X_t(\alpha),t)\right|\le\left|\Delta_k\theta_0(\alpha)\right|+\int_0^t\left|[u,\Delta_k]\cdot\nabla\theta(X_t(\alpha),t)\right|\mathrm{d}\tau. \tag{4.4}$$

在(4.4)式两边先取 $K_{p,q}^{\alpha}$ 范数，再乘以 2^{ks} 并取 l^r 范数，则利用 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left\|2^{ks}\left\|\Delta\theta(X_t(\alpha),t)\right\|_{K_{p.q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\\ &\le\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}+\int_0^t\left\|2^{ks}\left\|[u,\Delta_k]\cdot\nabla\theta(X_t(\alpha),t)\right\|_{K_{p.q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{div}u=0$，故 $X_t(\alpha)$ 是保体积的微分同胚。再结合引理 3.2，从上面的不等式可得

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}&\le\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}+\int_0^t\left\|2^{ks}\left\|[u,\Delta_k]\cdot\nabla\theta\right\|_{K_{p.q}^{\alpha}}\right\|_{l^r}\mathrm{d}\tau\\ &\le\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}+\int_0^t\|u\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\|\theta\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\mathrm{d}\tau\\ &\le\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}+\int_0^t\|\theta\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}^2\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里用到了

$$\|u\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}=\left\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\right\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\le C\|\theta\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}.$$

因此利用 Gronwall 不等式，存在 $T_0=T\left(\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\right)$，当 $t\in[0,T_0)$ 时有

$$\|\theta\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}\lesssim\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}. \tag{4.6}$$

第二步 逼近解和一致界估计。先构造问题(4.1)的逼近解，通过解方程组

$$\begin{cases}\partial_t\theta^{(n+1)}+u^{(n)}\cdot\nabla\theta^{(n+1)}=0,(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T),\\ \mathrm{div}u^{(n)}=0,\\ \theta^{(n+1)}(0,x)=S_{n+2}\theta_0(x),x\in\mathbb{R}^2\end{cases} \tag{4.7}$$

来定义序列 $\left\{\theta^{(n)},u^{(n)}\right\}_{N_0=N\cup\{0\}}$，其中 $\left(u^{(0)},\theta^{(0)}\right)=(0,0)$。类似于(4.5)式的证明可得

$$\begin{aligned}\left\|\theta^{(n+1)}(t)\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}} &\lesssim \|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}+\int_0^t\left\|u^{(n)}\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\left\|\theta^{(n+1)}\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\mathrm{d}\tau\\ &\lesssim \|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}+\int_0^t\left\|\theta^{(n)}\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\left\|\theta^{(n+1)}\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{4.8}$$

其中用到事实

$$\|S_{n+2}\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\lesssim\|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\ 和 u=R^{\perp}\theta.$$

利用 Gronwall 不等式可知存在 $T_0=T\left(\|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\right)$ 使得对任意 $n,t\in[0,T_0]$，

$$\left\|\theta^{(n)}(t)\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\lesssim 2\|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}.$$

第三步 存在性。现在将证明存在与 n 无关的时间 $T_1(\le T_0)$ 使得 $\left\{\theta^{(n)}\right\}$ 是 $X_T^{s-1}\triangleq\mathcal{C}\left([0,T_1];BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}\right)$ 中的柯西序列。为此令

$$\delta\theta^{(n+1)}=\theta^{(n+1)}-\theta^{(n)},\delta u^{(n+1)}=u^{(n+1)}-u^{(n)}.$$

则不难验证差分 $\left(\delta\theta^{(n+1)},\delta u^{(n+1)}\right)$ 满足方程

$$\begin{cases}\partial_t\delta\theta^{(n+1)}+u^{(n)}\cdot\nabla\delta\theta^{(n+1)}+\delta u^{(n)}\cdot\nabla\theta^{(n+1)}=0,\\ \delta\theta^{(n+1)}(0,x)=\Delta_{n+1}\theta_0(x).\end{cases}\tag{4.9}$$

用 Δ_k 作用在(4.9)的第一个方程可得

$$\partial_t\Delta_k\delta\theta^{(n+1)}+u^{(n)}\cdot\nabla\Delta_k\delta\theta^{(n+1)}=\left[u^{(n)},\Delta_k\right]\cdot\nabla\delta\theta^{(n+1)}-\Delta_k\left(\delta u^{(n)}\cdot\nabla\theta^{(n)}\right).$$

类似(4.5)可得

$$\begin{aligned}\left\|\delta\theta^{(n+1)}\right\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}\le\|\Delta_{n+1}\theta_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}&+\int_0^t\left\|2^{k(s-1)}\left\|\left[u^{(n)},\Delta_k\right]\cdot\nabla\delta\theta^{(n+1)}\right\|_{K^{\alpha}_{p,q}}\right\|_{l^r}\mathrm{d}\tau\\ &+\int_0^t\left\|\delta u^{(n)}\cdot\nabla\theta^{(n)}\right\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{4.10}$$

利用 $\Delta_{n+1}\theta_0$ 的 Fourier 支集，可得

$$\|\Delta_{n+1}\theta_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}\le C2^{-(n+1)}\|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}.$$

利用文献[7]的引理 4.3 和(3.13)可得

$$\begin{aligned}\left\|\delta\theta^{(n+1)}\right\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}&\le C2^{-(n+1)}\|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}+C\int_0^t\left\|u^{(n)}\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\left\|\delta\theta^{(n+1)}\right\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}\mathrm{d}\tau\\ &\quad+C\int_0^t\left\|\delta u^{(n)}\right\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,q,r}}\left\|\theta^{(n)}\right\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\mathrm{d}\tau\\ &\le C_12^{-(n+1)}+C_1T\left\|\delta\theta^{(n+1)}\right\|_{X_T^{s-1}}+C_1T\left\|\delta u^{(n)}\right\|_{X_T^{s-1}},\end{aligned}\tag{4.11}$$

其中 $C_1=C_1\left(\|\theta_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,q,r}}\right)$。因此若 $C_1T\le\frac{1}{8}$，则利用 T 的小性以及 $\left\|\delta u^{(n)}\right\|_{X_T^{s-1}}$ 的有限性可得 $\left\|\delta\theta^{(n+1)}\right\|_{X_T^{s-1}}\le 2C_12^{-(n)}$。因此 $\left\{\theta^{(n)}\right\}_{n\in N_0}$ 是 X_T^{s-1} 中的一个柯西序列。按照标准的讨论，当 $T_1\le\min\left\{T_0,\frac{1}{8C_1}\right\}$ 时，

极限函数 $\theta \in X_T^{s-1}$ 是方程(4.1)以 θ_0 为初值的解。此外，θ 还满足

$$\|\theta\|_{L_{T_1}^{\infty}\left(BK_{p,q,r}^{\alpha,s}\right)} \le C\|\theta_0\|_{BK_{p,q,r}^{\alpha,s}}.$$

第四步 唯一性。假设 $\theta' \in C_{T_1}\left(BK_{p,q,r}^{\alpha,s}\right)$ 是满足相同初值的另外一个解。令 $\delta\theta = \theta - \theta', \delta u = u - u'$。则 $(\delta\theta, \delta u)$ 满足方程

$$\begin{cases} \partial_t \delta\theta + u \cdot \nabla \delta\theta + \delta u \cdot \nabla \theta' = 0, \\ \nabla \cdot \delta u = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

按第一步的方法类似的可得当 T 充分小时

$$\|\delta\theta\|_{X_T^{s-1}} \le C_2 T \|\delta\theta\|_{X_T^{s-1}},$$

这意味着 $(\delta\theta, \delta u) \equiv 0$ 即 $\theta' = \theta$。

基金项目

江西省自然科学基金(项目编号：20192BAB201003)。

参考文献

[1] Constantin, P., Majda, A.J. and Tabak, E. (1994) Formation of Strong Fronts in the 2-D Quasi-Geostrophic Thermal Active Scalar. *Nonlinearity*, **7**, 1495-1533. https://doi.org/10.1088/0951-7715/7/6/001

[2] Wu, J. (1997) Quasi-Geostrophic-Type Equations with Initial Data in Morrey Spaces. *Nonlinearity*, **10**, 409-1420. https://doi.org/10.1088/0951-7715/10/6/002

[3] Chae, D. (2003) The Quasi-Geostrophic Equation in the Triebel-Lizorkin Spaces. *Nonlinearity*, **16**, 479-495. https://doi.org/10.1088/0951-7715/16/2/307

[4] Wang, H. and Jia, H. (2009) Local Well-Posedness for the 2D Non-Dissipative Quasi-Geostrophic Equation in Besov Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 3791-3798. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.07.035

[5] Xu, J. and Tan, Y. (2013) The Well-Posedness of the Surface Quasi-Geostrophic Equations in the Besov-Morrey Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **92**, 60-71. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.06.019

[6] Herz, C. (1969) Lipschitz Spaces and Bernstein's Theorem on Absolutely Convergent Fourier Transforms. *Indiana University Mathematics Journal*, **18**, 283-323. https://doi.org/10.1512/iumj.1969.18.18024

[7] Ferreira, L.C.F. and Pacutérez-Lórez, J.E. (2017) On the Theory of Besov-Herz Spaces and Euler Equations. *Israel Journal of Mathematics*, **220**, 283-332. https://doi.org/10.1007/s11856-017-1519-6

[8] Li, X. and Yang, D. (1996) Boundedness of Some Sublinear Operators on Herz Spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, **40**, 484-501. https://doi.org/10.1215/ijm/1255986021

[9] Fefferman, C. and Stein, E.M. (1971) Some Maximal Inequalities. *American Journal of Mathematics*, **93**, 107-115. https://doi.org/10.2307/2373450