Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(6), 593-598
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.106072

Finding Integrating Factor or Inverse by Invariant Algebraic Curves

Hongwei Li, Yuwei Xu, Yue'e Lv*

Linyi University, Linyi Shandong
Email: *lvyuee@lyu.edu.cn

Received: May 29th, 2020; accepted: Jun. 17th, 2020; published: Jun. 24th, 2020

Abstract

In the course of ordinary differential equations, finding integrating factor is a very difficult problem. In this paper, we will give a method to solve integrating factor or inverse integrating factor by invariant algebraic curves; the integrability of two differential systems is solved.

Keywords

Integrating Factor, Inverse Integrating Factor, First Integral

不变代数曲线法求解积分因子

李红伟，徐雨薇，吕月娥*

临沂大学，山东 临沂
Email: *lvyuee@lyu.edu.cn

收稿日期：2020年5月29日；录用日期：2020年6月17日；发布日期：2020年6月24日

摘　要

在常微分方程课程学习中，积分因子的求解是一个难点问题，本文利用不变代数曲线法求解积分因子与逆积分因子，解决了两类微分方程的可积性问题。

关键词

积分因子，逆积分因子，首次积分

*通讯作者。

文章引用: 李红伟, 徐雨薇, 吕月娥. 不变代数曲线法求解积分因子[J]. 理论数学, 2020, 10(6): 593-598.
DOI: 10.12677/pm.2020.106072

1. 引言

在常微分方程课程的学习中，求解积分因子问题一直是一个热点与难点问题。到目前为止，最常用的办法有三种：1) 观察法；2) 分项组合法；3) 公式法等，参见[1]-[6]。但是，这三种方法都不能完全解决积分因子的求解问题，且操作起来具有很大的难度，不易于思考。是否还有其他的办法求解积分因子呢？本文利用代数不变曲线理论就这一问题进行一些探讨与总结。

2. 不变代数曲线与积分因子

定义 1 [1]：对于微分系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

如果实函数 $V(x,y)$ 满足

$$P(x,y)\frac{\partial V}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial V}{\partial y} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)V(x,y)$$

则称 $V(x,y)$ 是系统(1)的积分因子。如果 $V(x,y)$ 是系统的逆积分因子，则 $1/V(x,y)$ 为系统(1)的逆积分因子。特别的，如果

$$P(x,y)\frac{\partial V}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

则称 $V(x,y)$ 是系统(1)的首次积分。

事实上，系统(1)的等价形式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ 即为常微分方程课程中的恰当微分方程的形式，因此寻求恰当微分方程的积分因子就等价于寻找系统(1)的积分因子。考虑 n 次多项式系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=0}^{n} X_k(x,y) = \chi_n(x,y), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=0}^{n} Y_k(x,y) = \gamma_n(x,y).$$

1878 年提出的达布定理已系统的研究了该系统的不变代数曲线解,并给出了利用有限多个不变代数曲线解构造首次积分和积分因子的方法.

定义 2 设 $f(x,y)$ 是 m 次的非常数多项式，如果存在一个有界函数 $h(x,y)$，使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)} = \frac{\partial f}{\partial x}\chi_n(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\gamma_n(x,y) = h(x,y)f(x,y),$$

则称 $f = 0$ 为系统(2)的不变代数曲线，多项式 f 称为系统的代数积分，函数 h 称为 f 的余子式。

1995 年，刘一戎等人将达布的结果进一步推广到了 f 不是多项式的情况。已有结论已经证明首次积分和积分因子都是系统的不变代数曲线。

定理 1 设 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是(2)的 m 个独立的不变代数曲线，满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)} = h_i f_i,\quad i = 1,2,\cdots,m$$

那么，对于任意一组非零的复数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，函数$f = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}\cdots f_m^{\alpha_m}$也是(2)的不变代数曲线，满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)} = \left(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_m h_m\right) f$$

我们从上面的定理知道

定理 2 设$f_1, f_2,\cdots, f_m$是(2)的m个独立的不变代数曲线.若存在一组非零的复数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_1 h_1 + \alpha_m h_m = 0.$$

那么，$f = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}\cdots f_m^{\alpha_m}$是(2)的首次积分。

若存在一组非零的复数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_1 h_1 + \alpha_m h_m = -\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_n}{\partial y}\right).$$

那么，$f = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}\cdots f_m^{\alpha_m}$是(2)的积分因子。

若存在一组非零的复数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_m h_m = \left(\frac{\partial \chi_n}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_n}{\partial y}\right)$$

那么，$f = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}\cdots f_m^{\alpha_m}$是(2)的积分因子。

求解积分因子的问题就转化为了寻找微分方程的不变代数曲线的过程，只要能够找到足够多的不变代数曲线，就可以构造出其积分因子与首次积分。与已有的其他方法相比较，该方法更加直观且便于计算机编程实现。

3. 不变代数曲线法求积分因子

本节我们以一个例子呈现运用不变代数曲线法求解积分因子的计算过程。

例 1

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\left(1 + a_{11}x + a_{21}x^2\right), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4\mu xy + 2a_{11}y^2 - 2\left(1+\mu^2\right)x^3 + 2a_{21}xy^2,$$

解：设$f(x,y)$为其一条不变代数曲线，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)} &= \frac{\partial f}{\partial x} y\left(1 + a_{11}x + a_{21}x^2\right)\\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\left[4\mu xy + 2a_{11}y^2 - 2\left(1+\mu^2\right)x^3 + 2a_{21}xy^2\right]\\ &= h(x,y) f(x,y)\end{aligned}$$

设

$$f = \sum_{k+j=0}^{m} c_{kj} x^k y^j,\ h = \sum_{k+j=0}^{n-1} d_{kj} x^k y^j$$

则

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sum\limits_{k+j=0}^{m} c_{kj}x^k y^j}{\mathrm{d}t}\right|_{(36)} = \frac{\partial \sum\limits_{k+j=0}^{m} c_{kj}x^k y^j}{\partial x} y\left(1+a_{11}x+a_{21}x^2\right)$$

$$+\frac{\partial \sum\limits_{k+j=0}^{m} c_{kj}x^k y^j}{\partial y}\left[4\mu xy+2a_{11}y^2-2\left(1+\mu^2\right)x^3+2a_{21}xy^2\right] \tag{4}$$

$$=\sum_{k+j=0}^{n-1} d_{kj}x^k y^j \sum_{k+j=0}^{m} c_{kj}x^k y^j$$

在这里我们首先令 $m=2$，由题意我们可以知道 $n=3$，将 $m=2$，$n=3$ 代入得

$$\sum_{k+j=0}^{2} kc_{kj}x^{k-1}y^j\left[y\left(1+a_{11}x+a_{21}x^2\right)\right]$$

$$+\sum_{k+j=0}^{2} jc_{kj}x^k y^{j-1}\left[4\mu xy+2a_{11}y^2-2\left(1+\mu^2\right)x^3+2a_{21}xy^2\right] \tag{5}$$

$$=\sum_{k+j=0}^{2} d_{kj}x^k y^j \sum_{k+j=0}^{2} c_{kj}x^k y^j$$

将(5)展开化简并将得到的等式两边对应项的系数进行比较，可以得到一个关于 c_{kj}, d_{kj} 的线性代数方程组

$$\begin{cases}
d_{00}c_{00}=0\\
d_{00}c_{10}+d_{10}c_{00}=0\\
d_{00}c_{20}+d_{10}c_{10}+d_{20}c_{00}=0\\
d_{02}c_{02}=0\\
c_{10}+2c_{20}=d_{00}c_{01}+d_{01}c_{00}\\
c_{10}a_{11}+2c_{20}a_{11}+4c_{01}u=d_{00}c_{11}+d_{10}c_{01}+d_{01}c_{10}+d_{11}c_{00}\\
c_{11}+2c_{01}a_{11}=d_{00}c_{02}+d_{01}c_{01}+d_{02}c_{00}\\
c_{10}a_{21}+2c_{20}a_{21}+4c_{11}u=d_{10}c_{11}+d_{01}c_{20}+d_{20}c_{01}+d_{11}c_{10}\\
3c_{11}a_{11}+2c_{01}a_{21}+8c_{02}u=d_{10}c_{02}+d_{01}c_{11}+d_{02}c_{10}+d_{11}c_{01}\\
3c_{11}a_{21}=d_{20}c_{02}+d_{02}c_{20}+d_{11}c_{11}\\
-2c_{01}-2c_{01}u^2=d_{10}c_{20}+d_{20}c_{10}\\
4c_{02}a_{11}=d_{01}c_{02}+d_{02}c_{01}\\
-4c_{02}-4c_{02}u^2=d_{20}c_{11}+d_{11}c_{20}\\
4c_{02}a_{21}=d_{02}c_{11}+d_{11}c_{02}\\
-2c_{11}-2c_{11}u^2=d_{20}c_{20}
\end{cases}$$

解这个方程组，它遵循 f 和 h，解得

$$\begin{cases}
c_{00}=1\\
c_{10}=a_{11}\\
c_{01}=0\\
c_{20}=a_{21}\\
c_{02}=0\\
c_{11}=0
\end{cases} \tag{6}$$

从而可以求得它的一条不变的代数曲线

$$f_{11}=1+a_{11}x+a_{21}x^2,$$

同理可求得当 $m=4$ 时它的另一条不变代数曲线

$$f_{12}=y^2-2\mu x^2y+x^4\left(1+\mu^2\right),$$

由两条代数不变曲线的可以构造系统的逆积分因子

$$I_1=f_{11}f_{12}.$$

系统的相图如下图 1 所示：

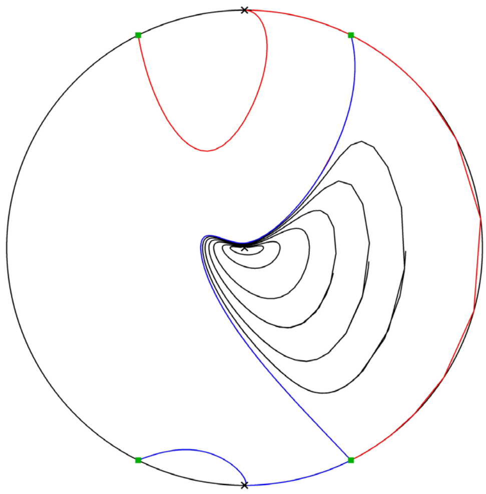

Figure 1. Phase diagram of system (3)
图 1. 系统(3)的相图

通过该例我们可以看出，运用不变代数曲线求解积分因子，只牵扯到多项式的运算，可以利用程序方便的实现，其主要困难之处在于不变代数曲线的次数是不确定的。

下列例题求解过程同上。

例 2

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{25}y\left(5+2a_{11}x-b_{02}x\right)\left(5+3a_{11}x+b_{02}x\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{25}\big(&-50x^3+25b_{02}y^2-2a_{11}^2xy^2+7a_{11}b_{02}xy^2-3b_{02}^2xy^2\\&+100\mu xy+40\mu a_{11}x^2y-20b_{02}\mu x^2y-50\mu^2x^3\big).\end{aligned}$$

它有三条不变的代数曲线

$$\begin{aligned}f_{21}&=5+3a_{11}x+b_{02}x,\\ f_{22}&=5+2a_{11}x-b_{02}x,\\ f_{23}&=25x^4+25y^2+\left(20a_{11}+10b_{02}\right)xy^2+\left(4a_{11}^2-4a_{11}b_{02}+b_{02}^2\right)x^2y^2\\&\quad-50\mu x^2y-20a_{11}x^3y\mu+10b_{02}x^3y\mu+25x^4\mu^2,\end{aligned}$$

其逆积分因子

$$I_2 = f_{21} f_{22}^{-1} f_{23}.$$

例 3

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{100} y\left(10+6a_{11}x-3b_{02}x\right)\left(10+4a_{11}x+3b_{02}x\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -8x^3+4\sqrt{3}xy+\frac{4}{5}\sqrt{3}\left(2a_{11}-b_{02}\right)x^2y+b_{02}y^2$$
$$+\frac{1}{5}\left(2a_{11}-b_{02}\right)b_{02}xy^2+\frac{\left(4a_{11}-17b_{02}\right)\left(2a_{11}-b_{02}\right)^2}{3000\sqrt{3}}y^3,$$

它有三条不变的代数曲线

$$\begin{aligned}
f_{31} &= 10+6a_{11}x-3b_{02}x,\\
f_{32} &= 10+4a_{11}x+3b_{02}x,\\
f_{33} &= -12000\sqrt{3}x^4+18000x^2y+7200a_{11}x^3y-3600b_{02}x^3y-3000\sqrt{3}y^2\\
&\quad -2400\sqrt{3}a_{11}xy^2+1200\sqrt{3}b_{02}xy^2-480\sqrt{3}a_{11}^2x^2y^2+480\sqrt{3}a_{11}b_{02}x^2y^2\\
&\quad -120\sqrt{3}a_{02}^2x^2y^2+60a_{11}^2y^3-60a_{11}b_{02}y^3+15b_{02}^2y^3\\
&\quad +32a_{11}^3xy^3-48a_{11}^2b_{02}xy^3+24a_{11}b_{02}^2xy^3-4_{02}^3xy^3,
\end{aligned}$$

其逆积分因子

$$I_3 = f_{31}^{-\frac{1}{3}} f_{32} f_{33}.$$

从次数较低的不变代数曲线开始，计算机程序实现过程：

1) 定义函数 $f(x,y), h(x,y)$；

2) 计算 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}-f(x,y)h(x,y)$；

3) 取出上式的全部系数，令其为零，得到方程组；

4) 求解方程组得到代数不变曲线；

5) 如果没有该次数代数不变曲线，重复计算更高次的代数不变曲线。

参考文献

[1] 东北师范大学数学系微分方程教研室. 常微分方程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1982.

[2] 徐胜林. 常微分方程学习指导[J]. 高等继续教育学报, 2004, 17(2): 17-22.

[3] 李德新. 两类特殊微分方程的积分因子解法[J]. 高等数学研究, 2008, 11(3): 33-34.

[4] 寸得偶, 晏林. 积分因子求法探讨[J]. 文山学院学报, 2016, 29(3): 107-112.

[5] 周正新, 李静怡, 颜跃新. 几类一阶微分方程的逆积分因子与可积性[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2018, 82(2): 16-23.

[6] 钱祥征, 黄立宏. 常微分方程[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 2007.