Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(6), 580-584
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.106070

Hans汉斯

A Limiting Theorem in the Successive Investment Market of Modeling

Xuejiang Meng, Yansong Xu, Jixiang Wang, Pengshuai Ru, Shuting Han, Kaixuan Wei, Jing Song

School of Mathematics & Physics Science and Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui
Email: 906613220@qq.com

Received: May 17th, 2020; accepted: Jun. 8th, 2020; published: Jun. 15th, 2020

Abstract

In this paper, we use the notion of asymptotic sampling relative entropy as the dissimilarity between the true distribution of investment market and their margins. Furthermore, by using Boreel-Cantelli lemma, a strong limiting theorem for successive investment under general market condition is obtained.

Keywords

Portfolio, Return Rate, Asymptotic Sampling Relative Entropy, Borel-Cantelli Lemma, Limiting Theorem

关于序列投资模型中的一个强极限定理

孟雪健，徐岩松，王吉祥，汝朋帅，韩澍婷，魏凯旋，宋　静

安徽工业大学数理科学与工程学院，安徽　马鞍山
Email: 906613220@qq.com

收稿日期：2020年5月17日；录用日期：2020年6月8日；发布日期：2020年6月15日

摘　要

本文给出渐近样本相对熵的概念作为任意投资序列联合分布与其边缘分布之间不相似性的度量，利用**Borel-Cantelli**引理，得到了一般市场条件下序列投资模型的一个强极限定理。

关键词

投资组合，收益率，渐近样本相对熵，**Borel-Cantelli**引理，极限定理

文章引用：孟雪健，徐岩松，王吉祥，汝朋帅，韩澍婷，魏凯旋，宋静. 关于序列投资模型中的一个强极限定理[J]. 理论数学, 2020, 10(6): 580-584. DOI: 10.12677/pm.2020.106070

1. 引言

最优投资组合的理论和算法是数理金融学中的一个重要问题，从马科维茨(H. Markowitz) [1]提出的投资组合理论至今已有半个多世纪，然而关于最优投资组合的研究依然方兴未艾，众多学者从多方面、多层次地推广了马科维茨的模型[2] [3]，近年来，叶中行[4] [5]等研究了一般市场条件下投资组合的增长率以及 log-最优投资组合的极限定理。本文在此基础上利用渐近样本相对熵[6]，研究了更一般的情况下序列投资组合的极限定理。

假设市场上有 m 种股票可供投资，投资者的初始财富为单位资金,他每次都将经上期末所得财富全部投资于下一个周期.在第 n 个周期中，m 种股票的收益向量为 $\xi_n=(\xi_{n1},\cdots,\xi_{nm})^{\mathrm{T}}$，其中 ξ_{nj} 为第 n 个周期第 j 种股票的收益。在第 n 个周期中，投资者采取的投资组合向量为 $\omega_n=(\omega_{n1},\cdots,\omega_{nm})^{\mathrm{T}}$，其中 ω_{nj} 表示在第 n 个周期中分配在第 j 种股票上的资金比例，满足 $\sum_{j=1}^{m}\omega_n=1$，$\omega_{nj}\ge 0, j=1,\cdots,m$，表示不允许卖空那么，投资者在第 n 个周期末的累积资金为

$$S_n := \prod_{k=1}^{n}\left(\omega_k^{\mathrm{T}}\xi_n\right) \tag{1.1}$$

累积收益率为 $\log S_n$，其中 $\omega_k^{\mathrm{T}}\xi_n=\sum_{j=1}^{m}\omega_{kj}\xi_{kj}$。

设收益向量序列 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的联合概率函数为 $p_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，其边缘概率函数为 $p_k(\xi_k), k=1,\cdots,n$。为了刻画其联合分布与其边缘乘积分布之间的差异，受文献[7]的启发，我们引入：

定义 1 设 $\{a_n, n\ge 1\}$ 为一列单调不减的实数列 $a_n\uparrow\infty$，定义似然比：

$$r_n(\omega)=\prod_{k=1}^{n}p_k(\xi_k)\Big/p_n(\xi_1,\cdots,\xi_n) \tag{1.2}$$

称

$$r_n(\omega):=\limsup_n \frac{1}{a_n}\log\frac{1}{r_n(\omega)} \tag{1.3}$$

为渐近样本相对熵。

定义 2 设函数 $\varphi_n(x):R_+\to R_+, \alpha(n)\ge 1, \beta_n\le 2, C_n>0, D_n>0\ (n\in N)$ 为常数，且满足当 $0<v\le u$ 时，有

$$C_n\frac{u^{\alpha(n)}}{v^{\alpha(n)}}\le\frac{\varphi_n(u)}{\varphi_n(v)}\le D_n\frac{u^{\beta_n}}{v^{\beta_n}} \tag{1.4}$$

引理 1 设 $\{\Lambda_n(\omega), n\ge 1\}$ 为一列似然函数且满足 $E\Lambda_n(\omega)\le C$ ($C>0$ 是常数)，$\{a_n, n\ge 1\}$ 为一列单调不减的实数列，且满足对任意的 $\delta>0$，

$$\sum\frac{C}{\mathrm{e}^{a_n\delta}}<\infty \tag{1.5}$$

则 $\{\Lambda_n, n\ge 1\}$ 几乎处处收敛，且

$$\limsup \frac{1}{a_n}\Lambda_n(\omega)\le 0 \ \text{ a.s.} \tag{1.6}$$

证明因为$\{\Lambda_n(\omega), n\ge 1\}$是似然函数，易知$\{\Lambda_n(\omega),\mathcal{F}_n, n\ge 0\}$是鞅，其中$\mathcal{F}_n, n\ge 0$是自然$\sigma$代数流。注意到$E\Lambda_n(\omega)\le C$，由鞅收敛定理知：$\{\Lambda_n(\omega), n\ge 1\}$几乎处处收敛。又，对$\forall\delta>0$由切比雪夫不等式有

$$\sum P\left\{\frac{1}{a_n}\log\Lambda_n(\omega)>\delta?\right\}\le\sum\frac{C}{e^{a_n\delta}}<\infty$$

由 Borel-Cantelli 引理可得(1.6)成立。

2. 主要结论及证明

定理 设$\xi_1,\xi_2,\cdots$为连续投资于m种股票的收益向量序列，$\omega_1,\omega_2,\cdots$为投资组合向量序列，设$\{a_n, n\ge 1\}$是一列正的实数列，且满足(1.5)。令

$$\mathcal{H}:=\{\omega: 0<r(\omega)<+\infty\} \tag{2.1}$$

如果

$$D:=\left\{w:\sum_{n=1}^{\infty}A_n E\frac{\varphi_n\left(\left|\log w_n^{\mathrm{T}}\xi_n\right|\right)}{\varphi_n(a_n)}<\infty\right\} \tag{2.2}$$

其中$A_n=\max\left(\frac{1}{C_n},D_n\right)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\log\left(w_k^{\mathrm{T}}\xi_k\right)-E\left[\log\left(w_k^{\mathrm{T}}\xi_k\right)\right]\right\}=0 \ \text{ a.s.}\ \omega\in\mathcal{H}\cap\mathcal{D} \tag{2.3}$$

证明：令

$$f_n(\xi_n)=\log\left(w_n^{\mathrm{T}}\xi_n\right),\ \ f_n^*(\xi_n)=f_n(\xi_n)I_{\left[\left|f_n(\xi_n)\right|\le a_n\right]} \tag{2.4}$$

其中$I_{[\cdot]}$为示性函数。

当$\left|f_n(\xi_n)\right|\ge a_n$，有

$$\frac{\left|f_n(\xi_n)\right|}{a_n}\le\frac{\left|f_n(\xi_n)\right|^{\alpha_n}}{a_n}\le A_n\frac{\varphi_n\left(\left|f_n(\xi_n)\right|\right)}{\varphi_n(a_n)} \tag{2.5}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}P\left[f_n(\xi_n)\ne f_n^*(\xi_n)\right]&=\sum_{n=1}^{\infty}EI_{\left[\left|f_n(\xi_n)\right|>a_n\right]}\le\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\frac{\left|f_n(\xi_n)\right|}{a_n}\right]\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}A_nE\left[\frac{\varphi_n\left(\left|f_n(\xi_n)\right|\right)}{\varphi_n(a_n)}\right]<\infty,\quad\omega\in D\end{aligned} \tag{2.6}$$

由 Borel-Cantelli 引理

$$P\left[f_n(\xi_n)\ne f_n^*(\xi_n), i.o.\right]=0 \tag{2.7}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\xi_n)-f_n^*(\xi_n)}{a_n}\text{收敛}\quad \text{a.s.} \tag{2.8}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{Ef_n^*(\xi_n)-Ef_n(\xi_n)}{a_n}&\le\frac{E\left|f_n^*(X_n)-f_n(\xi_n)\right|}{a_n}=E\left\{\frac{\left|f_n(\xi_n)\right|}{a_n}I_{\left[\left|f_n(\xi_n)\right|>a_n\right]}\right\}\\&\le E\left\{A_n\frac{\varphi_n\left(\left|f_n(\xi_n)\right|\right)}{\varphi_n(a_n)}I_{\left[\left|f_n(\xi_n)\right|>a_n\right]}\right\}\\&\le A_nE\left[\frac{\varphi_n\left(\left|f_n(\xi_n)\right|\right)}{\varphi_n(a_n)}\right]<\infty\end{aligned} \tag{2.9}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ef_n^*(\xi_n)-Ef_n(\xi_n)}{a_n}\le\sum_{n=1}^{\infty}A_nE\left[\frac{\varphi_n\left(\left|f_n(\xi_n)\right|\right)}{\varphi_n(a_n)}\right]<\infty,\ \omega\in D \tag{2.10}$$

令 $\eta_k=\dfrac{f_k^*(\xi_k)-Ef_k^*(\xi_k)}{a_k},y_k=\dfrac{f_k^*(x_k)-Ef_k^*(x_k)}{a_k}$，易知$|\eta_k|\le 2$。定义

$$g_n(x_1,\cdots,x_n)\doteq\prod_{k=1}^{n}\frac{p_k(x_k)\exp(\lambda y_k)}{E\left[\exp(\lambda\eta_k)\right]}\cdot r_n(\omega) \tag{2.11}$$

易知 $g_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是概率密度函数。定义随机变量如下：

$$\Lambda_n(\omega):=\frac{g_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{p_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp(\lambda\eta_k)}{E\left[\exp(\lambda\eta_k)\right]}\cdot r_n(\omega) \tag{2.12}$$

易知 $E\Lambda_n(\omega)=1$，则由引理 1 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left(\lambda\sum_{k=1}^{n}\eta_k\right)}{\prod_{k=1}^{n}E\left[\exp(\lambda\eta_k)\right]}\cdot r_n(\omega)<\infty\ \text{ a.s. }\ \omega\in\mathcal{H} \tag{2.13}$$

由不等式 $0\le e^x-1-x\le\dfrac{x^2}{2}e^{|x|}\ (x\in R)$，并注意到 $E\eta_k=0$，有

$$\begin{aligned}0&\le\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\exp(\lambda\eta_k)\right]-1=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\exp(\lambda\eta_k)-1-\lambda\eta_k\right]\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\frac{\lambda^2\eta_k^2}{2}\exp\left(|\lambda|\cdot|\eta_k|\right)\right]\le\frac{\lambda^2}{2}e^{2|\lambda|}\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\eta_k^2\right]\end{aligned} \tag{2.14}$$

又

$$\begin{aligned}E\left[\eta_k^2\right]&=E\left[\frac{f_k^*(\xi_k)-Ef_k^*(\xi_k)}{a_k}\right]^2\le E\left[\frac{f_k^*(\xi_k)}{a_k}\right]^2\\&=\int_{|f_k(x_k)|\le a_k}\frac{f_k^2(\xi_k)}{a_k{}^2}dF_k(x_k)\le\int_{|f_k(x_k)|\le a_k}\frac{\left|f_k(\xi_k)\right|^{\beta_k}}{a_k{}^{\beta_k}}dF_k(x_k)\\&\le\int_{|f_k(x_k)|\le a_k}A_k\frac{\varphi_k\left(\left|f_k(\xi_k)\right|\right)}{\varphi_k(a_k)}dF_k(x_k)\le A_kE\left[\frac{\varphi_k\left(\left|f_k(\xi_k)\right|\right)}{\varphi_k(a_k)}\right]\end{aligned} \tag{2.15}$$

由(2.2)和(2.14)，(2.15)有

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\left[\exp\left(\lambda \eta_k\right)\right]-1<\infty \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.16}$$

从而

$$\prod_{k=1}^{\infty} E\left[\exp\left(\lambda \eta_k\right)\right]<\infty \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.17}$$

由(2.13)和(2.17)有

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \eta_k\right)<\infty \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.18}$$

分别令 $\lambda = \pm 1$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k\right)<\infty \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \eta_k\right)<\infty \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.20}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_k^*\left(\xi_k\right)-Ef_k^*\left(\xi_k\right)}{a_k}<\infty \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.21}$$

由 (2.8)，(2.10)和(2.21)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n\left(\xi_n\right)-Ef_n\left(\xi_n\right)}{a_n}<\infty \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.22}$$

由 Kronecker 引理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ f_n\left(\xi_n\right)-Ef_n\left(\xi_n\right)\right\}=0 \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} \tag{2.23}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \left\{\log\left(w_k^{\mathrm{T}} \xi_k\right)-E\left[\log\left(w_k^{\mathrm{T}} \xi_k\right)\right]\right\}=0 \quad \text{a.s.} \quad \omega \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H} 。$$

基金项目

安徽工业大学大学生创新创业项目：信息论与最优投资组合理论的若干问题(s201910360389)。

参考文献

[1] Markowitz, H.M. (1959) Portfolio Selection. Wily, New York.

[2] Algoet, P.H. (1994) The Strong Law of Large Numbers for Sequential Decisions Under Uncertainty. *IEEE Transactions on Information Theory*, **40**, 609-633. https://doi.org/10.1109/18.335876

[3] Algoet, P.H. and Cover, T.M. (1988) Asymptotic Optimality and Asymptotic Equipartition Properties of Log-Optimum Investment. *The Annals of Probability*, **16**, 876-898. https://doi.org/10.1214/aop/1176991793

[4] 叶中行, 周煦, 徐云. 投资组合的增长率及其极限定理[J]. 上海交通大学学报, 2005, 39(6): 1020-1024.

[5] 包振华, 叶中行. *log*-最优投资组合的极限定理[J]. 数学杂志, 2007, 27(4): 467-470.

[6] 刘文. 强偏差定理与分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[7] Wang, Z.Z. (2007) On Almost Sure Convergence for Dependent Stochastic Sequence. *International Journal of Mathematical Analysis*, **1**, 1353-1360.