Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(8), 784-790
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.108091

Hans汉斯

On the Integral Method of Definite Integral of Trigonometric Functions

Wenchao Huang

School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu Shandong
Email: H1174794226@163.com

Received: Jul. 31st, 2020; accepted: Aug. 18th, 2020; published: Aug. 26th, 2020

Abstract

This paper sums up the common calculation skills of definite integral of trigonometric functions. A class of definite integral with the form of $\int_0^{\pi}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$ (where m,n are positive integers) is studied, and a corresponding calculation formula is obtained. Moreover, some examples are given to illustrate the practicability and convenience of the formula.

Keywords

Trigonometric Functions, Definite Integral

关于三角函数定积分的积分方法

黄文超

曲阜师范大学数学科学学院，山东 曲阜
Email: H1174794226@163.com

收稿日期：2020年7月31日；录用日期：2020年8月18日；发布日期：2020年8月26日

摘 要

本文总结归纳了常见的被积函数是三角函数的定积分的计算技巧，主要研究了形如

$$\int_0^{\pi}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x \quad (\text{其中 } m,n \text{ 为正整数}) \tag{1}$$

的一类定积分，得到了相应的一个计算公式，并举例说明了公式的实用性和便捷性。

文章引用: 黄文超. 关于三角函数定积分的积分方法[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 784-790.
DOI: 10.12677/pm.2020.108091

关键词

三角函数，定积分

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

积分学是数学分析的核心内容，含三角函数的定积分又是极为常见的一类积分。目前，对三角函数的定积分问题，已有一些研究成果[1]-[7]。本文针对平时学习中比较常见的含三角函数的定积分进行研究，主要研究形如

$$\int_0^{\pi}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x \quad (\text{其中 } m,n \text{ 为正整数}) \tag{1}$$

的一类含三角函数的积分，如果用分部积分等方法计算(1)，当 m 或 n 很大时，计算比较复杂，因此寻找简化积分运算的方法十分必要。

在数学分析中，定积分(1)在理论和应用中都十分重要，而且经常遇见，怎样计算这个积分比较简便，[1]已经给出了一个计算公式，但本文将通过不同的方法来研究(1)，并把积分技巧进行归纳总结，得到了一些方便计算的定理和推论以及不同于[1]的计算公式，此方法可以节省计算时间，同时保证准确率，以减少在对三角函数积分时所遇到的困难。

2. 定理及推论

定理 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$。

证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t,\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$。

证毕。

例 1 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$。

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$。

定理 2 [8] 设 $J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$，其中 m,n 为正整数，则

$$J(m,n)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2),\ m,n=2,3,\cdots.$$

证明 设 $I(m,n)=\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$，则当 $m+n\neq 0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{1}{n+1}\int \cos^{m-1} x \mathrm{d}\left(\sin^{n+1} x\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^{n+2} x \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \left(1-\cos^2 x\right)\sin^{n} x \mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1)\int \left(\cos^{m-2} x \sin^{n} x - \cos^{m} x \sin^{n} x\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I(m-2,n) - \frac{m-1}{n+1} I(m,n),
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{n+1}{m+n}\left[\frac{1}{n+1}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I(m-2,n)\right] \\
&= \frac{1}{m+n}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I(m-2,n),\quad m,n = 2,3,\cdots.
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &= -\int \cos^{m} x \sin^{n-1} x \mathrm{d}\cos x = -\frac{1}{m+1}\int \sin^{n-1} x \mathrm{d}\cos^{m+1} x \\
&= -\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{m} x \sin^{n-2} x \left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} I(m,n-2) - \frac{n-1}{m+1} I(m,n),
\end{aligned}
$$

因此

$$
I(m,n) = -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I(m,n-2),\quad m,n = 2,3,\cdots.
$$

所以

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{1}{m+n}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I(m-2,n) \\
&= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I(m,n-2),\quad m,n = 2,3,\cdots,
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
J(m,n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m} x \sin^{n} x \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{m+n} J(m,n-2) \\
&= \frac{n-1}{m+n} J(m,n-2)
\end{aligned}
$$

且

$$J(m,n)=\frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),$$

综上，

$$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),\ m,n=2,3,\cdots.$$

证毕。

例 2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$。

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x=J(4,3)=\frac{2}{4+3}J(4,1)=\frac{2}{7}\frac{3}{4+1}J(2,1)$

$$=\frac{2}{7}\frac{3}{5}\frac{1}{2+1}J(0,1)=\frac{2}{7}\frac{3}{5}\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{35}。$$

推论 2 $J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!},& m,n\text{不全为偶数}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2},& m,n\text{全为偶数}\end{cases}$。

证明 1) 当 m,n 不全为偶数时，m,n 或者全为奇数，或者一奇一偶。
当 m,n 全为奇数时，

$$\begin{aligned}J(m,n)&=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}J(m,n-4)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{2}{m+3}J(m,1)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{2}{m+3}\frac{m-1}{m+1}J(m-2,1)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{2}{m+3}\frac{m-1}{m+1}\cdots\frac{2}{3+1}J(1,1)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{2}{m+3}\frac{m-1}{m+1}\cdots\frac{2}{3+1}\frac{1}{2}\\&=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}.\end{aligned}$$

当 m,n 一奇一偶时，不妨设 m 为奇数，n 为偶数，则

$$\begin{aligned}J(m,n)&=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}J(m,n-4)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}J(m,0)\\&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}\frac{m-1}{m}J(m-2,0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}\frac{m-1}{m}\cdots\frac{2}{3}J(1,0)\\
&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}\frac{m-1}{m}\cdots\frac{2}{3}\\
&=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}.
\end{aligned}
$$

因此，当 m,n 不全为偶数时， $J(m,n)=\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}$ 。

2) 当 m,n 全为偶数时，

$$
\begin{aligned}
J(m,n)&=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)\\
&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}J(m,n-4)\\
&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}J(m,0)\\
&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}\frac{m-1}{m}J(m-2,0)\\
&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}\frac{m-1}{m}\cdots\frac{1}{2}J(0,0)\\
&=\frac{n-1}{m+n}\frac{n-3}{m+n-2}\cdots\frac{1}{m+2}\frac{m-1}{m}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\\
&=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

因此，当 m,n 全为偶数时， $J(m,n)=\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2}$ 。

证毕。

定理 3 [2] 设函数 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续，则

$$
\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & 当f(x)为偶函数时;\\ 0, & 当f(x)为奇函数时;\\ \int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x, & 当f(x)为一般函数时.\end{cases}
$$

推论 3 1) 若 $f(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称，则对于任意的 $a>0$， $\int_{x_0-a}^{x_0+a}f(x)\mathrm{d}x=0$；

2) 若 $f(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称，则对于任意的 $a>0$， $\int_{x_0-a}^{x_0+a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{x_0}^{x_0+a}f(x)\mathrm{d}x$ 。

定理 4 [8] 1) 两个奇函数之积为偶函数；

2) 奇函数与偶函数之积为奇函数；

3) 两个偶函数之积为偶函数。

推论 4 1) 若 $f(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称，$g(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称，则 $f(x)g(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称；

2) 若 $f(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称， $g(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称，则 $f(x)g(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称；

3) 若 $f(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称， $g(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称，则 $f(x)g(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称。

定理 5 [8] 1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上是奇函数，则 $f^{2k}(x)$ 是偶函数，$f^{2k+1}(x)$ 是奇函数，$k=0,1,\cdots$；

2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上是偶函数，则 $f^{k}(x)$ 都是偶函数，$k=0,1,\cdots$。

推论 5 1) 若 $f(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称，则 $f^{2k}(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称，$f^{2k+1}(x)$ 关于 $(x_0,0)$ 中心对称，$k=0,1,\cdots$；

2) 若 $f(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称，则 $f^{k}(x)$ 关于 $x=x_0$ 轴对称，$k=0,1,\cdots$。

定理 6

$$\int_0^{\pi}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\text{为奇数}\\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x, & m\text{为偶数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & m\text{为奇数}\\ 2\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m\text{为偶数},n\text{为奇数}\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\pi, & m,n\text{均为偶数}\end{cases}$$

，其中 m,n 为正整数。

证明 因为 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 轴对称，由推论 5，$\sin^n x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 轴对称。

因为 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 中心对称，则当 m 为奇数时，由推论 5，$\cos^m x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 中心对称。由推论 4，$\cos^m x\sin^n x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 中心对称。因此，由推论 3，$\int_0^{\pi}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x=0$。

当 m 为偶数时，由推论 5，$\cos^m x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 轴对称。由推论 4，$\cos^m x\sin^n x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 轴对称。因此，由推论 3，$\int_0^{\pi}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$。再由推论 2，定理得证。

例 3 计算 $\int_0^{\pi}\cos^{99}x\sin^3 x\mathrm{d}x$。

解 因为 $m=99,n=3$，所以 m 为奇数，由定理 6，$\int_0^{\pi}\cos^{99}x\sin^3 x\mathrm{d}x=0$。

例 4 计算 $\int_0^{\pi}\cos^{10}x\sin^5 x\mathrm{d}x$。

解 因为 $m=10,n=5$，所以 m 为偶数，n 为奇数，由定理 6，

$$\int_0^{\pi}\cos^{10}x\sin^5 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x\sin^5 x\mathrm{d}x=2J(10,5)=2\frac{9!!4!!}{15!!}=\frac{16}{2145}.$$

例 5 计算 $\int_0^{\pi}\cos^{8}x\sin^4 x\mathrm{d}x$。

解 因为 $m=8,n=4$，所以 m,n 均为偶数，由定理 6，

$$\int_0^{\pi}\cos^{8}x\sin^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{8}x\sin^4 x\mathrm{d}x=2J(8,4)=2\frac{7!!3!!}{12!!}\frac{\pi}{2}=\frac{7!!3!!}{12!!}\pi=\frac{7\pi}{2^{10}}.$$

3. 结语

上述几个例题如果用其他方法来做，可能计算比较困难，且容易出错，但是将上面的定理和推

论应用到例题后，计算变得比较快捷，且不易出错。

通过上面的讨论，得到了形如

$$\int_0^{\pi} \cos^m x \sin^n x \mathrm{d}x \quad (\text{其中 } m,n \text{ 为正整数}) \tag{1}$$

的一类含三角函数的定积分计算公式，即定理 6，并举例说明了计算公式的实用性和便捷性。在学习中，如果遇到这类含三角函数的定积分，只需根据 m,n 的值，直接代入相应的计算公式即可得到结果。

三角函数的定积分在数学分析教材中还有很多类型，本文只是针对积分(1)进行了归纳总结。适当对不同类型的定积分进行总结，有利于掌握好定积分的计算方法与技巧，同时可以提高自身的学习效率，节省计算时间。

参考文献

[1] 王凡彬. 一类三角函数的定积分问题[J]. 内江师范学院学报, 2013, 28(2): 98-100.

[2] 高磊, 马奎奎. 被积函数含有绝对值的定积分研究[J]. 科学咨询, 2020(23): 109-110.

[3] 冯丽萍. 几类特殊三角函数的积分[J]. 科技展望, 2016, 26(1): 200.

[4] 陈翠玲, 韩彩虹, 李智, 李明. 三角函数系性质的推广及其在定积分中的应用[J]. 山东农业工程学院学报, 2019, 36(11): 54-56.

[5] 辛兴云, 江华. 计算定积分的一个定理及应用[J]. 邢台学院学报, 2003, 18(2): 73-74.

[6] 魏章志, 陈浩. 三角函数有理式积分技巧[J]. 高等数学研究, 2011, 14(1): 77-79.

[7] 廖辉, 廖平. 一类含三角函数定积分的一个注记[J]. 绵阳师范学院学报, 2012, 31(8): 14-17.

[8] 华东师范大学数学系. 数学分析第四版上册[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.