Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(8), 695-700
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.108082

Hans汉斯

Strict Mittag-Leffler Modules over Gorenstein Injective Modules

Jingjing Lei, Xiaoyan Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 804288102@qq.com

Received: Jul. 15th, 2020; accepted: Aug. 5th, 2020; published: Aug. 12th, 2020

Abstract

In this paper, the strict Mittag-Leffler module over the class *GI* of Gorenstein injective modules is introduced, and some homological properties of *GI*-projective module at the strict Mittag-Leffler module over the class GI are proved by cotorsion pair.

Keywords

Strict Mittag-Leffler Module, *GI*-Projective Module, Gorenstein Injective Module

Gorenstein内射模上严格的Mittag-Leffler模

雷靖靖，杨晓燕

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 804288102@qq.com

收稿日期：2020年7月15日；录用日期：2020年8月5日；发布日期：2020年8月12日

摘　要

本文介绍了**Gorenstein**内射模的类***GI***上的严格的**Mittag-Leffler**模，并用余挠对证明了***GI***-投射模在**Gorenstein**内射模的类***GI***上的严格的**Mittag-Leffler**模的一些同调性质。

关键词

严格的Mittag-Leffler模，*GI*-投射模，Gorenstein内射模

文章引用：雷靖靖，杨晓燕. Gorenstein 内射模上严格的 Mittag-Leffler 模[J]. 理论数学, 2020, 10(8): 695-700.
DOI: 10.12677/pm.2020.108082

1. 引言

设 $(F_\alpha, u_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I}$ 是 abelian 群上的逆向系统，$u_{\alpha\beta}: A_\beta \to A_\alpha$ 是 R-模同态，其中 $\alpha \le \beta$。考虑 $(F_\alpha, u_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I}$ 的逆向极限 A，它是由典范映射 $S_i: A \to A_i$，$i \in I$ 诱导的。称逆向系统 $(F_\alpha, u_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I}$ 满足严格的 Mittag-Leffler 条件，如果对于任意的 $\alpha \in I$，存在 $j = j(\alpha)$，其中 $j \ge i$，使得 $\mathrm{Im}(A_j \to A_i) \to \mathrm{Im}(A \to A_i)$。

设 M 是左 R-模，假定 $M = \underrightarrow{\lim} F_\alpha$，其中 $F = (F_\alpha, u_{\beta\beta}: F_\alpha \to F_\beta)_{\alpha,\beta\in I}$ 是有限表示模的正向系统。设 B 是左 R-模类，如果 $Hom_R(F, B)$ 满足严格的 Mittag-Leffler 条件，那么称 M 在 B 上是严格的 Mittag-Leffler 模。Raynaud 和 Gruson 在文献[1]中定义了 Mittag-Leffler 模和严格的 Mittag-Leffler 条件。Zimmermann 在文献[2]中进一步定义了严格的 Mittag-Leffler 模。近年来，严格的 Mittag-Leffler 条件成功地解决了同调代数和表示论中的一些问题。

Enochs 和 Jenda 在文献[3]中研究了 Gorenstein 内射模。Enochs 和 Iacob 在文献[4]中证明了如果 R 是交换 Noetherian 环，使得任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，那么 Gorenstein 内射模的类 GI 是包络类。其后，Iacob 在文献[5]中将该结果推广到双边 Noetherian 环上，证明了如果 R 是双边 Noetherian 环，使得任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，那么 Gorenstein 内射模的类 GI 是包络类。杨彦炯，朱晓胜和颜晓光在文献[6]中证明了如果 R 是左 Noetherian 环，使得所有内射模在 GI 上是严格的 Mittag-Leffler 模，那么任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模。杨彦炯和颜晓光在文献[7]中研究了 GI 上严格的 Mittag-Leffler 模并引入 GI-投射模，并且在 Noetherian 上证明了有限表示 GI-投射模的正向极限在 GI 上是严格的 Mittag-Leffler 模。受以上工作启发，我们在余挠对和对偶对上进一步研究了 Gorenstein 内射模上严格的 Mittag-Leffler 模。

本文所提到的环均指有单位元的结合环，模均指左 R-模。用 I，P，F 分别表示内射，投射，平坦左 R-模的类，用 R-Mod 表示 R-模范畴。

2. 预备知识

引理 1.1 [7] 设 M 和 N 是左 R-模，则以下条件等价：

(1) 设 $(F_\alpha, u_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ 是任意有限表示模的正向系统，且 $M = \underrightarrow{\lim} F_\alpha$，则对任意的 $\alpha \in I$，存在 $\beta \ge \alpha$，使得对任意同态 $f: F_\beta \to N$，存在同态 $\beta: M \to N$，满足 $fu_{\beta\alpha} = \beta u_\alpha$。见下图 1。

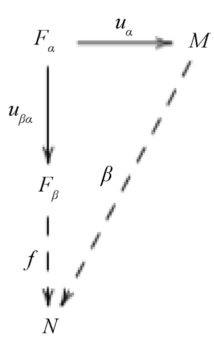

Figure 1
图 1

(2) 对任意可除 Abelian 群 D，自然变 $\phi: Hom_Z(N,D)_R \otimes M \to Hom_Z(Hom_R(M,N),D)$ 被定义为 $\phi(f\otimes m): g \mapsto f(g(m))$，其中 $f \in Hom_Z(N,D)$，$m \in M$，$g \in Hom_R(M,N)$，则 ϕ 是单的。

定义 1.2 称模 M 是 N 上的严格的 Mittag-Leffler 模，如果满足以上等价条件之一。

我们用 SML(N)表示 N 上严格的 Mittag-Leffler 模的类。设 N 是左 R-模的类，如果对任意的 $B \in N$，有 $M \in \mathrm{SML}(B)$，那么 $M \in \mathrm{SML}(N)$。称 M 是严格的 Mittag-Leffler 模，如果 $N = R\text{-}Mod$。

注记 1.3 (1) 如果模 M 是有限表示的，那么由([8]，定理 3.2.11)知，引理 1.1(2)中自然变换 ϕ 是同构的。

(2) 由([9]，引理 8.9)知，SML(N)关于直和封。

定义 1.4 设 D 是 R-模的类。称 (A,B) 是余挠对，如果 $A = {}^{\perp}B$ 且 $B = A^{\perp}$。称 (A,B) 是完备的余挠对，如果对任意的模 M，存在正合列 $0 \to M \to B_1 \to A_1 \to 0$ 和 $0 \to B_2 \to A_2 \to M \to 0$，其中 $A_1, A_2 \in A$，$B_1, B_2 \in B$。称 (A,B) 是完全的余挠对，如果 B 是包络类，A 是覆盖类。称 (A,B) 是遗传的余挠对，如果对任意的 $A_1 \in A$，$B_1 \in B$，$i \ge 1$，有 $Ext_R^i(A_1,B_1)=0$。

定义 1.5 设 D 是 R-模的类，则

$$^{\perp}D = \left\{ M \in R\text{-}Mod \mid Ext_R^1(M,A)=0, A \in D \right\}$$

$$D^{\perp} = \left\{ C \in R\text{-}Mod \mid Ext_R^1(A,C)=0, A \in D \right\}$$

定义 1.6 称左 R-模 M 是 Gorenstein 内射模，如果存在内射左 R-模的正合序列

$$I: \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

使得 $M = Ker(I^0 \to I^1)$，且对任意内射左 R-模 I'，序列 $Hom(I',I)$ 正合。

定义 1.7 称左 R-模 N 是 Gorenstein 平坦模，如果存在平坦左 R-模的正合序列

$$F: \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots$$

使得 $N = Ker(F^0 \to F^1)$，且对任意内射左 R-模 I''，有 $I'' \otimes_R F$ 正合。

我们用 GI 和 GF 分别表示 Gorenstein 内射模类和 Gorenstein 平坦模类。

定义 1.8 [5] 设 M 是左 R-模类，C 是右 R-模类。称 (M,C) 是对偶对，如果满足以下条件：

(1) 对任意的 R-模 A，$A \in M \Leftrightarrow A$ 的特征模属于 C。

(2) C 关于直和项和有限直和封闭。

引理 1.9 [5] [6] 设 R 是双边 Noetherian 环，使得 $I \subseteq \mathrm{SML}(GI)$，则 GI 是包络类。

引理 1.10 [10] 设 D 是 R-模类。若 D 关于直积和正向极限封闭，则 $^{\perp}D \subseteq \mathrm{SML}(D)$。

3. 主要结果

引理 2.1 设 F 是有限表示模的正向系统 $(F_\alpha, u_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ 的正向极限。若 $F \in \mathrm{SML}(I)$，对任意的 $\beta \in I$，有 $F_\beta \in {}^{\perp}GI$，则 $F \in \mathrm{SML}(GI)$。

证明 对任意的 Gorenstein 内射模 M，我们有短正合列 $0 \to A \to B \to M \to 0$，其中 $B \in I$，$A \in GI$。又因为 $F_\beta \in {}^{\perp}GI$，即 $Ext_R^1(F_\beta, GI)=0$，所以对上述的 $A \in GI$，有 $Ext_R^1(F_\beta, A)=0$。我们用函子 $Hom(F_\beta, -)$ 作用短正合列 $0 \to A \to B \to M \to 0$，则有正合列 $0 \to Hom(F_\beta, A) \to Hom(F_\beta, B) \to Hom(F_\beta, M) \to 0$。因此对任意同态 $h: F_\beta \to M$，以及满同态 $\Pi: B \to M$，存在同态 $g: F_\beta \to B$，满足等式 $h = \Pi g$。又因为 $F \in \mathrm{SML}(I)$，所以由引理 1.1(1)知，对上述同态 g，存在同态 $u: F \to B$，满足等式 $gu_{\beta\alpha} = uu_\alpha$。考虑以下交换图 2。

我们令 $\Phi = \Pi u: F \to M$，那么有 $\Phi u_\alpha = \Pi u u_\alpha = \Pi g u_{\beta\alpha} = h u_{\beta\alpha}$，由引理 1.1(1)知，$F \in \mathrm{SML}(M)$，再由 M 的任意性知，有 $F \in \mathrm{SML}(GI)$。

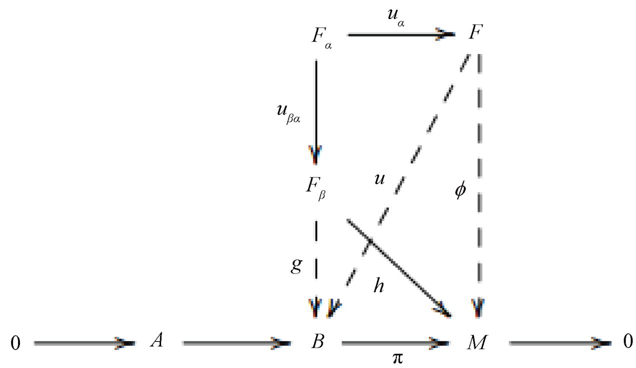

Figure 2
图 2

定义 2.2 [7] 称左 R-模 M 是 GI-投射模，如果 $M \in {}^{\perp}GI$ 。

我们用 P_{GI} 表示 GI-投射模的类。

注记 2.3 (1) $P_{GI} = {}^{\perp}GI$ 。

(2) $I \in P_{GI}$ 。

(3) 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是左 R-模短正合列。若 $A, C \in P_{GI}$ ，则 $B \in P_{GI}$ ；若 R 是左 Noetherian 环，$B, C \in P_{GI}$ ，则 $A \in P_{GI}$ 。

证明 (3)设 $A, C \in P_{GI}$ ，由定义知，$Ext_R^1(A, GI) = 0$ ，$Ext_R^1(C, GI) = 0$ ，则有 $Ext_R^1(B, GI) = 0$ ，即 $B \in P_{GI}$ 。因为 $B, C \in P_{GI}$ ，所以由定义有 $Ext_R^1(B, GI) = 0$ ，$Ext_R^1(C, GI) = 0$ 。又因为 R 是左 Noetherian 环，所以由([5]，引理 1)和(1)知，(P_{GI}, GI) 是完备遗传的余挠对，即当 $i \geq 1$ 时，上述等式仍然成立。则对任意的模 $M \in GI$ ，我们用函子 $Hom(-, M)$ 去作用短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ ，则有短正合列 $0 = Ext_R^1(B, M) \to Ext_R^1(A, M) \to Ext_R^2(C, M) = 0$ ，因此 $Ext_R^1(A, M) = 0$，即 $A \in P_{GI}$ 。

命题 2.4 设 GI 关于正向极限封闭。则 $P_{GI} \subseteq \mathrm{SML}(GI)$ 。

证明 因为 GI 关于直积封闭，所以由题设和引理 1.10 知，${}^{\perp}GI \subseteq \mathrm{SML}(GI)$，再由注记 2.3 知，$P_{GI} \subseteq \mathrm{SML}(GI)$ 。

定理 2.5 设 R 是双边 Noetherian 环。若任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，则 GI 是关于纯商模封闭的包络类。

证明 因为任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，所以由([6]，定理 4.3)知，$I \subseteq \mathrm{SML}(GI)$ 。又因为 R 是双边 Noetherian 环，所以由引理 1.9 知，GI 是包络类。再由([5]，定理 4)知，(GI, GF) 是对偶对。再次由([11]，定理 3.1)知，GI 关于纯商模封闭。

推论 2.6 设 R 是 n-Gorenstein 环，则 GI 是关于纯商模封闭的包络类。

证明 因为 R 是 n-Gorenstein 环，所以由([8]，引理 11.1.2)知，GI 关于正向极限封闭。又由注记 2.3 知，$I \in P_{GI}$ 。再由命题 2.4 知，$P_{GI} \subseteq \mathrm{SML}(GI)$，则 $I \subseteq \mathrm{SML}(GI)$ 。再次由定理 2.5 的证明知，GI 是关于纯商模封闭的包络类。

定理 2.7 设 R 是双边 Noetherian 环。若任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，${}^{\perp}GI$ 关于直积封闭，则 $GI \subseteq \mathrm{SML}(P_{GI})$ 。

证明 因为任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，所以由([5]，定理 2)知，$({}^{\perp}GI, GF^{\perp})$ 是对偶对，由([11]，定理 3.1)知，${}^{\perp}GI$ 关于纯商模和纯子模封闭。由定义知，${}^{\perp}GI$ 关于扩张封闭。再由([4]，命题 1)知，$({}^{\perp}GI, GI)$ 是完全的余挠对，即 ${}^{\perp}GI$ 是覆盖类。又因为 ${}^{\perp}GI$ 关于直积封闭。所以由([12]，

定理 3.4)知，${}^{\perp}GI$ 关于正向极限封闭。再次由引理 1.10 以及注记 2.3 知，$GI \subseteq \mathrm{SML}(P_{GI})$。

我们用 I_n 表示内射维数小于等于 n 的模类。

推论 2.8 设 R 是 n-Gorenstein 环。若任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，${}^{\perp}GI$ 关于直积封闭，则 $GI \subseteq \mathrm{SML}(I_n)$。

证明 因为 R 是 n-Gorenstein 环，所以 $P_{GI} = I_n$。再由定理 2.7 知，$GI \subseteq \mathrm{SML}(P_{GI})$，则有 $GI \subseteq \mathrm{SML}(I_n)$。

命题 2.9 设 R 是双边 Noetherian 环，使得对任意的正整数 n，有 $id_{R^{OP}} R \le n$。则对任意的可除 abelian 群 D，有 $Tor_i^R(Hom_Z(GI,D),P_{GI}) = 0$，其中 $i \ge 1$。

证明 因为 R 是双边 Noetherian 环，使得对任意的正整数 n，有 $id_{R^{OP}} R \le n$，所以由([5]，定理 8)知，任意 Gorenstein 内射模的特征模是 Gorenstein 平坦模，由([5]，定理 4)知，(GI,GF) 是对偶对，再由([11]，定理 3.1)知，GI 关于纯商模和纯子模封闭，再次由([4]，引理 2)知，GI 关于正向极限封闭。又因为 GI 关于直积封闭，所以由命题 2.4 知，$P_{GI} \subseteq \mathrm{SML}(GI)$。由注记 2.3 和([5]，引理 1)知，$(P_{GI},GI)$ 是遗传的余挠对，即 P_{GI} 是可解的，则 P_{GI} 中有足够的投射对象，且它关于满同态的核封闭。对任意的模 $M \in P_{GI}$，则 M 有投射分解 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$，其中 $P_i \in P$。我们记 $\Omega^i(M) = Ker(P_{n-1} \to P_{n-2})$ 是 M 的第 i 个合冲，其中 $i \ge 1$，由 P_{GI} 是可解的知，$\Omega^i(M) \in P_{GI}$。又因为 $P_{GI} \subseteq \mathrm{SML}(GI)$，所以有 $\Omega^i(M) \in \mathrm{SML}(GI)$。再由([10]，引理 2.5)知，对任意的可除 abelian 群 D，以及任意的模 $B \in GI$，我们有映射 $\Phi_M^i : Tor_i^R(Hom_Z(B,D),M) \to Hom_Z(Ext_R^i(M,B),D)$ 是单的，其中 $i \ge 1$。则有 $Tor_i^R(Hom_Z(B,D),M) = 0$，再次由 B 和 M 的任意性，则有 $Tor_i^R(Hom_Z(GI,D),P_{GI}) = 0$。

推论 2.10 设 R 是双边 Noetherian 环，使得对任意的正整数 n，有 $id_{R^{OP}} R \le n$，则 GI 是覆盖类。

证明 由命题 2.9 的证明知，$P_{GI} \subseteq \mathrm{SML}(N)$，再由注记 2.3 知，$I \subseteq \mathrm{SML}(GI)$。再次由([7]，引理 2.6)知，$GI$ 是覆盖类。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761060)。

参考文献

[1] Raynaud, M. and Gruson, L. (1971) Criteres de platitude et de projective. *Inventiones Mathematicae*, **13**, 1-89. https://doi.org/10.1007/BF01390094

[2] Zimmermann, W. (1997) Modules with Chain Conditions for Finite Matrix Subgroups. *Algebra*, **190**, 68-87. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.6882

[3] Enochs, E.E. and Jenda, O. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[4] Enochs, E.E. and Iacob, A. (2014) Gorenstein Injective Covers and Envelopes over Noetherian Rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **143**, 5-12. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-12232-5

[5] Iacob, A. (2017) Gorenstein Injective Covers and Envelopes over Two-Noetherian Rings. *Communications in Algebra*, **45**, 2238-2244. https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1233193

[6] Yang, Y., Zhu, X. and Yan, X. (2016) Strict Mittag-Leffler Conditions on Gorenstein Modules. *Communications in Algebra*, **44**, 1754-1766. https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1027380

[7] Yang, Y. and Xiao, Y. (2020) Strict Mittag-Leffler Modules over Gorenstein Injective Modules. *Journal of Algebra*, **19**, 2050050. https://doi.org/10.1142/S0219498820500504

[8] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. de Gruyter Expositions Mathematics, Vol. 30. Walter de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[9] Angeleri Hugel, L. and Herbera, D. (2008) Mittag-Leffler Conditions on Modules. *Indiana University Mathematics Journal*, **57**, 2459-2517. https://doi.org/10.1512/iumj.2008.57.3325

[10] Yang, Y., Zhu, X. and Yan, X. (2016) Strict Mittag-Leffler Conditions and Gorenstein Modules. *Algebras and Representation Theory*, **19**, 1451-1466. https://doi.org/10.1007/s10468-016-9626-3

[11] Holm, H. and Jøyrgensen, P. (2009) Cotorsion Pairs Induced by Duality Pairs. *Communications in Algebra*, **1**, 621-633. https://doi.org/10.1216/JCA-2009-1-4-621

[12] Dai, G. and Ding, N. (2018) Coherent Rings and Absolutely Pure Covers. *Communications in Algebra*, **46**, 1267-1271. https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1344693