Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1097-1105
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011131

Hans汉斯

一类非线性四阶边值问题正解的存在性

杨丽娟

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 18419068954@163.com

收稿日期：2020年10月30日；录用日期：2020年11月20日；发布日期：2020年11月27日

摘 要

研究了非线性四阶常微分方程(ordinary differential equation，简称ODE)边值问题 $\begin{cases} u^{(4)}(t)=rf\left(t,u(t),u'(t)\right), & 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0, \end{cases}$ 其中r是一个正参数，非线性项 $f:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为连续函数，且存在常数 $a,b,c,d\in[0,\infty)$ 满足 $a+b>0, c+d>0$，使得当 $u\to 0$ 时， $f(t,u,p)=au+bp+o(|(u,p)|)$，当 $u\to\infty$ 时， $f(t,u,p)=cu+dp+o(|(u,p)|)$，通过运用全局分歧理论，证明了该问题正解的存在性。

关键词

四阶ODE，正解，分歧理论，Krein-Rutman定理

The Existence of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Fourth-Order Boundary Value Problems

Lijuan Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 18419068954@163.com

Received: Oct. 30th, 2020; accepted: Nov. 20th, 2020; published: Nov. 27th, 2020

Abstract

This article studies the boundary value problems of nonlinear fourth-order ordinary differential equations $\begin{cases} u^{(4)}(t)=rf\left(t,u(t),u'(t)\right), & 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0, \end{cases}$ where r is a positive parameter, nonlinearity

文章引用: 杨丽娟. 一类非线性四阶边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1097-1105.
DOI: 10.12677/pm.2020.1011131

$f:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ is a continuous function, and there exist four constants $a,b,c,d\in[0,\infty)$ satisfying $a+b>0, c+d>0$, so when $u\to 0$, $f(t,u,p)=au+bp+o(|(u,p)|)$; when $u\to\infty$, $f(t,u,p)=cu+dp+o(|(u,p)|)$. The existence of positive solutions is obtained by using the global bifurcation theorem.

Keywords

Fourth-Order ODE, Positive Solution, Bifurcation Theorem, Krein-Rutman Theorem

1. 引言

本文研究非线性四阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=rf(t,u(t),u'(t)), & 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 r 是一个正参数，非线性项 $f:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为连续函数。该方程的实际应用背景是平衡状态下的弹性梁，其一端固定而另一端自由。对于该类问题的可解性，许多学者用不同的方法研究过[1]-[7]。比如，文献[1] [3] [4]运用锥上的不动点定理研究了其正解的存在。文献[2]通过单调迭代方法获得了其单调正解的存在性。然而，文献[1]-[7]虽然都得到了问题(1)解或正解的存在性，但由于所使用的工具的局限性，均无法得到问题(1)正解的全局结构。

2005 年，Ma [8]率先研究了四阶两点边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u(t),u''(t)), & 0<t<1, \\ u(0)=u''(0)=u(1)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

其中非线性项 f 满足：

(C1) $f:[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,0]\to[0,\infty)$ 为连续函数，且存在常数 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in[0,\infty)$ 满足 $\alpha_1+\beta_1>0,\alpha_2+\beta_2>0$，使得

$$f(t,u,p)=\alpha_1 u-\beta_1 p+o(|(u,p)|)\text{，当 }|(u,p)|\to 0\text{ 时}$$

对 $t\in[0,1]$ 一致成立，及

$$f(t,u,p)=\alpha_2 u-\beta_2 p+o(|(u,p)|)\text{，当 }|(u,p)|\to \infty\text{ 时}$$

对 $t\in[0,1]$ 一致成立，这里 $|(u,p)|:=\sqrt{u^2+p^2}$。

(C2) $f(t,u,p)>0$ 对 $t\in[0,1]$，$(u,p)\in([0,\infty)\times(-\infty,0])\setminus\{(0,0)\}$。

(C3) 存在常数 $\alpha_0,\beta_0\in[0,\infty)$ 满足 $\alpha_0+\beta_0>0$，使得

$$f(t,u,p)\ge \alpha_0 u-\beta_0 p,\ (t,u,p)\in[0,1]\times[0,\infty)\times(-\infty,0].$$

设 $\lambda_1(\alpha_i,\beta_i)(i=1,2)$ 是广义线性特征值问题

$$u^{(4)}(t)=\lambda\left(\alpha_i u(t)-\beta_i u''(t)\right),\quad 0<t<1,$$
$$u(0)=u''(0)=u(1)=u''(1)=0$$

的正特征值。

在满足以上假设的条件下，文献[8]得到如下结果：

定理 A 假设条件(C1)~(C3)成立。若下列条件之一成立：

i) $\lambda_1(\alpha_1,\beta_1)<1<\lambda_1(\alpha_2,\beta_2)$；

ii) $\lambda_1(\alpha_2,\beta_2)<1<\lambda_1(\alpha_1,\beta_1)$，

则问题(2)至少存在一个正解。

值得注意的是，文献[8]不仅得到了问题(2)正解的存在性，而且运用全局分歧理论得到了问题(2)正解的全局结构。现在自然要问，对于问题(1)，是否也可以通过运用分歧理论，在非线性项 f 满足一定的条件下，得到问题(1)正解的全局结构呢？受文献[8]启发，本文通过运用全局分歧理论，获得了问题(1)正解的全局结构。

本文总假定：

(H1) $f:[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为连续函数，且存在常数 $a,b,c,d\in[0,\infty)$ 满足 $a+b>0$，$c+d>0$，使得

$$f(t,u,p)=au+bp+o(|(u,p)|)\text{，当 }|(u,p)|\to 0\text{ 时}$$

对 $t\in[0,1]$ 一致成立，及

$$f(t,u,p)=cu+dp+o(|(u,p)|)\text{，当 }|(u,p)|\to \infty\text{ 时}$$

对 $t\in[0,1]$ 一致成立，这里 $|(u,p)|:=\sqrt{u^2+p^2}$。

(H2) $f(t,u,p)>0$ 对 $t\in[0,1]$，$(u,p)\in([0,\infty)\times[0,\infty))\setminus\{(0,0)\}$。

(H3) 存在常数 a_0,b_0 满足 $a_0+b_0>0$ 使得 $f(t,u,p)\ge a_0u+b_0p$，$(t,u,p)\in[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)$。

2. 预备知识

设 $C[0,1]$ 为实值连续函数构成的空间，其在范数

$$\|u\|_C=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$$

下构成 Banach 空间。

令 $X=\{u\in C^3[0,1]\mid u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0\}$，其在范数

$$\|u\|_X=\max\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\|u''\|_C,\|u'''\|_C\}$$

下构成 Banach 空间。

设 $(E,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间，$K\subset E$ 是 E 中的一个锥。$A:[0,\infty)\times K\to E$ 是一个非线性算子。如果 $A([0,\infty)\times K)\subseteq K$，则称非线性算子 A 是正的。若 A 是连续的且 A 将 $[0,\infty)\times K$ 中的有界集映为 E 中的准紧子集，则称非线性算子 A 是 K-全连续的。设 $V:E\to E$ 是一个正线性算子，如果 $A(\lambda,u)\ge\lambda V(u)$ 对 $(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K$ 成立，则称 V 是关于 A 的线性弱函数。

设 B 是 E 上的线性连续算子，令 $r(B)$ 为 B 的谱半径，定义集合 $C_K(B)=\{\lambda\in[0,\infty)\mid$存在 $x\in K$ 且

$\|x\|=1$，使得 $x=\lambda Bx\}$。

引理 1 [9]假设

i) K 有非空的内部，且 $E=\overline{K-K}$，

ii) $A:[0,\infty)\times K\to E$ 是 K-全连续的正算子，对 $\lambda\in\mathbf{R}$，$A(\lambda,0)=0$ 且

$$A(\lambda,u)=\lambda Bu+F(\lambda,u),$$

其中 $B:E\to E$ 是线性强正紧算子且 $r(B)>0$，$F:[0,\infty)\times K\to E$ 满足当 $\|u\|\to 0$ 时，$\|F(t,u)\|=o(\|u\|)$ 对 λ 局部一致成立，则集合

$$D_K(A)=\{(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K\mid u=A(\lambda,u),u\neq 0\}\cup\left(r(B)^{-1},0\right)$$

存在一个无界连通分支 $\mathcal{C}$ 且 $\left(r(B)^{-1},0\right)\in\mathcal{C}$。更进一步，如果 V 是 A 的一个线性弱函数，且存在 $(\mu,y)\in(0,\infty)\times K$，使得 $\|y\|=1$ 且 $\mu Vy\geq y$，则

$$\mathcal{C}\subseteq\{D_K(A)\cap([0,\mu]\times K)\}.$$

引理 2 [9] (Krein-Rutman 定理)设 E 是一个 Bannach 空间，$K\subset E$ 是一个锥满足 $\overline{K\setminus K}=E$。设 $T\in L(E)$ 是一个紧的正算子，并且 $r(T)>0$，则 $r(T)$ 是 T 的具有正特征函数的正特征值。

引理 3 若 $\varphi\in C[0,1],u\in C^4[0,1]$，则线性边值问题

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=\varphi(t), & t\in(0,1),\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0\end{cases}$$

存在唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G_1(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}s^2(3t-s), & 0\leq s\leq t\leq 1,\\ \dfrac{1}{6}t^2(3s-t), & 0\leq t\leq s\leq 1\end{cases}$$

而

$$u'(t)=\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G_2(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}s^2, & 0\leq s\leq t\leq 1,\\ ts-\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leq t\leq s\leq 1\end{cases}$$

为了研究问题(2)，需要考虑线性特征值问题

$$\begin{cases}u^{(4)}=\lambda(\alpha u+\beta u'), & 0<t<1,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0\end{cases}\tag{3}$$

其中 $(\alpha,\beta)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$ 均为常数且满足 $\alpha+\beta>0$。

定义 1 [9] 如果 λ 使得问题(3)有非平凡解，则称 λ 是问题(3)的广义特征值。

接下来，定义锥

$$P=\left\{u\in X\mid u(t)\geq 0,u'(t)\geq 0,t\in[0,1]\right\},$$

则 P 是正规的且有非空内部， $X=\overline{P\setminus P}$ 。

对于线性特征值问题

$$\begin{cases}u^{(4)}=\lambda(au+bu'), & 0<t<1,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0\end{cases}\tag{4}$$

定义算子 $T:P\to C[0,1]$ 为

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1 G_1(t,s)au(s)\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G_2(t,s)bu(s)\mathrm{d}s.$$

下证 $T(P\setminus\{0\})\subset\operatorname{int}P$ 且 $T:P\to P$ 是全连续的。

引理 4 $T(P\setminus\{0\})\subset\operatorname{int}P$ 。

证明 根据锥 P 的定义 $P\setminus\{0\}$ 意味着 $u(t)>0$ ，由边界条件 $u(0)=0$ 知，此时 $t\in(0,1]$，故对任意的 $u\in P\setminus\{0\}$ ，

$$(Tu)(t)=\lambda\int_0^1 G_1(t,s)au(s)\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G_2(t,s)bu(s)\mathrm{d}s>0.$$

因此 $Tu(t)\subset\operatorname{int}P$ ，即 $T(P\setminus\{0\})\subset\operatorname{int}P$ 。

引理 5 $T:P\to P$ 是全连续的。

证明 对任意的 $t\in[0,1]$，若存在一列 $u_n(t)\to u(t)(n\to\infty)$ 于 P，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|Tu_n(t)-Tu(t)\right|&=\lim_{n\to\infty}\lambda\left|\int_0^1 G_1(t,s)au_n(s)\mathrm{d}s-\int_0^1 G_1(t,s)au(s)\mathrm{d}s\right.\\&\quad\left.+\int_0^1 G_2(t,s)bu_n(s)\mathrm{d}s-\int_0^1 G_2(t,s)bu(s)\mathrm{d}s\right|\\&\leq\lim_{n\to\infty}\lambda\int_0^1 G_1(t,s)a\left|u_n(s)-u(s)\right|\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G_2(t,s)b\left|u_n(s)-u(s)\right|\mathrm{d}s\\&=0\end{aligned}$$

这表明当 $u_n(t)\to u(t)(n\to\infty)$ 时，有 $Tu_n(t)\to Tu(t)$，由 Heine 定理，T 连续且在 P 中一致有界。

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\dfrac{6\epsilon}{\lambda\|u\|_C(2a+3b)}>0$，使得 $|t_1-t_2|<\delta,t_1,t_2\in[0,1]$ 及 $u\in P$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|Tu(t_1)-Tu(t_2)\right|&=\lambda\left|\int_0^1 G_1(t_1,s)au(s)\mathrm{d}s-\int_0^1 G_1(t_2,s)au(s)\mathrm{d}s\right.\\&\quad\left.+\int_0^1 G_2(t_1,s)bu_n(s)\mathrm{d}s-\int_0^1 G_2(t_2,s)bu(s)\mathrm{d}s\right|\\&\leq\lambda\left|\int_{t_1}^{t_2}G_1(t,s)au(s)\mathrm{d}s\right|+\lambda\left|\int_{t_1}^{t_2}G_2(t,s)bu(s)\mathrm{d}s\right|\\&\leq\lambda\|u\|_C\left|\int_{t_1}^{t_2}G_1(t,s)\mathrm{d}s\right|+\lambda b\|u\|_C\left|\int_{t_1}^{t_2}G_2(t,s)\mathrm{d}s\right|\\&\leq\lambda a\|u\|_C\cdot\frac{1}{3}|t_1-t_2|+\lambda b\|u\|_C\cdot\frac{1}{2}|t_1-t_2|\\&=\frac{\lambda\|u\|_C(2a+3b)}{6}|t_1-t_2|<\varepsilon\end{aligned}$$

因此 T 等度连续。由 Arzela-Ascoli 定理，T 全连续。

由引理 4，T 是强正算子，故 T 一定是正算子，又由引理 5，T 是紧算子。结合引理 2，T 存在一个

正特征值 $\lambda_1(a,b)$，且 $\lambda_1(a,b)$ 具有正特征函数 $\varphi_1(t)$。同理证得广义特征值问题

$$\begin{cases} u^{(4)} = \lambda(cu + du'), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

存在一个正特征值 $\lambda_1(c,d)$，且 $\lambda_1(c,d)$ 具有正特征函数 $\phi_1(t)$。

3. 主要结果

定理 1 假设(H1)~(H3)成立。若下列条件之一成立：

i) $\lambda_1(a,b) < r < \lambda_1(c,d)$；

ii) $\lambda_1(c,d) < r < \lambda_1(a,b)$，

则问题(1)至少存在一个正解。

定义算子 $L: D(L) \to C[0,1]$ 为

$$Lu = u^{(4)}, \quad u \in D(L)$$

其中 $D(L) = \{u \in C^4[0,1] \mid u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0\}$。结合引理 5 知，算子 $L^{-1}: C[0,1] \to D(L)$ 是紧的。

令 $\zeta, \xi \in C([0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty))$ 使得

$$f(t,u,p) = au + bp + \zeta(t,u,p),$$
$$f(t,u,p) = cu + dp + \xi(t,u,p)$$

显然，由(H1)知

$$\lim_{|(u,p)|\to 0} \frac{\zeta(t,u,p)}{|(u,p)|} = 0，\text{ 对 } t \in [0,1] \text{ 一致成立，}$$

$$\lim_{|(u,p)|\to \infty} \frac{\xi(t,u,p)}{|(u,p)|} = 0，\text{ 对 } t \in [0,1] \text{ 一致成立。}$$

令

$$\tilde{\xi}(r) = \max\{|\xi(t,u,p)| : 0 \le |(u,p)| \le r\},$$

则 $\tilde{\xi}(r)$ 非减且 $\lim_{r\to\infty} \frac{\tilde{\xi}(r)}{r} = 0$。

考虑分歧问题

$$Lu = \lambda r(au + bu') + \lambda r\zeta(t,u,u') \tag{6}$$

从平凡解 $u \equiv 0$ 处产生的分歧。由引理 3，问题(6)等价于

$$u(t) = \lambda\left[\int_0^1 G_1(t,s) rau(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 G_2(t,s) rbu(s)\mathrm{d}s\right] + \lambda\int_0^1 G_1(t,s) r\zeta(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s := A(\lambda,u)(t).$$

定义 $B: X \to X$ 为

$$Bu(t) := \int_0^1 G_1(t,s) rau(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 G_2(t,s) rbu(s)\mathrm{d}s.$$

由引理 4，B 是 X 上的强正算子，又根据引理 5，$B: X \to X$ 全连续。故由文献[10] (定理 3.2)知，

$$r(B)=\left[\lambda_1(a,b)\right]^{-1}.$$

定义 $F:[0,\infty)\times P\to X$ 为

$$F(\lambda,u)(t):=\lambda\int_0^1 G_1(t,s)r\zeta(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s.$$

则对任意有界的 λ，

$$\begin{aligned}\|F(\lambda,u)\|_X=\max_{0\le t\le 1}\Bigg\{&\left|\lambda\int_0^1 G_1(t,s)r\zeta(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|,\left|\lambda\int_0^1 G_2(t,s)r\zeta(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|\\&\left|\lambda\int_0^1\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t}r\zeta(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|,\left|\lambda\int_0^1\frac{\partial^2 G_2(t,s)}{\partial t^2}r\zeta(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right|\Bigg\}\\\le{}& C_1\left\|\zeta(t,u(t),u'(t))\right\|_C\end{aligned}$$

则

$$\lim_{\|u\|_X\to 0}\frac{\|F(\lambda,u)\|_X}{\|u\|_X}\le\lim_{\|u\|_X\to 0}\frac{C_1\|\zeta(t,u,u')\|_C}{\|u\|_X}\le\lim_{\|u\|_C\to 0}\frac{C_1\|\zeta(t,u,u')\|_C}{\|u\|_C}=0,$$

即 $\|F(\lambda,u)\|_X=o(\|u\|_X)$ 关于 λ 局部一致。

结合条件(H2)，引理 1 和引理 4，若 $\lambda>0$ 且 (λ,u) 是(6)的一个非平凡解，则 $u\in\operatorname{int}P$ 且存在集合

$$\{(\lambda,u)\in(0,\infty)\times P:u=A(\lambda,u),u\in\operatorname{int}P\}\cup\{(\lambda_1(a,b),0)\}$$

的一个无界连通分支 $\mathcal{C}$ 使得 $(\lambda_1(a,b),0)\in\mathcal{C}$。

定理 1 的证明 显然，问题(6)的任意一个形如 (r,u) 的解均是问题(1)的解 u。将证明在 $\mathbf{R}\times X$ 中，连通分支 $\mathcal{C}$ 穿过超平面 $\{1\}\times X$。为此只需证 $\mathcal{C}$ 连接 $(\lambda_1(a,b),0)$ 到 $(\lambda_1(c,d),\infty)$。令 $(\mu_n,y_n)\in\mathcal{C}$ 满足

$$\mu_n+\|y_n\|_X\to\infty.$$

注意到，对于任意的 $n\in\mathbf{N}$，$\mu_n>0$。 因为当 $\lambda=0$ 时，问题(6)仅有平凡解，且 $\mathcal{C}\cap(\{0\}\times X)=\varnothing$。

情形 1 $\lambda_1(c,d)<r<\lambda_1(a,b)$。

在这种情况下，证明

$$(\lambda_1(c,d),\lambda_1(a,b))\subseteq\{\lambda\in\mathbf{R}\mid\exists(\lambda,u)\in\mathcal{C}\}.$$

第一步。证明若存在一个常数 $M>0$ 使得

$$\mu_n\subset(0,M],\tag{7}$$

则 $\mathcal{C}$ 连接 $(\lambda_1(a,b),0)$ 到 $(\lambda_1(c,d),\infty)$。

由式(7)知，$\|y_n\|_X\to\infty$。下面考虑问题

$$Ly_n=\mu_n(rcy_n+rdy_n')+\mu_n r\xi(t,y_n,y_n'),$$

令 $\overline{y}_n=\dfrac{y_n}{\|y_n\|_X}$，因为在 X 中是有界的，所以对于 $\overline{y}\in X$，存在 $\overline{y}_n\to\overline{y}$ (这里仍用 $\overline{y}_n\to\overline{y}$ 代表它的收敛子列)且 $\|\overline{y}\|_X=1$。进一步，由于 ξ 是非减的，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\xi(y_n(t))|}{\|y_n\|_X}=0,$$

注意到

$$\frac{\left|\xi\left(y_n(t)\right)\right|}{\|y_n\|_X} \le \frac{\tilde{\xi}\left(\left|y_n(t)\right|\right)}{\|y_n\|_X} \le \frac{\tilde{\xi}\left(\|y_n\|_C\right)}{\|y_n\|_X} \le \frac{\tilde{\xi}\left(\|y_n\|_X\right)}{\|y_n\|_X},$$

因此

$$\bar{y}(t) := \bar{\mu}\int_0^1 G_1(t,s) rc\bar{y}(s)\mathrm{d}s + \bar{\mu}\int_0^1 G_2(t,s) rd\bar{y}(s)\mathrm{d}s,$$

这里 $\bar{\mu} := \lim_{n\to\infty}\mu_n$ (这里仍用 $\bar{\mu}_n$ 代表它的收敛子列)。因此

$$L\bar{y} = \bar{\mu}\left(c\bar{y} + d\bar{y}'\right),$$

而 $\bar{\mu} = \lambda_1(c,d)$，因此 $\mathcal{C}$ 连接 $\left(\lambda_1(a,b),0\right)$ 和 $\left(\lambda_1(c,d),\infty\right)$。

第二步。将证明确实存在一个常数 M，使得对于任意的 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\mu_n\in(0,M]$。由引理 1，仅需要证明 A 有一个线性弱函数 V 且存在 $(\mu,y)\in(0,\infty)\times P$，使得 $\|y\|_X = 1$ 且 $\mu Vy \ge y$。

由(H3)，存在常数 $a_0,b_0\in[0,\infty)$ 满足 $a_0+b_0>0$，使得

$$f(t,u,p) \ge a_0u + b_0p,\quad (t,u,p)\in[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)$$

对于 $u\in X$。令

$$Vu(t) := \int_0^1 G_1(t,s) ra_0u(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 G_2(t,s) rb_0u(s)\mathrm{d}s.$$

则 V 是 A 的一个线性弱函数。进一步，存在 $\left(\lambda_1(a_0,b_0),\psi_1(t)\right)\in(0,\infty)\times P$ 使得 $\|\psi_1(t)\|_X = 1$ 且 $\lambda_1(a_0,b_0)V\psi_1(t) = \psi_1(t)$。事实上，

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(a_0,b_0)V\psi_1(t)\\
&= \lambda_1(a_0,b_0)\int_0^1 G_1(t,s) ra_0\psi_1(s)\mathrm{d}s + \lambda_1(a_0,b_0)\int_0^1 G_2(t,s) rb_0\psi_1(s)\mathrm{d}s\\
&= \psi_1(t).
\end{aligned}$$

因此，由引理 1，

$$|\mu_n| \le \lambda_1(a_0,b_0).$$

情形 2 $\lambda_1(a,b) < r < \lambda_1(c,d)$。

在这种情况下，若存在 $(\mu_n,y_n)\in\mathcal{C}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mu_n + \|y_n\|_X\right) = \infty,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \infty,$$

则

$$\left(\lambda_1(a,b),\lambda_1(c,d)\right) \subseteq \left\{\lambda\in(0,\infty) \mid \exists(\lambda,u)\in\mathcal{C}\right\},$$

且

$$\left(\{1\}\times X\right)\cap\mathcal{C} \ne \varnothing.$$

假设存在 $M>0$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\mu_n\in(0,M].$$

类似于情形 1 的第一步的证明过程，有

$$\left(\mu_n, y_n\right) \to \left(\lambda_1\left(c,d\right),\infty\right), \quad n \to \infty$$

因此 $\mathcal{C}$ 连接 $\left(\lambda_1\left(a,b\right),0\right)$ 和 $\left(\lambda_1\left(c,d\right),\infty\right)$。

参考文献

[1] Ma, R.Y. (2003) Multiple Positive Solutions for a Semipositone Fourth-Order Boundary Value Problem. *Hiroshima Mathematical Journal*, **33**, 217-227. http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/hmj/v33.2/P217-227.PDF https://doi.org/10.32917/hmj/1150997947

[2] Yao, Q.L. (2008) Monotonically Iterative Method of Nonlinear Cantilever Beam Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **205**, 432-437. https://www.sci-hub.ren/10.1016/j.amc.2008.08.044 https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.08.044

[3] Yao, Q.L. (2010) Local Existence of Multiple Positive Solutions to a Singular Cantilever Beam Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **363**,138-154. https://www.sci-hub.ren/10.1016/j.jmaa.2009.07.043 https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.07.043

[4] Benham, A. and Kosmatov, N. (2017) Multiple Positive Solutions of a Fourth-Order Boundary Value Problem. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, 78-89. https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-017-0843-8 https://doi.org/10.1007/s00009-017-0843-8

[5] Li, Y.X. and Gao Y.B. (2019) The Method of Lower and Upper Solutions for the Cantilever Beam Equations with Fully Nonlinear Terms. *Journal of Inequalities and Applications*, **136**, 1-16. https://www.sci-hub.ren/10.1186/s13660-019 -2088-5 https://doi.org/10.1186/s13660-019-2088-5

[6] Yao, Q.L. and Li Y.X. (2008) Solution and Positive Solution to Nonlnear Cantilever Beam Equations. *Journal of Southwest Jiaotong University*, **16**, 51-54. http://www.cnki.com.cn/Articile/CJFDTotal-XNJY200801008.htm

[7] Gupta, C.P. (1988) Existence and Uniqueness Theorems for the Bending of an Elastic Beam Equation. *Applicable Analysis*, **26**, 289-304. https://www.sci-hub.ren/10.1080/00036818808839715 https://doi.org/10.1080/00036818808839715

[8] Ma, R.Y. (2005) Existence of Positive Solutions of a Fourth-Order Boundary Value Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **168**, 1219-1231. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300304006964 https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.10.014

[9] 徐登洲, 马如云. 线性微分方程的非线性扰动[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 20-21.

[10] Amann, H. (1976) Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces. *Siam Review*, **18**, 620-709. https://doi.org/10.1137/1018114