Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1088-1096
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011130

Hans汉斯

形式三角矩阵环上的PGF模

薛淑娴，杨 刚*

兰州交通大学数理学，甘肃 兰州
Email: 1272944145@qq.com, *yanggang@mail.lzjtu.cn

收稿日期：2020年10月30日；录用日期：2020年11月20日；发布日期：2020年11月27日

摘 要

设 $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环，其中 A , B 是环，U 是左 B 右 A 双模。证明了若 ${}_BU$ 的平坦维数有限，U_A 平坦维数或内射维数有限，则左 T-模 $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 **PGF** 模当且仅当左 A-模 M_1 是 **PGF** 模，左B-模$M_2/Im(\varphi^M)$ 是 **PGF** 模，$\varphi^M: U\otimes_A M_1 \to M_2$ 是单射。

关键词

形式三角矩阵环，**PGF**模

PGF Modules over Formal Triangular Matrix Rings

Shuxian Xue, Gang Yang*

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu
Email: 1272944145@qq.com, *yanggang@mail.lzjtu.cn

Received: Oct. 30^{th}, 2020; accepted: Nov. 20^{th}, 2020; published: Nov. 27^{th}, 2020

* 通讯作者。

文章引用: 薛淑娴, 杨刚. 形式三角矩阵环上的PGF模[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1088-1096.
DOI: 10.12677/pm.2020.1011130

Abstract

Let $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring, where A and B are rings and U is a (B,A)-bimodule. We prove that, if ${}_BU$ has finite flat dimension, and U_A has finite flat or injective dimension, then a left T-module $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ is PGF if and only if M_1 is PGF in A-Mod, $M_2/Im(\varphi^M)$ is PGF in B-Mod and $\varphi^M : U \otimes_A M_1 \to M_2$ is a monomorphism.

Keywords

Formal Triangular Matrix Ring, PGF Module

1. 引言及预备知识

Gorenstein 同调代数起源于20世纪60年代, 当时 Auslander 和 Bridger 在文献 [1]中引入了双边诺特环上有限生成模的 G-维数的概念. 20世纪90年代, Enochs 和 Jenda 在文献 [2]中受到了 Auslander 和 Bridger 思想的启发, 引入了任意环上的 Gorenstein 投射模, Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模的概念. 为了研究 Gorenstein 投射模是否为 Gorenstein 平坦模, Ding , Li , Mao 在文献 [3] [4]中考虑了 Gorenstein 投射模的特例, 称为强 Gorenstein 平坦模. 后来, 在文献 [5]中 Gillespie 将强 Gorenstein 平坦模命名为 Ding 投射模. Yang, Liu, Liang 在文献 [6]中研究了任意环上 Ding 投射模以及 Ding 内射模的一些同调性质.

令 A , B 是环, U 是左 B 右 A 双模. 则称 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 是具有矩阵乘法和加法的形式三角矩阵环. 形式三角矩阵环在代数表示论中具有重要的作用. 这种环最初被用来构造反例, 使得环和模的理论更加丰富和具体. 自此, 形式三角矩阵环及其模的理论得到越来越多的关注. Mao 在文献 [7]中研究和刻画了形式三角矩阵环上的 Ding 同调模. 注意到 PGF 模是又一类特殊且重要的 Gorenstein 平坦模, 本文将研究和刻画形式三角矩阵环上的 PGF 模.

本文中, 所有环都是有单位元的非零结合环. 对于环 R , R-Mod 表示左 R-模范畴, Mod-R 表示右 R-模范畴. $T=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$表示形式三角矩阵环, 其中 A , B 是环, U 是左 B 右 A 双模.

接下来, 给出一些本文所需的概念和已知结论.

由文献([8]，定理 1.5)知, 左 T-模范畴 T-Mod 等价于范畴 Ω. 这里范畴 Ω 的对象是三元组 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$, 其中 $M_1\in A$-Mod, $M_2\in B$-Mod, $\varphi^M: U\otimes_A M_1\longrightarrow M_2$ 是B-态射. 从 $\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 到 $\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 的态射是 $\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$, 其中 $f_1\in \mathrm{Hom}_A(M_1,\ N_1)$, $f_2\in \mathrm{Hom}_B(M_2,\ N_2)$, 且满足如下交换图:

$$\begin{tikzcd} U\otimes_A M_1 \arrow[r, "1\otimes f_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U\otimes_A N_1 \arrow[d, "\varphi^N"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2 \end{tikzcd}$$

定义 $\widetilde{\varphi^M}$ 是 M_1 到 $\mathrm{Hom}_B(U,\ M_2)$ 的A-态射, $\widetilde{\varphi^M}(x)(u)=\varphi^M(u\otimes x)$, 其中 $u\in U,\ x\in M_1$.

类似地, 右T-模范畴 Mod-T 等价于范畴 Γ . 范畴 Γ 的对象是三元组 $W=(W_1,W_2)_{\varphi_W}$, 其中 $W_1\in$ Mod-A, $W_2\in$ Mod-B, $\varphi_W: W_2\otimes_B U\longrightarrow W_1$ 是A-态射. 从$W=(W_1,W_2)_{\varphi_W}$到$(X_1,X_2)_{\varphi_X}$的态射是 (g_1,g_2), 其中$g_1\in Hom_A(W_1,X_1)$, $g_2\in Hom_B(W_2,X_2)$, 且满足如下交换图:

$$\begin{tikzcd} W_2\otimes_B U \arrow[r, "g_2\otimes 1"] \arrow[d, "\varphi_W"'] & X_2\otimes_B U \arrow[d, "\varphi_X"] \\ W_1 \arrow[r, "g_1"] & X_1 \end{tikzcd}$$

定义 $\widetilde{\varphi_W}$ 是 W_2 到 $Hom_A(U,W_1)$ 的 B-态射, $\widetilde{\varphi_W}(y)(u)=\varphi_W(y\otimes u)$, 其中$u\in U$, $y\in W_2$.

左 T-模的序列 $0\to\begin{pmatrix}M_1{}'\\ M_2{}'\end{pmatrix}_{\varphi^{M'}}\to\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}M_1{}''\\ M_2{}''\end{pmatrix}_{\varphi^{M''}}\to 0$ 正合当且仅当序列 $0\to M_1{}'\to M_1\to M_1{}''\to 0$ 和 $0\to M_2{}'\to M_2\to M_2{}''\to 0$ 都是正合的.

设 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模, $W=(W_1,W_2)_{\varphi_W}$是右 T-模. 由 [9][命题3.6.1] 知, 有同构式

$$W\otimes_T M\cong (W_1\otimes_A M_1\oplus W_2\otimes_B M_2)/H,$$

这里$H=\langle(\varphi_W(w_2\otimes u))\otimes x_1-w_2\otimes\varphi^M(u\otimes x_1)\mid x_1\in M_1, w_2\in W_2, u\in U\rangle$.

定义1.1 称左 R-模 M 是PGF 模 [10][p.15], 如果存在一个投射左R-模的正合列$\cdots\to P^{-2}\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$, 使得 $M\cong$Ker$(P^0\to P^1)$, 并且对任意内射右 R-模 I, $I\otimes -$ 保持其正合.

2. 形式三角矩阵环上的 PGF 模

引理2.1 令 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模, $W = (W_1, W_2)_{\varphi_W}$ 是右 T-模.

(1) ([11]，定理 3.1) M 是投射左 T-模当且仅当 M_1 是投射左 A-模, $M_2/Im(\varphi^M)$ 是投射左 B-模, φ^M 是单射.

(2) ([12]，命题 1.14) M 是平坦左 T-模当且仅当 M_1 是平坦左 A-模, $M_2/Im(\varphi^M)$ 是平坦左 B-模, φ^M 是单射.

(3) ([13]，命题 5.1) W 是内射右 T-模当且仅当 W_1 是内射右 A-模, $Ker(\widetilde{\varphi_W})$ 是内射右 B-模, $\widetilde{\varphi_W} : W_2 \to Hom_A(U, W_1)$ 是满射.

引理2.2 设 X 是左 R-模. 以下等价:

(1) X 是 PGF 模.

(2) 存在一个投射左 R-模的正合列$\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to P^1 \to \cdots$, 使得 $X \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$, 并且对任意内射维数有限的右$R$-模 G, $G \otimes -$保持其正合.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 存在投射左 R-模的正合列

$$\Lambda : \cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

使得 $X \cong$Ker$(P^0 \to P^1)$, 并且对任意内射右 R-模 I, $I \otimes_R -$ 保持其正合. 假设 $id(G) =n < \infty$. 则存在正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow I^n \longrightarrow 0$$

其中每个 I^i 都是内射模. 那么可得复形的正合列

$$0 \longrightarrow G \otimes_R \Lambda \longrightarrow I^0 \otimes_R \Lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{n-1} \otimes_R \Lambda \longrightarrow I^n \otimes_R \Lambda \longrightarrow 0$$

因为 $I^0 \otimes_R \Lambda, \cdots, I^n \otimes_R \Lambda$ 是正合的, 所以由([14]，定理 6.3) 得 $G \otimes_R \Lambda$ 是正合的.

定义2.3 称 $\mathfrak{X}$是投射可解类, 如果 $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathfrak{X}$, 并且若 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ 是短正合列, 其中 $X'' \in \mathfrak{X}$, 则有$X' \in \mathfrak{X}$ 当且仅当 $X \in \mathfrak{X}$.

引理2.4 PGF 模类关于直和封闭, PGF 模类是投射可解类.

证明 因为张量积保持直和, 所以易得 PGF 模类关于直和封闭. 由([9]，定理 3.8) 知 $(\mathcal{PGF}, \mathcal{PGF}^{\perp})$ 是完全遗传余挠对, 即 PGF 模类是投射可解类.

定理2.5 令${}_BU$的平坦维数有限, U_A 平坦维数或内射维数有限, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 T-模. 则以下等价:

(1) M 是 PGF 左 T-模.

(2) M_1 是 PGF 左 A-模, $M_2/Im(\varphi^M)$ 是 PGF 左B-模, 并且 φ^M 是单射.

特别地, 若 M 是 PGF 左 T-模, 则$U\otimes_A M_1$ 是 PGF 左 B-模当且仅当 M_2 是 PGF 左B-模.

证明

(1) $\Rightarrow$ (2) 存在投射左 T-模的正合序列

$$\Delta:\cdots\to\begin{pmatrix}P_1^{-1}\\P_2^{-1}\end{pmatrix}_{\varphi^{-1}}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\partial_1^{-1}\\\partial_2^{-1}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P_1^{0}\\P_2^{0}\end{pmatrix}_{\varphi^{0}}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\partial_1^{0}\\\partial_2^{0}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P_1^{1}\\P_2^{1}\end{pmatrix}_{\varphi^{1}}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\partial_1^{1}\\\partial_2^{1}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P_1^{1}\\P_2^{1}\end{pmatrix}_{\varphi^{1}}\to\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}\partial_1^{0}\\\partial_2^{0}\end{pmatrix}$, 并且对任意内射右 T-模 I, $I\otimes_T -$ 保持其正合. 于是可得投射左 A-模的正合列

$$\Lambda_1:\cdots\longrightarrow P_1^{-1}\xrightarrow{\partial_1^{-1}}P_1^{0}\xrightarrow{\partial_1^{0}}P_1^{1}\xrightarrow{\partial_1^{1}}P_1^{2}\longrightarrow\cdots$$

其中 $M_1\cong$Ker(∂_1^0).

设E是内射右 A-模, 则存在右 T-模的正合序列

$$0\longrightarrow(E,0)\longrightarrow(E,Hom_A(U,E))\longrightarrow(0,Hom_A(U,E))\longrightarrow0$$

由此得到复形的正合列

$$0\longrightarrow(E,0)\otimes_T\Delta\longrightarrow(E,Hom_A(U,E))\otimes_T\Delta\longrightarrow(0,Hom_A(U,E))\otimes_T\Delta\longrightarrow0$$

由引理([13]，命题 5.1)和([15], p.956)得, $(E,Hom_A(U,E))$ 是内射右T-模, 因此复形 $(E,Hom_A(U,E))\otimes_T\Delta$ 是正合的.

因为 $fd(_BU)<\infty$, 由([16]，定理 6.3)知 $id(Hom_A(U,E))<\infty$, 进而 $id(0,Hom_A(U,E))<\infty$. 由引理2.1 得知复形 $(0,Hom_A(U,E))\otimes_T\Delta$ 是正合的. 因此由([14]，定理 6.3)知, $E\otimes_A\Lambda_1\cong(E,0)\otimes_T\Delta$ 是正合的, 即 M_1 是 PGF 左A-模.

设$\lambda_1:M_1\to P_1^0$, $\lambda_2:M_2\to P_2^0$ 是嵌入映射. 考虑在 $B-$Mod范畴中的交换图

$$\begin{array}{ccc}U\otimes_A M_1&\xrightarrow{1\otimes\lambda_1}&U\otimes_A P_1^0\\ {\scriptstyle\varphi^M}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle\varphi^0}\\ M_2&\xrightarrow{\lambda_2}&P_2^0\end{array}$$

因为U_A的平坦维数或内射维数有限, 由([17]，引理 2.3)和引理 2.2 得 $U\otimes_A\Lambda_1$ 是正合的. 所以 $1\otimes\lambda_1$ 是单射. 由于 φ^0 是单射. 因此由交换图得 φ^M 是单射.

对于任意$i\in\mathbb{Z}$, 存在$\overline{\partial_2^i}:P_2^i/Im(\varphi^i)\to P_2^{i+1}/Im(\varphi^{i+1})$ 使得以下图是行正合的交换图.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, dotted] & \\
0 \arrow[r] & U\otimes_A P_1^{-1} \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "1\otimes\partial_1^{-1}"] & P_2^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_2^{-1}"] & P_2^{-1}/Im(\varphi^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\overline{\partial_2^{-1}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U\otimes_A P_1^{0} \arrow[r, "\varphi^{0}"] \arrow[d, "1\otimes\partial_1^{0}"] & P_2^{0} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_2^{0}"] & P_2^{-1}/Im(\varphi^{0}) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\overline{\partial_2^{0}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U\otimes_A P_1^{1} \arrow[r, "\varphi^{1}"] \arrow[d, "1\otimes\partial_1^{1}"] & P_2^{1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_2^{1}"] & P_2^{1}/Im(\varphi^{1}) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\overline{\partial_2^{1}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U\otimes_A P_1^{2} \arrow[r, "\varphi^{2}"] \arrow[d] & P_2^{2} \arrow[r] \arrow[d] & P_2^{2}/Im(\varphi^{2}) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

因为第一列和第二列正合, 易知第三列正合, 即有投射左 B-模的正合列

$$\Xi:\cdots\longrightarrow P_2^{-1}/Im(\varphi^{-1})\xrightarrow{\overline{\partial_2^{-1}}}P_2^{0}/Im(\varphi^{0})\xrightarrow{\overline{\partial_2^{0}}}P_2^{1}/Im(\varphi^{1})\xrightarrow{\overline{\partial_2^{1}}}P_2^{2}/Im(\varphi^{2})\longrightarrow\cdots$$

由 [14][定理6.3] 知$M_2/Im(\varphi^M)\cong Ker(\overline{\partial_2^0})$.

设 G 是内射右 B-模. 则由左 $B-$模的正合列

$$0\longrightarrow U\otimes_A P_1^i\xrightarrow{\varphi^i}P_2^i\longrightarrow P_2^i/Im(\varphi^i)\longrightarrow 0\ .$$

可得到正合列

$$G\otimes_B U\otimes_A P_1^i\xrightarrow{1\otimes\varphi^i}G\otimes_B P_2^i\longrightarrow G\otimes_B(P_2^i/Im(\varphi^i))\longrightarrow 0\ .$$

所以有

$$G\otimes_B(P_2^i/Im(\varphi^i))\cong(G\otimes_B P_2^i)/Im(1\otimes\varphi^i)\cong(0,G)\otimes_T\begin{pmatrix}P_1^i\\P_2^i\end{pmatrix}_{\varphi^i}$$

因为(0,G)是内射右 T-模, 所以 $G\otimes_B\Xi\cong(0,G)\otimes_T\Delta$ 是正合的, 即证得$M_2/Im(\varphi^M)$ 是 PGF 左 B-模.

(2) $\Rightarrow$ (1) 因为 φ^M 是单射, 所以存在T-Mod 范畴中的正合序列

$$0\to\begin{pmatrix}M_1\\U\otimes_A M_1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\longrightarrow\begin{pmatrix}0\\M_2/Im(\varphi^M)\end{pmatrix}\longrightarrow 0.$$

先证$\begin{pmatrix}M_1\\U\otimes_A M_1\end{pmatrix}$是 PGF 模. 由条件知存在投射左 A-模的正合列

$$\Lambda:\cdots\longrightarrow P_1^{-1}\xrightarrow{\partial_1^{-1}}P_1^{0}\xrightarrow{\partial_1^{0}}P_1^{1}\xrightarrow{\partial_1^{1}}P_1^{2}\longrightarrow\cdots$$

使得 $M_1 \cong$Ker(∂_1^0), 并且对任意内射右 A- 模 E, $E\otimes_A -$ 保持其正合. 因为 U_A平坦维数或内射维数有限, 由([17]，引理 2.3)和引理2.2得 $U\otimes_A \Lambda$ 是正合的. 所以有投射左 T-模的正合列

$$\Upsilon:\cdots\to\begin{pmatrix}P^{-1}\\ U\otimes_A P^{-1}\end{pmatrix}_{\varphi^{-1}}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\partial^{-1}\\ 1\otimes\partial^{-1}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P^{0}\\ U\otimes_A P^{0}\end{pmatrix}_{\varphi^{0}}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\partial^{0}\\ 1\otimes\partial^{0}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P_1^{1}\\ U\otimes_A P_2^{1}\end{pmatrix}_{\varphi^{1}}\to\cdots$$

使得$\begin{pmatrix}M_1\\ U\otimes_A M_1\end{pmatrix}\cong Ker\begin{pmatrix}\partial^0\\ 1\otimes\partial^0\end{pmatrix}$. 对于任意内射右 T-模 (E_1,E_2), 存在Mod-T 范畴中的正合列

$$0\longrightarrow(E_1,0)\longrightarrow(E_1,E_2)\longrightarrow(0,E_2)\longrightarrow 0\ .$$

因为$\begin{pmatrix}P^i\\ U\otimes_A P^i\end{pmatrix}$是投射左 T-模, 所以有正合列

$$0\to(E_1,0)\otimes_T\begin{pmatrix}P^i\\ U\otimes_A P^i\end{pmatrix}\to(E_1,E_2)\otimes_T\begin{pmatrix}P^i\\ U\otimes_A P^i\end{pmatrix}\to(0,E_2)\otimes_T\begin{pmatrix}P^i\\ U\otimes_A P^i\end{pmatrix})\to 0.$$

已知$(0,E_2)\otimes_T\begin{pmatrix}P^i\\ U\otimes_A P^i\end{pmatrix}\cong(E_2\otimes_B U\otimes_A P^i)/(E_2\otimes_B U\otimes_A P^i)=0$. 所以$(E_1,E_2)\otimes_T\begin{pmatrix}P^i\\ U\otimes_A P^i\end{pmatrix}\cong(E_1,0)\otimes_T\begin{pmatrix}P^i\\ U\otimes_A P^i\end{pmatrix}$. 又因为 E_1 是内射右 A-模, 所以 $(E_1,E_2)\otimes_T\Upsilon\cong(E_1,0)\otimes_T\Upsilon\cong E_1\otimes_A\Lambda$ 是正合的, 即证得 $\begin{pmatrix}M_1\\ U\otimes_A M_1\end{pmatrix}$ 是 PGF 左 T-模.

接下来证明$\begin{pmatrix}0\\ M_2/Im(\varphi^M)\end{pmatrix}$是 PGF 左 T-模. 由条件知, 存在投射左 B-模的正合列

$$\Theta:\cdots\longrightarrow Q^{-1}\xrightarrow{f^{-1}}Q^0\xrightarrow{f^0}Q^1\xrightarrow{f^1}Q^2\xrightarrow{f^2}\cdots$$

使得 $M_2/Im(\varphi^M)\cong Ker(f^0)$, 并且对任意内射右 B-模 G, $G\otimes_B -$ 保持其正合. 则得到投射左 T-模的正合序列

$$\begin{pmatrix}0\\ \Theta\end{pmatrix}:\cdots\to\begin{pmatrix}0\\ Q^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\ f^{-1}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\ Q^{0}\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\ f^{0}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\ Q^{1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\ f^{1}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\ Q^{2}\end{pmatrix}\to\cdots$$

使得$\begin{pmatrix}0\\ M_2/im(\varphi^M)\end{pmatrix}\cong Ker\begin{pmatrix}0\\ f^0\end{pmatrix}$.

对于任意内射右 T-模 $(E_1, E_2)_{\varphi_E}$, 存在正合列

$$0 \longrightarrow Ker(\widetilde{\varphi_E}) \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\widetilde{\varphi_E}} Hom_A(U, E_1) \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $E_1, Ker(\widetilde{\varphi_E})$ 是内射. 因为 $fd(_BU) < \infty$, 由([16]，引理 2.2)知 $id(Hom_A(U, E_1)) < \infty$, 所以 $id(E_2) < \infty$. 由引理2.2知, $(E_1, E_2) \otimes_T \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta \end{pmatrix} \cong E_2 \otimes_B \Theta$ 是正合的, 即证得 $\begin{pmatrix} 0 \\ M_2/Im(\varphi^M) \end{pmatrix}$ 是 PGF 左 T-模.

由引理 2.4 知, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 PGF 左T-模.

最后, 若 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 PGF 左 T-模, 则存在正合列

$$0 \longrightarrow U \otimes_A M_1 \xrightarrow{\varphi^M} M_2 \longrightarrow M_2/Im(\varphi^M) \longrightarrow 0\ .$$

其中 $M_2/Im(\varphi^M)$ 是 PGF 左 B-模, 由引理 2.4 知 $U \otimes_A M_1$ 是 PGF 左 B-模当且仅当 M_2 是 PGF 左 B-模.

推论2.6 设R是环, $T(R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$为下三角矩阵环, $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 $T(R)$-模. 则以下等价：

(1) M 是 PGF 左 $T(R)$-模;

(2) M_1 和 $M_2/Im(\varphi^M)$ 是 PGF 左 R-模且 φ^M 是单射;

(3) M_2 和 $M_2/Im(\varphi^M)$ 是 PGF 左 R-模且 φ^M 是单射.

证明 由定理2.5得.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11561039；11761045); 兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”基金资助项目；甘肃省自然科学基金资助项目(17JR5RA091；18JR3RA113)。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridge, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI.

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. De Gruyter, Amsterdam. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[3] Ding, N.Q., Li, Y.L. and Mao, L.X. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[4] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **7**, 491-506. https://doi.org/10.1142/S0219498808002953

[5] Gillespie, J. (2010) Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings. *Homology, Homotopy and Applications*, **12**, 61-73. https://doi.org/10.4310/HHA.2010.v12.n1.a6

[6] Yang, G., Liu, Z.K. and Liang, L. (2013) Ding Projective and Ding Injective Modules. *Algebra Colloquium*, **20**, 601-612. https://doi.org/10.1142/S1005386713000576

[7] Mao, L.X. (2019) Ding Modules and Dimensions over Formal Triangular Matrix Rings. Preprint arxiv.org/abs/1912.06968

[8] Green, E.L. (1982) On the Representation Theory of Rings in Matrix Form. *Pacific Journal of Mathematics*, **100**, 123-138. https://doi.org/10.2140/pjm.1982.100.123

[9] Krylov, P. and Tuganbaev, A. (2017) Formal Matrices. Springer, Cham.

[10] Šaroch, J. and Št'ov číek, J. (2020) Singular Compactness and Definability for Σ-Cotorsion and Gorenstein Modules. *Selecta Mathematica*, **26**, Article No. 23. https://doi.org/10.1007/s00029-020-0543-2

[11] Haghany, A. and Varadarajan, K. (2000) Study of Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **147**, 41-58. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(98)00129-7

[12] Fossum, R.M., Griffith, P. and Reiten, I. (2006) Trivial Extensions of Abelian Categories: Homological Algebra of Trivial Extensions of Abelian Catergories with Applications to Ring Theory. Springer, Berlin.

[13] Haghany, A. and Varadarajan, K. (1999) Study of Formal Triangular Matrix Rings. *Communications in Algebra*, **27**, 5507-5525. https://doi.org/10.1080/00927879908826770

[14] Rotman, J.J. (2008) An Introduction to Homological Algebra. Springer Science & Business Media, New York.

[15] Asadollahi, J. and Salarian, S. (2006) On the Vanishing of Ext over Formal Triangular Matrix Rings. *Forum Mathematicum*, **18**, 951-966. https://doi.org/10.1515/FORUM.2006.048

[16] Mao, L.X. (2020) Gorenstein Flat Modules and Dimensions over Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224**, Article ID: 106207. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.106207

[17] Enochs, E.E., Cortés-Izurdiaga, M.C. and Torrecillas, B. (2014) Gorenstein Conditions over Triangular Matrix Rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **218**, 1544-1554. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2013.12.006