Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 1084-1087
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011129

Hans汉斯

Stolz定理及其应用

刘　波，刘孝磊，王丽英

海军航空大学，山东 烟台
Email: Lauber@126.com

收稿日期：2020年10月28日；录用日期：2020年11月12日；发布日期：2020年11月19日

摘　要

极限思想是许多科学领域的重要思想之一，在函数求极限中大家经常会运用洛必达法则或者泰勒定理，为了解决某些数列极限问题，本文介绍了求数列极限的一种方法——Stolz定理，并对Stolz定理进行一些讨论。

关键词

数列极限，stolz定理

Stolz Theorem and Its Application

Bo Liu, Xiaolei Liu, Liying Wang

Naval Aviation University, Yantai Shandong
Email: Lauber@126.com

Received: Oct. 28th, 2020; accepted: Nov. 12th, 2020; published: Nov. 19th, 2020

Abstract

Limit thought is one of the important ideas in many scientific fields. In order to solve some problems of sequence limit, this paper introduces a method of solving sequence limit—Stolz Theorem, and discusses Stolz Theorem.

Keywords

Sequence Limit, Stolz Theorem

文章引用: 刘波, 刘孝磊, 王丽英. Stolz 定理及其应用[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 1084-1087.
DOI: 10.12677/pm.2020.1011129

Stolz 定理是处理数列不定式极限的有力工具，一般用于*/∞型的极限(即分母趋于正无穷大的分式极限，分子趋不趋于无穷大无所谓)、0/0 型极限(此时要求分子分母都以 0 为极限)。Stolz 定理用于数列，它有函数形式的推广，这两个都可以认为是洛必达法则的离散版本。

定理 1 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理) 设 $n\to\infty$ 时，$y_n\to 0, x_n \searrow 0$。(严格单调下降趋于 0)，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$ (a 为有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$) [1]。

定理 2 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{x_n\}$ 严格增加且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$ (a 为有限数，$+\infty$ 或 $-\infty$)，($\{y_n\}$ 为任一数列)。

例 1 设 $x_n=\frac{\ln n}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

分析：x_n 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，处理此类问题常见的有三种方法：

1° 四则运算；2° 洛必达法则与归结原则；3° Stolz 定理。

解法 1：由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，由归结原则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

解法 2：由 Stolz 定理

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n-\ln(n-1)}{n-(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n}{n-1}=\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=\ln 1=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

注：1、洛必达法则与 Stolz 定理的区别：洛必达法则解决连续型的未定式极限；Stolz 定理解决离散型的未定式极限。

2、若只有分母严格增加(或减)且趋于 ∞，但分子为一般的数列(不一定趋于 ∞)，在这种情况下必须用 Stolz 定理。

例 2 设 $x_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n(n+1)}$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$a$ 为有限数，或 $+\infty$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ [2]。

此题只能用 Stolz 定理。

设 $y_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n, z_n=n(n+1)$

则 $y_n-y_{n-1}=na_n, z_n-z_{n-1}=2n$

由 Stolz 定理 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\frac{a}{2}, a\text{ 为有限数}\\ +\infty, a\text{ 为}+\infty\end{cases}$，Stolz 定理与洛必达法则及归结原则的结合。

例 3 设 $x_n=\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

设 $y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, z_n=\ln n$

则 $y_n-y_{n-1}=\frac{1}{n}, z_n-z_{n-1}=\ln\frac{n}{n-1}$

由 Stolz 定理 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\left(\frac{0}{0}\right)$

利用洛必达法则， $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{1+\frac{1}{x-1}}} = 1$

由归结原则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

有时问题经过处理后，方能应用 Stolz 定理。

例 4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(A_n - A_{n-1}\right) = 0$，证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}$ 。

分析：若证 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}$，只须证，为了利用 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(A_n - A_{n-1}\right) = 0$，

令 $a_1 = A_1, a_2 = A_2 - A_1, \cdots, a_n = A_n - A_{n-1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$

且 $A_n = \left(A_n - A_{n-1}\right) + \left(A_{n-1} - A_{n-2}\right) + \cdots + \left(A_2 - A_1\right) + A_1 = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[A_n - \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) - \frac{a_1 + \left(a_1 + a_2\right) + \left(a_1 + a_2 + a_3\right) + \cdots + \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_2 + 2a_3 + \cdots + (n-1)a_n}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)a_n}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\cdot na_n = 0
\end{aligned}$$

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

提示：设 $x_n = \left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
\ln x_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\ln\left(\frac{2}{2^2-1}\right) + \frac{1}{2^{n-2}}\ln\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left[\ln\left(\frac{2}{2^2-1}\right) + 2\ln\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right) + \cdots + 2^{n-2}\ln\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)\right]
\end{aligned}$$

应用 Stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\dfrac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} = \ln\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$。

另一方面，一定注意分母必须单调。首先，Stolz 定理分母不单调的话确实是有反例的。取 $a_n = n$,

$b_n = n + (-1)^n \sqrt{n}$。则易见 $n \to \infty$，$b_n \to +\infty$，同时 $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to 0$。然而 $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \neq 0$。其次，L'Hospital 法则其实隐含了单调性的条件。因为其要求 $g'(x)$ 在极限点的某邻域内不等于 0，但导函数具有介值性 (Darboux 定理)，因此 $g'(x)$ 在极限点的某邻域内恒正或恒负，即得 $g(x)$ 单调。所以这两个定理在这方面仍然是一致的[3]。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 张天德, 等. 全国大学生数学竞赛辅导指南[M]. 第 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2019.

[3] 刘强, 等. 高等数学深化训练与大学生数学竞赛教程[M]. 北京: 电子工业出版社, 2017.