

# 垂心四面体的勾股4态15个外接球半径、外心坐标及距离的算法

——四维体积勾股定理的应用(公式九)

蔡国伟

上海汇美房产有限公司, 上海  
Email: yiersan@139.com

收稿日期: 2020年11月1日; 录用日期: 2020年11月20日; 发布日期: 2020年11月27日

---

## 摘要

用正交4球半径的4元数, 证明: 垂心四面体的勾股4态的15个外接球半径同构公式、外心坐标同构公式; 及其用外接球半径计算外心距离公式; 以及12组棱角、6组面角, 它们的互补对角的正弦余弦的代数值公式。

## 关键词

体积勾股定理, 垂心四面体, 外接球, 外心, 距离公式, 证明, 算法

---

# Calculation of Radius, Circumcenter Coordinates and Distance of 15 Circumscribed Spheres of Pythagorean 4-State in an Orthocentric Tetrahedron

—Application of Pythagorean Theorem of Four-Dimensional Volume (Formula 9)

Guowei Cai

Shanghai Huimei Property Co., Ltd., Shanghai  
Email: yiersan@139.com

Received: Nov. 1<sup>st</sup>, 2020; accepted: Nov. 20<sup>th</sup>, 2020; published: Nov. 27<sup>th</sup>, 2020

## Abstract

By using the quaternions of orthogonal 4-sphere radius, it is proved that there are 15 isomorphic formulas of circumscribed sphere radius and circumcenter coordinate isomorphism of the Pythagorean 4-state of the orthocentric tetrahedron, and the formula of calculating the distance of the circumcenter by using the radius of circumscribed sphere, as well as 12 sets of angles, 6 sets of face angles, their complementary diagonal sine and cosine of the numerical formula.

## Keywords

Volume Pythagorean Theorem, Orthocentric Tetrahedron, Circumscribed Sphere, Circumcenter, Distance Formula, Proof, Algorithms

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial International License (CC BY-NC 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

正交 4 球半径为 4 元数[1], 其球心间勾股 4 态[2]的垂心四面体, 已知有同构的重心球[3]和垂心球[4]半径及其它们的球心坐标和间距公式。那么正交 4 球的球心间的勾股 4 态的外接球[5]是否也有同构的半径公式及其球心坐标和间距公式? 它们间的边角关系如何?

## 2. 证明正交 4 球[1]球心间勾股 4 态[2]的 15 个外接球[5]半径及其外心坐标同构公式

设: 沿用文[3]即: 正交 4 球心为大写:  $A, B, C, D$ ; 及相对应的球半径为小写:  $a, b, c, d$ ;

$$(A \in a; B \in b; C \in c; D \in d)$$

正交 4 球心坐标为:  $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c); D(bct, act, abt)$

(这里:  $t = \frac{-d^2}{v+abc}$ ,  $v = \sqrt{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2} = 6V_{ABCD}$ ;  $D$  坐标在第 7 象限)

### 2.1. 一至四维球心间同构的外接球半径平方公式

定义: 一至四维球心间外接球半径的平方: 等于同态维数与重心球半径[3]之积方与同态维数减 2 与垂心球半径[4]的积方之差的四分之一。其公式为:

$$\left(\mathbb{R}_{O_i}^n\right)^2 = \frac{1}{4} \left[ n^2 R_{G_i}^2 - (n-2)^2 r_{H_i}^2 \right] \quad (1)$$

这里: 字母为各类球半径:  $\mathbb{R}$  为外接球;  $R$  为重心球;  $r$  为垂心球;

下标: 同态用  $i = A, B, C, D, \dots$ ;  $O$  为外接球;  $G$  为重心球;  $H$  为垂心球;

右式上标与左式的  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  为勾股 4 态的 1 至 4 维。

例:

- 4 个一维外接球半径的平方:

$$\left(\mathbb{R}_{O_A}^1\right)^2 = \frac{1}{4} \left[ 1^2 a^2 - (1-2)^2 a^2 \right] = \frac{1}{4} 1^2 (a^2 - a^2) + (1-1)a^2 = 0$$

因一维重心球半径与垂心球半径等同为 4 个正交球半径, 4 个一维外接球半径平方均为 0,

即:  $(\mathbb{R}_{OA}^1)^2 = (\mathbb{R}_{OB}^1)^2 = (\mathbb{R}_{OC}^1)^2 = (\mathbb{R}_{OD}^1)^2 = 0$ 。

- 6 个二维外接球半径的平方:

$$(\mathbb{R}_{OAB}^2)^2 = \frac{1}{4} \left[ 2^2 \times \frac{1}{2^2} (a^2 + b^2) - (2-2)^2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right] = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$$

6 个二维外接球半径与二维重心球半径相同, 其平方为:

$$\frac{a^2 + b^2}{4}, \frac{a^2 + c^2}{4}, \frac{a^2 + d^2}{4}, \frac{b^2 + c^2}{4}, \frac{b^2 + d^2}{4}, \frac{c^2 + d^2}{4}$$

因此证明其半径的平方可参见文[3]。

- 4 个三维外接球半径的平方:

$$(\mathbb{R}_{OABC}^3)^2 = \frac{1}{4} \left[ 3^2 \times \frac{1}{3^2} (a^2 + b^2 + c^2) - (3-2)^2 \frac{a^2 b^2 c^2}{s_{ABC}^2} \right] = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2}$$

4 个三维外接球半径的平方:

$$\frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2}, \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)}{4s_{ABD}^2},$$

$$\frac{(a^2 + c^2)(a^2 + d^2)(c^2 + d^2)}{4s_{ACD}^2}, \frac{(b^2 + c^2)(b^2 + d^2)(c^2 + d^2)}{4s_{BCD}^2},$$

这里:  $s_{ABC}^2 = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$ ,  $s_{ABD}^2 = a^2 b^2 + a^2 d^2 + b^2 d^2$ ,  
 $s_{ACD}^2 = a^2 c^2 + a^2 d^2 + c^2 d^2$ ,  $s_{BCD}^2 = b^2 c^2 + b^2 d^2 + c^2 d^2$  (下同)。

其证明略: 因其与三角形的外接圆公式等价。

- 1 个四维外接球半径的平方:

$$(\mathbb{R}_O^4)^2 = \frac{1}{4} \left[ 4^2 \times \frac{1}{4^2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (4-2)^2 \frac{a^2 b^2 c^2 d^2}{v^2} \right] = \frac{1}{4} \left( a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \frac{4a^2 b^2 c^2 d^2}{v^2} \right)$$

这里:  $v^2 = a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2$  (下同)。

其证明: 见文[5]关于一维点态 8 点球半径。即: 正交 4 球心构成垂心四面体的外接球的半径。

## 2.2. 一至四维球心间同构的外心坐标同构公式

定义: 一至四维 15 点外心坐标公式: 三个分坐标均为维数[2]与同态重心分坐标[3]积减维数[2]减 2 与同态垂心分坐标[4]之积的差的二分之一。其公式为:

$$\mathbb{O}_i^n = \begin{cases} x_{O_i} = \frac{1}{2} [nx_{G_i} - (n-2)x_{H_i}] \\ y_{O_i} = \frac{1}{2} [ny_{G_i} - (n-2)y_{H_i}] \\ z_{O_i} = \frac{1}{2} [nz_{G_i} - (n-2)z_{H_i}] \end{cases} \quad (2)$$

这里字母:  $\mathbb{O}$  为外心坐标;  $x, y, z$  为分坐标;

下标: 同态为  $i = A, B, C, D, \dots$ ;  $O_i$  为外心坐标;  $G_i$  为垂心坐标;  $H_i$  为垂心坐标;

右式上标与左式  $n=1,2,3,4,\dots$  为勾股 4 态[2]的 1 至 4 维;

例:

- 4 个一维点即正交 1 球心的外心坐标:

$$\mathbb{O}_A^1 = \begin{cases} x_{OA} = \frac{1}{2}[1 \times a - (1-2)a] = \frac{1}{2} \times 1(a-a) + a = a \\ y_{OA} = \frac{1}{2}[1 \times 0 - (1-2)0] = \frac{1}{2} \times 1(0-0) + 0 = 0 \\ z_{OA} = \frac{1}{2}[1 \times 0 - (1-2)0] = \frac{1}{2} \times 1(0-0) + 0 = 0 \end{cases}$$

一维外心坐标与正交 4 球球心坐标共点, 同时也与一维重心和垂心坐标共点。

即:  $\mathbb{O}_A^1(a, 0, 0), \mathbb{O}_B^1(0, b, 0), \mathbb{O}_C^1(0, 0, c), \mathbb{O}_D^1(bct, act, abt)$ 。

- 6 个二维棱即正交 2 球心连线构成棱的外心坐标:

$$\mathbb{O}_{AB}^2 = \begin{cases} x_{OAB} = \frac{1}{2} \left[ 2 \times \frac{a+0}{2} - (2-2) \frac{ab^2}{a^2+b^2} \right] = \frac{1}{2} \times 2 \left( \frac{a+0}{2} - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \right) + \frac{ab^2}{a^2+b^2} = \frac{a}{2} \\ y_{OAB} = \frac{1}{2} \left[ 2 \times \frac{0+b}{2} - (2-2) \frac{a^2b}{a^2+b^2} \right] = \frac{1}{2} \times 2 \left( \frac{0+b}{2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \right) + \frac{a^2b}{a^2+b^2} = \frac{b}{2} \\ z_{OAB} = \frac{1}{2} \left[ 2 \times \frac{0+0}{2} - (2-2)0 \right] = \frac{1}{2} \times 2 \left( \frac{0+0}{2} - 0 \right) + 0 = 0 \end{cases}$$

同理: 6 个二维外心坐标与同态二维重心坐标共点为:

$$\begin{aligned} & \mathbb{O}_{AB}^2 \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right); \mathbb{O}_{AC}^2 \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right); \mathbb{O}_{BC}^2 \left( 0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right); \\ & \mathbb{O}_{AD}^2 \left( \frac{a+bct}{2}, \frac{act}{2}, \frac{abt}{2} \right); \mathbb{O}_{BD}^2 \left( \frac{bct}{2}, \frac{b+act}{2}, \frac{abt}{2} \right); \mathbb{O}_{CD}^2 \left( \frac{bct}{2}, \frac{act}{2}, \frac{c+abt}{2} \right) \end{aligned}$$

其半径平方与二维重心球半径平方共球。其二维外心与二维重心共点, 坐标验证见文[3]。

- 4 个三维面即正交 3 球心构成三角形的外心坐标:

$$\mathbb{O}_{ABC}^3 = \begin{cases} x_{OABC} = \frac{1}{2} \left[ 3 \times \frac{a+0+0}{3} - (3-2) \frac{ab^2c^2}{s_{ABC}^2} \right] = \frac{1}{2} \left( a - \frac{ab^2c^2}{s_{ABC}^2} \right) = \frac{a^3(b^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} \\ y_{OABC} = \frac{1}{2} \left[ 3 \times \frac{0+b+0}{3} - (3-2) \frac{a^2bc^2}{s_{ABC}^2} \right] = \frac{1}{2} \left( b - \frac{a^2bc^2}{s_{ABC}^2} \right) = \frac{b^3(a^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} \\ z_{OABC} = \frac{1}{2} \left[ 3 \times \frac{0+0+c}{3} - (3-2) \frac{a^2b^2c}{s_{ABC}^2} \right] = \frac{1}{2} \left( c - \frac{a^2b^2c}{s_{ABC}^2} \right) = \frac{c^3(a^2+b^2)}{2s_{ABC}^2} \end{cases}$$

4 个三维面外心坐标为:

$$\begin{aligned} & \mathbb{O}_{ABC}^3 \left( \frac{a^3(b^2+c^2)}{2s_{ABC}^2}, \frac{b^3(a^2+c^2)}{2s_{ABC}^2}, \frac{c^3(a^2+b^2)}{2s_{ABC}^2} \right); \\ & \mathbb{O}_{ABD}^3 \left( \frac{ab^2tv + (a+bct)s_{ABD}^2}{2s_{ABD}^2}, \frac{a^2btv + (b+act)s_{ABD}^2}{2s_{ABD}^2}, \frac{ab(a^2+b^2)d^2t}{2s_{ABD}^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{O}_{ACD}^3 \left( \frac{ac^2tv + (a+bct)s_{ACD}^2}{2s_{ACD}^2}, \frac{ac(a^2+c^2)d^2t}{2s_{ACD}^2}, \frac{a^2ctv + (c+abt)s_{ACD}^2}{2s_{ACD}^2} \right); \\ & \mathbb{O}_{BCD}^3 \left( \frac{bc(b^2+c^2)d^2t}{2s_{BCD}^2}, \frac{bc^2tv + (b+act)s_{BCD}^2}{2s_{BCD}^2}, \frac{b^2ctv + (c+abt)s_{BCD}^2}{2s_{BCD}^2} \right) \end{aligned}$$

这里：  $s_{ABC}^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ ，  $s_{ABD}^2 = a^2b^2 + a^2d^2 + b^2d^2$ ，  
 $s_{ACD}^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2$ ，  $s_{BCD}^2 = b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$  (下同)。

验证：用 2 点坐标距离公式验证该点为 3 维外心：

例：三维外心  $\mathbb{O}_{ABC}^3$  与共面的 3 个正交球球心  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，分别用 2 点式间距公式计算，结果相同：

$$\begin{aligned} |A\mathbb{O}_{ABC}^3|^2 &= \left[ \frac{a^3(b^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} - a \right]^2 + \left[ \frac{b^3(a^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} - 0 \right]^2 + \left[ \frac{c^3(a^2+b^2)}{2s_{ABC}^2} - 0 \right]^2 = \frac{(a^2+c^2)(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{4s_{ABC}^2} \\ |B\mathbb{O}_{ABC}^3|^2 &= \left[ \frac{a^3(b^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} - 0 \right]^2 + \left[ \frac{b^3(a^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} - b \right]^2 + \left[ \frac{c^3(a^2+b^2)}{2s_{ABC}^2} - 0 \right]^2 = \frac{(a^2+c^2)(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{4s_{ABC}^2} \\ |C\mathbb{O}_{ABC}^3|^2 &= \left[ \frac{a^3(b^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} - 0 \right]^2 + \left[ \frac{b^3(a^2+c^2)}{2s_{ABC}^2} - 0 \right]^2 + \left[ \frac{c^3(a^2+b^2)}{2s_{ABC}^2} - c \right]^2 = \frac{(a^2+c^2)(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{4s_{ABC}^2} \end{aligned}$$

同理：可验证其余 3 组均为其 3 维外心。

- 1 个四维体即正交 4 球心构成垂心四面体的外心坐标：

$$\mathbb{O}^4 = \begin{cases} x_O = \frac{1}{2} \left[ 4 \times \frac{a+bct}{4} - (4-2) \frac{-ab^2c^2t}{v} \right] = \frac{1}{2} \left( a+bct + \frac{2ab^2c^2t}{v} \right) = \frac{av+bct(2abc+v)}{2v} \\ y_O = \frac{1}{2} \left[ 4 \times \frac{b+act}{4} - (4-2) \frac{-a^2bc^2t}{v} \right] = \frac{1}{2} \left( b+act + \frac{2a^2bc^2t}{v} \right) = \frac{bv+act(2abc+v)}{2v} \\ z_O = \frac{1}{2} \left[ 4 \times \frac{c+abt}{4} - (4-2) \frac{-a^2b^2ct}{v} \right] = \frac{1}{2} \left( c+abt + \frac{2a^2b^2ct}{v} \right) = \frac{cv+abt(2abc+v)}{2v} \end{cases}$$

这里：  $t = \frac{-d^2}{abc+v}$ ；  $v^2 = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2$  (下同)。

验证该 4 维外心：见文[5]。

### 2.3. 一至四维及其幂集的任意子集外心间距的同构公式

定义：一至四维及其幂集的任意子集外心间距同构公式为：其外心间距的平方等于外接球半径与其幂集的任意一个非空子集的外接球半径的平方差。其公式为：

$$\mathbb{D}_{A|Ai \in A}^2 = |\mathbb{R}_A^n|^2 - |\mathbb{R}_{A_i}^{n_i}|^2 \tag{3}$$

这里： $\mathbb{D}$  为间距， $\mathbb{R}$  为外接球半径(详见：表 1)；

上标： $n$  为勾股 4 态[2]的 1 至 4 维维数， $n_i$  为其幂集子集的维数；

下标： $A$  为集， $A_i$  为  $A$  集的幂集的任意一项非空子集。

例：

- 4 组一维点外心的每组非零幂集数为：已知非零幂集数量公式为： $x = 2^n - 1$ 。则一维非空幂集数为： $2^1 - 1 = 1$  (1 点与集共点)。对于  $A$  球外心自身间距套用公式后为：

$$\mathbb{D}_{A|A}^2 = |\mathbb{R}_{OA}^1|^2 - |\mathbb{R}_{OA}^1|^2 = 0 - 0 = 0$$

同理：其余 3 个一维点外心自身间距均为零。

- 6 组二维棱外心的每组非零幂集数为  $2^2 - 1 = 3$  (3 点与集共棱)。即：

$$\mathbb{D}_{AB|AB}^2 = |\mathbb{R}_{OAB}^2|^2 - |\mathbb{R}_{OAB}^2|^2 = \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2) = 0$$

$$\mathbb{D}_{AB|A}^2 = |\mathbb{R}_{OAB}^2|^2 - |\mathbb{R}_{OA}^1|^2 = \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2) - 0 = \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2)$$

$$\mathbb{D}_{AB|B}^2 = |\mathbb{R}_{OAB}^2|^2 - |\mathbb{R}_{OB}^1|^2 = \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2) - 0 = \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2)$$

同理：可得其余 5 组，每组二维外接球球心与其非零幂集各 3 个子集外心间距(略)；

验证：因二维棱外心坐标及其半径与二维重心坐标及其半径等价。其验证见文[3]。

- 4 组三维面外心的每组非零幂集数为  $2^3 - 1 = 7$  (7 点与集共面)。即：

$$\mathbb{D}_{ABC|ABC}^2 = |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 - |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} - \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} = 0$$

$$\mathbb{D}_{ABC|AB}^2 = |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 - |\mathbb{R}_{OAB}^2|^2 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} - \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2) = \frac{(a^2 + b^2)c^4}{4s_{ABC}^2}$$

$$\mathbb{D}_{ABC|AC}^2 = |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 - |\mathbb{R}_{OAC}^2|^2 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} - \frac{1}{2^2}(a^2 + c^2) = \frac{(a^2 + c^2)b^4}{4s_{ABC}^2}$$

$$\mathbb{D}_{ABC|BC}^2 = |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 - |\mathbb{R}_{OBC}^2|^2 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} - \frac{1}{2^2}(b^2 + c^2) = \frac{(b^2 + c^2)a^4}{4s_{ABC}^2}$$

$$\mathbb{D}_{ABC|A}^2 = |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 - |\mathbb{R}_{OA}^1|^2 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} - 0 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2}$$

$$\mathbb{D}_{ABC|B}^2 = |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 - |\mathbb{R}_{OB}^1|^2 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} - 0 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2}$$

$$\mathbb{D}_{ABC|C}^2 = |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 - |\mathbb{R}_{OC}^1|^2 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} - 0 = \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2}$$

同理可得其余 3 组 3 维面外心与其非零幂集各 7 个子集外心间距。

每组与 7 个子集外心间距关系，可分 3 类，可分别验证 2 点间外接球半径的平方差：

一类：自身间距为零；

二类：根据三角形外心到各边的垂线平分各边的定理，符合直角三角形斜边与底边的平方差等于邻边平方；

三类：根据三角形外心到各顶点的间距相等为 3 维外接球半径。

- 1 组四维体外心的非零幂集数为  $2^4 - 1 = 15$  (15 点与集共体)。即：

$$\mathbb{D}_{O|O}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_O^4|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} = 0$$

$$\mathbb{D}_{O|ABC}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OABC}^3|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2} = \frac{(2a^2b^2c^2 - v^2)^2}{4s_{ABC}^2v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|ABD}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OABD}^3|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)}{4s_{ABD}^2} = \frac{(2a^2b^2d^2 - v^2)^2}{4s_{ABD}^2v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|ACD}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OACD}^3|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)}{4s_{ACD}^2} = \frac{(2a^2c^2d^2 - v^2)^2}{4s_{ACD}^2v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|BCD}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OBCD}^3|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{(a^2 + b^2)(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)}{4s_{BCD}^2} = \frac{(2b^2c^2d^2 - v^2)^2}{4s_{BCD}^2v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|AB}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OAB}^2|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{1}{2^2}(a^2 + b^2) = \frac{(c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|AC}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OAC}^2|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{1}{2^2}(a^2 + c^2) = \frac{(b^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|AD}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OAD}^2|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{1}{2^2}(a^2 + d^2) = \frac{(b^2 + c^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|BC}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OBC}^2|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{1}{2^2}(b^2 + c^2) = \frac{(a^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|BD}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OBD}^2|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{1}{2^2}(b^2 + d^2) = \frac{(a^2 + c^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|CD}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OCD}^2|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - \frac{1}{2^2}(c^2 + d^2) = \frac{(a^2 + b^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|A}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OA}^1|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - 0 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|B}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OB}^1|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - 0 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|C}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OC}^1|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - 0 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

$$\mathbb{D}_{O|D}^2 = |\mathbb{R}_O^4|^2 - |\mathbb{R}_{OD}^1|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2} - 0 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)v^2 - 4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$$

上述 4 维外接球切四面、6 棱、4 点形成曲率等价。即：

垂心四面体外心到各面的垂线为各面的外心、到各棱的垂线平分各棱的外心、到各正交球心的各点的外心。它们的间距均 4 维外接球半径与其任一子集外接球半径的平方差。

根据：所设以及公式(1)、公式(2)计算的结果作(表 1)如下：并为方便观察作(图 1)。

2.4. 所设一至四维各外心坐标及其半径(见表 1), 各坐标位置(见图 1)

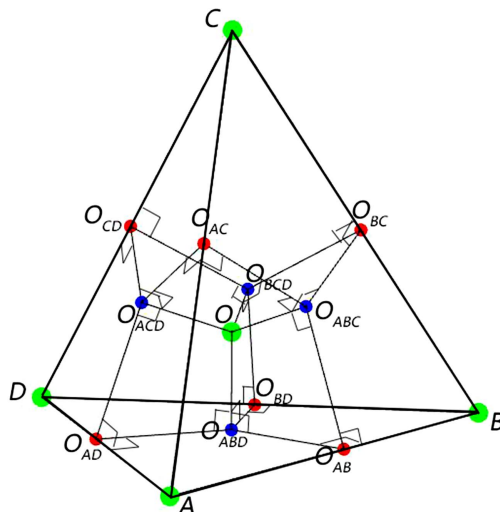


Figure 1. Schematic diagram of 1~4-d 15 point circumcenter coordinates  
图 1. 1 至 4 维 15 点外心坐标示意图

Table 1. The square of radius of 15 circumscribed spheres in Pythagorean 4-state and the symbol of circumcenter coordinates  
表 1. 勾股 4 态 15 个外接球半径的平方及其外心坐标符号

序	子集	坐标符号	分坐标 X	分坐标 Y	分坐标 Z	外接球半径符号	外接球半径平方
1	点	A	a	0	0	$\mathbb{R}_{OA}^1$	0
2	点	B	0	b	0	$\mathbb{R}_{OB}^1$	0
3	点	C	0	0	c	$\mathbb{R}_{OC}^1$	0
4	点	D	bct	act	abt	$\mathbb{R}_{OD}^1$	0
5	线	$O_{AB}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	0	$\mathbb{R}_{OAB}^2$	$\frac{1}{2^2}(a^2 + b^2)$
6	线	$O_{AC}$	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{c}{2}$	$\mathbb{R}_{OAC}^2$	$\frac{1}{2^2}(a^2 + c^2)$
7	线	$O_{BC}$	0	$\frac{b}{2}$	$\frac{c}{2}$	$\mathbb{R}_{OBC}^2$	$\frac{1}{2^2}(b^2 + c^2)$
8	线	$O_{AD}$	$\frac{a+bct}{2}$	$\frac{act}{2}$	$\frac{abt}{2}$	$\mathbb{R}_{OAB}^2$	$\frac{1}{2^2}(a^2 + d^2)$
9	线	$O_{BD}$	$\frac{bct}{2}$	$\frac{b+act}{2}$	$\frac{abt}{2}$	$\mathbb{R}_{OBD}^2$	$\frac{1}{2^2}(b^2 + d^2)$
10	线	$O_{CD}$	$\frac{bct}{2}$	$\frac{act}{2}$	$\frac{c+abt}{2}$	$\mathbb{R}_{OCD}^2$	$\frac{1}{2^2}(c^2 + d^2)$
11	面	$O_{ABC}$	$\frac{a^3(b^2 + c^2)}{2s_{ABC}^2}$	$\frac{b^3(a^2 + c^2)}{2s_{ABC}^2}$	$\frac{c^3(a^2 + b^2)}{2s_{ABC}^2}$	$\mathbb{R}_{OABC}^3$	$\frac{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}{4s_{ABC}^2}$



Continued

12	面	$O_{ABD}$	$\frac{ab^2tv+(a+bct)s_{ABD}^2}{2s_{ABD}^2}$	$\frac{a^2btv+(b+act)s_{ABD}^2}{2s_{ABD}^2}$	$\frac{ab(a^2+b^2)d^2t}{2s_{ABD}^2}$	$\mathbb{R}_{O_{ABD}}^3$	$\frac{(a^2+b^2)(a^2+d^2)(b^2+d^2)}{4s_{ABD}^2}$
13	面	$O_{ACD}$	$\frac{ac^2tv+(a+bct)s_{ACD}^2}{2s_{ACD}^2}$	$\frac{ac(a^2+c^2)d^2t}{2s_{ACD}^2}$	$\frac{a^2ctv+(c+abt)s_{ACD}^2}{2s_{ACD}^2}$	$\mathbb{R}_{O_{ACD}}^3$	$\frac{(a^2+c^2)(a^2+d^2)(c^2+d^2)}{4s_{ACD}^2}$
14	面	$O_{BCD}$	$\frac{bc(b^2+c^2)d^2t}{2s_{BCD}^2}$	$\frac{bc^2tv+(b+act)s_{BCD}^2}{2s_{BCD}^2}$	$\frac{b^2ctv+(c+abt)s_{BCD}^2}{2s_{BCD}^2}$	$\mathbb{R}_{O_{BCD}}^3$	$\frac{(b^2+c^2)(b^2+d^2)(c^2+d^2)}{4s_{BCD}^2}$
15	体	$O$	$\frac{av+bct(2abc+v)}{2v}$	$\frac{bv+act(2abc+v)}{2v}$	$\frac{cv+abt(2abc+v)}{2v}$	$\mathbb{R}_O^4$	$\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)v^2-4a^2b^2c^2d^2}{4v^2}$

表内：字母：a, b, c, d 为正交四球的 4 个半径；

D 坐标在第 7 象限。  $t = \frac{-d^2}{v+abc}$ ；  $v = \sqrt{a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2} = 6V_{ABCD}$ ；

$s_{ABC}^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ ；  $s_{ABD}^2 = a^2b^2 + a^2d^2 + b^2d^2$ ；  $s_{ACD}^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2$ ；  $s_{BCD}^2 = b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$ 。

### 2.5. 图 1 中含有 18 组 4 点所围的 4 边形：均共面、共圆、对角互补符合托勒密定理

上述 18 组可分两类其中：

#### 2.5.1. 计算证明维数 1 (2、2) 3 间连线的为：3 组/面 × 4 面 = 12 组

证明 A、B、C、 $O_{AB}$ 、 $O_{AC}$ 、 $O_{BC}$ 、 $O_{ABC}$  七点所围的 3 组四边形，每组有一对角互补均为 90 度，另一组对角线等长为 3 维外心至 3 顶点为外接球半径。因此用托勒密定理：圆的内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积。可得 3 维外心至 3 顶点为外接球半径的一组方程为：

$$\sqrt{\frac{(a^2+c^2)(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{4s_{ABC}^2}} = \begin{cases} |AO_{ABC}| = \frac{|O_{AC}O_{ABC}||AO_{AB}| + |O_{AB}O_{ABC}||AO_{AC}|}{|O_{AB}O_{AC}|} \\ |BO_{ABC}| = \frac{|O_{BC}O_{ABC}||BO_{AB}| + |O_{AB}O_{ABC}||BO_{BC}|}{|O_{AB}O_{BC}|} \\ |CO_{ABC}| = \frac{|O_{BC}O_{ABC}||CO_{AC}| + |O_{AC}O_{ABC}||CO_{BC}|}{|O_{AC}O_{BC}|} \end{cases} \quad (4)$$

同理：其余三面可得其余 3 维外心至 3 顶点为外接球半径的三组方程为：

$$\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2+d^2)(b^2+d^2)}{4s_{ABD}^2}} = \begin{cases} |AO_{ABD}| = \frac{|O_{AD}O_{ABD}||AO_{AB}| + |O_{AB}O_{ABD}||AO_{AD}|}{|O_{AB}O_{AD}|} \\ |BO_{ABD}| = \frac{|O_{BD}O_{ABD}||BO_{AB}| + |O_{AB}O_{ABD}||BO_{BD}|}{|O_{AB}O_{BD}|} \\ |DO_{ABD}| = \frac{|O_{BD}O_{ABD}||DO_{AD}| + |O_{AD}O_{ABD}||DO_{BD}|}{|O_{AD}O_{BD}|} \end{cases} \quad (5)$$

$$\sqrt{\frac{(a^2+c^2)(a^2+d^2)(c^2+d^2)}{4s_{ACD}^2}} = \begin{cases} |AO_{ACD}| = \frac{|O_{AD}O_{ACD}||AO_{AD}| + |O_{AD}O_{ACD}||AO_{AC}|}{|O_{AD}O_{AC}|} \\ |CO_{ACD}| = \frac{|O_{CD}O_{ACD}||CO_{AC}| + |O_{AC}O_{ACD}||CO_{CD}|}{|O_{AC}O_{CD}|} \\ |DO_{ACD}| = \frac{|O_{CD}O_{ACD}||DO_{AD}| + |O_{AD}O_{ACD}||DO_{CD}|}{|O_{AD}O_{CD}|} \end{cases} \quad (6)$$

$$\sqrt{\frac{(b^2+c^2)(b^2+d^2)(c^2+d^2)}{4s_{BCD}^2}} = \begin{cases} |BO_{BCD}| = \frac{|O_{BC}O_{BCD}||BO_{BD}| + |O_{BD}O_{BCD}||BO_{BC}|}{|O_{BD}O_{BC}|} \\ |CO_{BCD}| = \frac{|O_{CD}O_{BCD}||CO_{BC}| + |O_{BC}O_{BCD}||CO_{CD}|}{|O_{BC}O_{CD}|} \\ |DO_{BCD}| = \frac{|O_{CD}O_{BCD}||DO_{BD}| + |O_{BD}O_{BCD}||DO_{CD}|}{|O_{BD}O_{CD}|} \end{cases} \quad (7)$$

上述右侧：分子内 2 点间距，均可用公式(3)求得，分母因与重心球等价，其重心间距均可用文[3]的距离公式求得，也可用 2 点坐标的距离公式计算。(展开略)

上述 12 组四边形，每组有一对角互补均为 90 度，4 点共面共圆，符合对角互补的托勒密定理：

而其中 12 个棱角均为已知角，其正弦、余弦的代数值见文[6]，其 3 维外心为顶点的角与对棱角为互补角，即  $\pi$  减对棱角即可。因此 3 维外心为顶点的对角的正弦等于棱角正弦、其余弦等于负棱角余弦。

所设：12 个棱角的正弦、余弦代数符号所设沿用文[6]，它们 12 个对角均交于 4 个 3 维外心，分别所设：

例：A 点对平面为 1 面，以 3 维外心  $O_{BCD}$  为顶点的 3 钝角为  $O_{1B}$ 、 $O_{1C}$ 、 $O_{1D}$  依次与对角  $B_1$ 、 $C_1$ 、 $D_1$  3 棱角互补。

- 交于 1 面的 3 个棱角  $B_1$ 、 $C_1$ 、 $D_1$  依次互补对角为  $O_{1B}$ 、 $O_{1C}$ 、 $O_{1D}$  它们的正弦、余弦为：

见文[6]已知： $B_1 = \angle CBD$ ， $\Rightarrow \cos B_1 = \frac{b^2}{|BC||BD|}$ ， $\Rightarrow \sin B_1 = \frac{s_1}{|BC||BD|}$ ；

其互补对角： $O_{1B} = \angle O_{BC}O_{BCD}O_{BD} = \pi - B_1$

$$\Rightarrow \cos O_{1B} = \cos(\pi - B_1) = -\cos B_1 = \frac{-b^2}{|BC||BD|}$$

$$\Rightarrow \sin O_{1B} = \sin(\pi - B_1) = \sin B_1 = \frac{s_1}{|BC||BD|}$$

见文[6]已知： $C_1 = \angle BCD$ ， $\Rightarrow \cos C_1 = \frac{c^2}{|BC||CD|}$ ， $\Rightarrow \sin C_1 = \frac{s_1}{|BC||CD|}$ ；

其互补对角： $O_{1C} = \angle O_{BC}O_{BCD}O_{CD} = \pi - C_1$

$$\Rightarrow \cos O_{1C} = \cos(\pi - C_1) = -\cos C_1 = \frac{-c^2}{|BC||CD|}$$

$$\Rightarrow \sin O_{1C} = \sin(\pi - C_1) = \sin C_1 = \frac{s_1}{|BC||CD|}$$

见文[6]已知： $D_1 = \angle BDC$ ， $\Rightarrow \cos D_1 = \frac{d^2}{|BD||CD|}$ ， $\Rightarrow \sin D_1 = \frac{s_1}{|BD||CD|}$ ；

其互补对角： $O_{1D} = \angle O_{BD}O_{BCD}O_{CD} = \pi - D_1$

$$\Rightarrow \cos O_{1D} = \cos(\pi - D_1) = -\cos D_1 = \frac{-d^2}{|BD||CD|}$$

$$\Rightarrow \sin O_{1D} = \sin(\pi - D_1) = \sin D_1 = \frac{s_1}{|BD||CD|}$$

同理：根据其它 3 面如下 9 个棱角的正弦和余弦，可方便得出其棱角的互补对角的正弦和余弦。

- 交于 2 面的 3 个棱角及其互补对角的正弦、余弦为：

$$\text{见文[6]已知： } A_2 = \angle CAD, \Rightarrow \cos A_2 = \frac{a^2}{|AC||AD|}, \Rightarrow \sin A_2 = \frac{s_2}{|AC||AD|};$$

$$\text{其互补对角： } O_{2A} = \angle O_{AC}O_{ACD}O_{AD} = \pi - A_2$$

$$\Rightarrow \cos O_{2A} = -\cos A_2 = \frac{-a^2}{|AC||AD|}, \Rightarrow \sin O_{2A} = \sin A_2 = \frac{s_2}{|AC||AD|};$$

$$\text{见文[6]已知： } C_2 = \angle ACD, \Rightarrow \cos C_2 = \frac{c^2}{|AC||CD|}, \Rightarrow \sin C_2 = \frac{s_2}{|AC||CD|};$$

$$\text{其互补对角： } O_{2C} = \angle O_{AC}O_{ACD}O_{CD} = \pi - C_2$$

$$\Rightarrow \cos O_{2C} = -\cos C_2 = \frac{-c^2}{|AC||CD|}, \Rightarrow \sin O_{2C} = \sin C_2 = \frac{s_2}{|AC||CD|};$$

$$\text{见文[6]已知： } D_2 = \angle ADC, \Rightarrow \cos D_2 = \frac{d^2}{|AD||CD|}, \Rightarrow \sin D_2 = \frac{s_2}{|AD||CD|};$$

$$\text{其互补对角： } O_{2D} = \angle O_{AD}O_{ACD}O_{CD} = \pi - D_2$$

$$\Rightarrow \cos O_{2D} = -\cos D_2 = \frac{-d^2}{|AD||CD|}, \Rightarrow \sin O_{2D} = \sin D_2 = \frac{s_2}{|AD||CD|};$$

- 交于 3 面的 3 个棱角及其互补对角的正弦、余弦为：

$$\text{见文[6]已知： } A_3 = \angle BAD, \Rightarrow \cos A_3 = \frac{a^2}{|AB||AD|}, \Rightarrow \sin A_3 = \frac{s_3}{|AB||AD|};$$

$$\text{其互补对角： } O_{3A} = \angle O_{AD}O_{ABD}O_{BD} = \pi - A_3$$

$$\Rightarrow \cos O_{3A} = -\cos A_3 = \frac{-a^2}{|AB||AD|}, \Rightarrow \sin O_{3A} = \sin A_3 = \frac{s_3}{|AB||AD|};$$

$$\text{见文[6]已知： } B_3 = \angle ABD, \Rightarrow \cos B_3 = \frac{b^2}{|AB||BD|}, \Rightarrow \sin B_3 = \frac{s_3}{|AB||BD|};$$

$$\text{其互补对角： } O_{3B} = \angle O_{AB}O_{ABD}O_{BD} = \pi - B_3$$

$$\Rightarrow \cos O_{3B} = -\cos B_3 = \frac{-b^2}{|AB||BD|}, \Rightarrow \sin O_{3B} = \sin B_3 = \frac{s_3}{|AB||BD|};$$

$$\text{见文[6]已知： } D_3 = \angle ADB, \Rightarrow \cos D_3 = \frac{d^2}{|AD||BD|}, \Rightarrow \sin D_3 = \frac{s_3}{|AD||BD|};$$

$$\text{其互补对角： } O_{3D} = \angle O_{AD}O_{ABD}O_{BD} = \pi - D_3$$

$$\Rightarrow \cos O_{3D} = -\cos D_3 = \frac{-d^2}{|AD||BD|}, \Rightarrow \sin O_{3D} = \sin D_3 = \frac{s_3}{|AD||BD|};$$

- 交于 4 面的 3 个棱角及其互补对角的正弦、余弦为：

$$\text{见文[6]已知： } A_4 = \angle BAC; \Rightarrow \cos A_4 = \frac{a^2}{|AB||AC|}, \Rightarrow \sin A_4 = \frac{s_4}{|AB||AC|};$$

其互补对角:  $O_{4A} = \angle O_{AB}O_{ABC}O_{AC} = \pi - A_4$

$$\Rightarrow \cos O_{4A} = -\cos A_4 = \frac{-a^2}{|AB||AC|}, \Rightarrow \sin O_{4A} = \sin A_4 = \frac{S_4}{|AB||AC|};$$

见文[6]已知:  $B_4 = \angle ABC$ ;  $\Rightarrow \cos B_4 = \frac{b^2}{|AB||BC|}$ ,  $\Rightarrow \sin B_4 = \frac{S_4}{|AB||BC|}$ ;

其互补对角:  $O_{4B} = \angle O_{AB}O_{ABC}O_{BC} = \pi - B_4$

$$\Rightarrow \cos O_{4B} = -\cos B_4 = \frac{-b^2}{|AB||BC|}, \Rightarrow \sin O_{4B} = \sin B_4 = \frac{S_4}{|AB||BC|};$$

见文[6]已知:  $C_4 = \angle ACB$ ;  $\Rightarrow \cos C_4 = \frac{c^2}{|AC||CB|}$ ,  $\Rightarrow \sin C_4 = \frac{S_4}{|AC||CB|}$ ;

其互补对角:  $O_{4C} = \angle O_{AC}O_{ABC}O_{BC} = \pi - C_4$

$$\Rightarrow \cos O_{4C} = -\cos C_4 = \frac{-c^2}{|AC||CB|}, \Rightarrow \sin O_{4C} = \sin C_4 = \frac{S_4}{|AC||CB|};$$

**2.5.2. 计算证明维数 2 (3、3) 4 间连线的为: 1 组/棱 × 6 棱 = 6 组**

证明:  $AB$  棱中点垂直的  $O_{AB}$ 、 $O_{ABC}$ 、 $O_{ABD}$ 、 $O$  四点所围四边形, 且 4 点共面共圆, 其中以 3 维外心为顶点的对角均为 90 度, 用托勒密定理: 圆的内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积, 可得一组方程组:

$$|OO_{AB}||O_{ABC}O_{ABD}| = |O_{AB}O_{ABD}||OO_{ABC}| + |O_{AB}O_{ABC}||OO_{ABD}| \tag{8}$$

同理可得其它 5 组托勒密定理的方程组:

$$\begin{aligned} |OO_{AC}||O_{ABC}O_{ACD}| &= |O_{AC}O_{ABC}||OO_{ACD}| + |O_{AC}O_{ACD}||OO_{ABC}| \\ |OO_{AD}||O_{ABD}O_{ACD}| &= |O_{AD}O_{ABD}||OO_{ACD}| + |O_{AD}O_{ACD}||OO_{ABD}| \\ |OO_{BC}||O_{ABC}O_{BCD}| &= |O_{BC}O_{ABC}||OO_{BCD}| + |O_{BC}O_{BCD}||OO_{ABC}| \\ |OO_{BD}||O_{ABD}O_{BCD}| &= |O_{BD}O_{ABD}||OO_{BCD}| + |O_{BD}O_{BCD}||OO_{ABD}| \\ |OO_{CD}||O_{ACD}O_{BCD}| &= |O_{CD}O_{ACD}||OO_{BCD}| + |O_{CD}O_{BCD}||OO_{ACD}| \end{aligned}$$

上述右侧 3 维外心 2 点的距离需用坐标距离公式计算外, 其余均可用公式(3)求得。(展开略)

通过公式(3)也证明了 4 维外心  $O$  与 4 个面的垂线为 4 面的 3 维外心  $O_{ABC}$ 、 $O_{ABD}$ 、 $O_{ACD}$ 、 $O_{BCD}$ , 因此上式 6 组四边形在以 3 维外心为顶点的对角均为 90 度, 符合托勒密定理。

另一组互补对角, 交于 2 维外心与 3 维外心连线的夹角与垂心四面体的两面角等价, 它们的正弦、余弦的代数数值均已知见文[6], 它们交于  $CD$ 、 $BD$ 、 $BC$ 、 $AD$ 、 $AC$ 、 $AB$  六棱的 6 个面角符号为  $\alpha_{12}$ 、 $\alpha_{13}$ 、 $\alpha_{14}$ 、 $\alpha_{23}$ 、 $\alpha_{24}$ 、 $\alpha_{34}$ , 与顶点交于 4 维外心  $O$  与 3 维外心垂直连线的 6 个互补对角依次符号为:  $O_{12}$ 、 $O_{13}$ 、 $O_{14}$ 、 $O_{23}$ 、 $O_{24}$ 、 $O_{34}$ 。因此, 互补对角的正弦与面角相同, 互补对角的余弦为面角余弦的负值。证明如下:

- 根据已知垂直交于  $CD$  棱的面角, 解顶点位于  $O$  外心的互补对角的正弦、余弦代数数值为:

证明:  $O$ 、 $O_{ACD}$ 、 $O_{BCD}$ 、 $O_{CD}$  4 点共面: 利用平面方程即:

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_O-x_{O_{CD}} & y_O-y_{O_{CD}} & z_O-z_{O_{CD}} \\ x_{O_{ACD}}-x_{O_{CD}} & y_{O_{ACD}}-y_{O_{CD}} & z_{O_{ACD}}-z_{O_{CD}} \\ x_{O_{BCD}}-x_{O_{CD}} & y_{O_{BCD}}-y_{O_{CD}} & z_{O_{BCD}}-z_{O_{CD}} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{代入坐标} \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{av+bct(2abc+v)}{2v} - \frac{bct}{2} & \frac{bv+act(2abc+v)}{2v} - \frac{act}{2} & \frac{cv+abt(2abc+v)}{2v} - \frac{c+abt}{2} \\ \frac{ac^2tv+(a+bct)s_{ACD}^2}{2s_{ACD}^2} - \frac{bct}{2} & \frac{ac(a^2+c^2)d^2t}{2s_{ACD}^2} - \frac{act}{2} & \frac{a^2ctv+(c+abt)s_{ACD}^2}{2s_{ACD}^2} - \frac{c+abt}{2} \\ \frac{bc(b^2+c^2)d^2t}{2s_{BCD}^2} - \frac{bct}{2} & \frac{bc^2tv+(b+act)s_{BCD}^2}{2s_{BCD}^2} - \frac{act}{2} & \frac{b^2ctv+(c+abt)s_{BCD}^2}{2s_{BCD}^2} - \frac{c+abt}{2} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{a^3b^3cd^2(c^2+d^2)(v^2-v^2)}{4vs_{ACD}^2s_{BCD}^2(abc+v)} = 0
 \end{aligned}$$

(同理可证其余 5 组与棱垂直的 4 点共面。)

见文[6]已知:  $\alpha_{12} = \angle AH_{CD}B = \angle O_{ACD}O_{CD}O_{BCD}$ ,  $\Rightarrow \cos \alpha_{12} = \frac{c^2d^2}{s_1s_2}$ ,  $\Rightarrow \sin \alpha_{12} = \frac{|CD|v}{s_1s_2}$ ,

其互补对角:  $O_{12} = \angle O_{ACD}OO_{BCD} = \pi - \alpha_{12}$

$$\Rightarrow \cos O_{12} = \cos(\pi - \alpha_{12}) = -\cos \alpha_{12} = \frac{-c^2d^2}{s_1s_2}; \Rightarrow \sin O_{12} = \sin(\pi - \alpha_{12}) = \sin \alpha_{12} = \frac{|CD|v}{s_1s_2}$$

- 根据已知垂直交于  $BD$  棱的面角, 解顶点位于  $O$  外心的互补对角的正弦、余弦代数值为:

见文[6]已知:  $\alpha_{13} = \angle AH_{BD}C = \angle O_{ABD}O_{BD}O_{BCD}$ ,  $\Rightarrow \cos \alpha_{13} = \frac{b^2d^2}{s_1s_3}$ ,  $\Rightarrow \sin \alpha_{13} = \frac{|BD|v}{s_1s_3}$ ;

其互补对角:  $O_{13} = \angle O_{ABD}OO_{BCD} = \pi - \alpha_{13}$

$$\Rightarrow \cos O_{13} = \cos(\pi - \alpha_{13}) = -\cos \alpha_{13} = \frac{-b^2d^2}{s_1s_3}; \Rightarrow \sin O_{13} = \sin(\pi - \alpha_{13}) = \sin \alpha_{13} = \frac{|BD|v}{s_1s_3}$$

- 根据已知垂直交于  $BC$  棱的面角, 解顶点位于  $O$  外心的互补对角的正弦、余弦代数值为:

见文[6]已知:  $\alpha_{14} = \angle AH_{BC}D = \angle O_{ABC}O_{BC}O_{BCD}$ ,  $\Rightarrow \cos \alpha_{14} = \frac{b^2c^2}{s_1s_4}$ ,  $\Rightarrow \sin \alpha_{14} = \frac{|BC|v}{s_1s_4}$ ;

其互补对角:  $O_{14} = \angle O_{ABC}OO_{BCD} = \pi - \alpha_{14}$

$$\Rightarrow \cos O_{14} = \cos(\pi - \alpha_{14}) = -\cos \alpha_{14} = \frac{-b^2c^2}{s_1s_4}; \Rightarrow \sin O_{14} = \sin(\pi - \alpha_{14}) = \sin \alpha_{14} = \frac{|BC|v}{s_1s_4}$$

- 根据已知垂直交于  $AD$  棱的面角, 解顶点位于  $O$  外心的互补对角的正弦、余弦代数值为:

见文[6]已知:  $\alpha_{23} = \angle BH_{AD}C = \angle O_{ABD}O_{AD}O_{ACD}$ ,  $\Rightarrow \cos \alpha_{23} = \frac{a^2d^2}{s_2s_3}$ ,  $\Rightarrow \sin \alpha_{23} = \frac{|AD|v}{s_2s_3}$ ;

其互补对角:  $O_{23} = \angle O_{ABD}OO_{ACD} = \pi - \alpha_{23}$

$$\Rightarrow \cos O_{23} = \cos(\pi - \alpha_{23}) = -\cos \alpha_{23} = \frac{-a^2d^2}{s_2s_3}; \Rightarrow \sin O_{23} = \sin(\pi - \alpha_{23}) = \sin \alpha_{23} = \frac{|AD|v}{s_2s_3}$$

- 根据已知垂直交于  $AC$  棱的面角, 解顶点位于  $O$  外心的互补对角的正弦、余弦代数值为:

见文[6]已知:  $\alpha_{24} = \angle BH_{AC}D = \angle O_{ABC}O_{AC}O_{ACD}$ ,  $\Rightarrow \cos \alpha_{24} = \frac{a^2c^2}{s_2s_4}$ ,  $\Rightarrow \sin \alpha_{24} = \frac{|AC|v}{s_2s_4}$ ;

其互补对角:  $O_{24} = \angle O_{ABC}O_{ACD} = \pi - \alpha_{24}$

$$\Rightarrow \cos O_{24} = \cos(\pi - \alpha_{24}) = -\cos \alpha_{24} = \frac{-a^2c^2}{s_2s_4}; \Rightarrow \sin O_{24} = \sin(\pi - \alpha_{24}) = \sin \alpha_{24} = \frac{|AC|v}{s_2s_4}$$

- 根据已知垂直交于  $AB$  棱的面角, 解顶点位于  $O$  外心的互补对角的正弦、余弦代数值为:

见文[6]已知:  $\alpha_{34} = \angle CH_{AB}D = \angle O_{ABC}O_{AB}O_{ABD}$ ,  $\Rightarrow \cos \alpha_{34} = \frac{a^2b^2}{s_3s_4}$ ,  $\Rightarrow \sin \alpha_{34} = \frac{|AB|v}{s_3s_4}$ ;

其互补对角:  $O_{34} = \angle O_{ABC}O_{ABD} = \pi - \alpha_{34}$

$$\Rightarrow \cos O_{34} = \cos(\pi - \alpha_{34}) = -\cos \alpha_{34} = \frac{-a^2b^2}{s_3s_4}; \Rightarrow \sin O_{34} = \sin(\pi - \alpha_{34}) = \sin \alpha_{34} = \frac{|AB|v}{s_3s_4}$$

### 3. 总结

4 球正交球心间连线间一至四维外接球半径、外心坐标、及其幂集间距算法及其互补对角的正弦、余弦的代数值的算法分别归纳如下:

#### 3.1. 一至四维的外接球半径的平方具有同构的公式

一至四维球心间外接球半径的平方: 等于同态维数与重心球半径之积方与同态维数减 2 与垂心球半径的积方之差的四分之一。一至四维(点、线、面、体)外接球半径与重心球半径、垂心球半径相关。其中二维外接球半径与二维重心球半径共球。

#### 3.2. 一至四维的外心坐标具有同构的公式

一至四维球心间同态外心坐标: 三个外心分坐标均为维数与同态重心分坐标积减维数减 2 与同态垂心分坐标之积的差的二分之一。一至四维(点、线、面、体)外心坐标与重心球垂心球球心坐标相关, 其中: 一维外心与同态重心、垂心共点; 二维外心与同态重心共点。

#### 3.3. 一至四维及其幂集的任意子集外接球球心间距(免坐标)的同构公式

一至四维及其幂集的任意子集外心间距(免坐标)同构计算公式为: 其外心间距的平方等于外接球半径与其幂集的任意一个非空子集的外接球半径的平方差, 幂集间均为垂直关系。

一至四维 15 点外心的间距数应有  $\frac{(15-1) \times 15}{2} = 105$  个。

其中:

任意维非零幂集存在外心间距数 65 个(其中: 一维: 4 个、二维: 3 个  $\times$  6 棱 = 18 个、三维: 7 个  $\times$  4 面 = 28 个、四维: 15 个  $\times$  1 体 = 15 个), 均可(免坐标)用公式(3)计算;

因一维、二维共 10 点外心均与一维、二维 10 点重心共点, 间距数  $\frac{(10-1) \times 10}{2} = 45$  个, 可(免坐标)用文[3]重心球球心间距公式计算(属幂集部分也可用公式(3)计算);

其余无法使用上述(免坐标)计算间距的, 均用 2 点坐标距离公式计算。

#### 3.4. 一至四维的外心连线含有 18 组 4 点所围的 4 边形符合托勒密定理

其中: 维数 1 (2、2) 3 间连线 12 组、维数 2 (3、3) 4 间连线 6 组四边形间, 均可用 4 点共面的平面

方程证明, 因各组均存在一组对角各为  $90^\circ$  度, 所以均可用托勒密定理: 四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积, 其 18 组线段关系等式, 可以重新组合成新等式。

还可以根据文[6]用已知的棱角、面角的正弦余弦的代数值, 直接得出其互补对角的相同正弦和负余弦的代数值。因此上述互补对角(钝角)也可以借用文[6]的相关棱正弦、余弦定理; 和相关面角正弦、余弦定理。

## 参考文献

- [1] 蔡国伟. 体积勾股定理的证明[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 723-729. <https://doi.org/10.12677/PM.2019.96096>
- [2] 蔡国伟. 论勾股四态、以及正交球心间同构的场方程[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 763-770. <https://doi.org/10.12677/PM.2019.97100>
- [3] 蔡国伟. 证明正交四球间 15 个重心球及距离公式的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 880-889. <https://doi.org/10.12677/PM.2019.98115>
- [4] 蔡国伟. 证明正交四球间 15 个垂心球及距离公式的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 928-948. <https://doi.org/10.12677/PM.2019.98120>
- [5] 蔡国伟. 证明以正交 4 球半径为 4 元数欧拉线的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1043-1059. <https://doi.org/10.12677/PM.2019.99130>
- [6] 蔡国伟. 垂心四面体 4 态的正弦余弦定律及其换元算法[J]. 理论数学, 2019, 9(10): 1174-1186. <https://doi.org/10.12677/PM.2019.910144>