Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1145-1154
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012136

一类具有logistic增长的消耗型趋化方程组的性质

林小汇，蒋　科*

西华大学理学院，四川 成都
Email: 1617254875@qq.com, *jiangke940424@163.com

收稿日期：2020年11月17日；录用日期：2020年12月11日；发布日期：2020年12月18日

摘　要

趋化性是指由空间中分布不均匀的物质所产生的化学信号刺激细胞或有机体的定向运动，其在免疫系统、胚胎发育、肿瘤生长、种群动态等生物学现象中起着重要的作用。趋化方程组(或趋化模型)是刻画趋化现象的偏微分方程组。因而，研究趋化方程组具有重要的理论价值和极强的现实意义。文章研究一类具有logistic源增长的消耗型趋化方程组在*N*维有界区域上的齐次Neumaan初边值问题的性质。利用半群理论、L^p估计、极大Sobolev正则性、Moser迭代等方法，证明了当logistic源项的非线性增长指标$a_1 > \frac{(N-2)_+}{N}\chi\tilde{C}$时，方程组存在唯一的全局有界经典解，其中$\tilde{C} = C_\infty C_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{1}{\frac{N}{2}+1}}$，而$C_\infty = \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$，$C_{\frac{N}{2}+1}$为极大Sobolev正则性中相应的常数。

关键词

趋化性，logistic源，经典解

Property of a Dissipative Chemotaxis System with Logistic Growth

Xiaohui Lin, Ke Jiang*

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: 1617254875@qq.com, *jiangke940424@163.com

Received: Nov. 17th, 2020; accepted: Dec. 11th, 2020; published: Dec. 18th, 2020

*通讯作者。

文章引用: 林小汇, 蒋科. 一类具有 logistic 增长的消耗型趋化方程组的性质[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1145-1154. DOI: 10.12677/pm.2020.1012136

Abstract

Chemotaxis is known to stimulate the biased motion of cells or organisms by chemical signals produced by substances that are unevenly distributed in space, which has a crucial role in a wide range of biological phenomena such as immune system response, embryo development, tumor growth, population dynamics, etc. Chemotaxis equations (or chemotaxis system) are partial differential equations describing chemotaxis phenomena. Therefore, it is of great theoretical value and practical significance to study chemotaxis system. This article studies the properties of a homogeneous Neumann initial boundary value problem for an expendable chemotaxis system with logistic source growth in an *N*-dimensional bounded domain. Using semigroup theory, L^p-estimation, maximal Sobolev regularity, Moser iteration and other methods, it is proved that when $a_1 > \frac{(N-2)_+}{N}\chi\tilde{C}$, then the system possesses a global classical solution which is bounded, where $\tilde{C} = C_\infty C_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{1}{\frac{N}{2}+1}}$, $C_\infty = \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ and $C_{\frac{N}{2}+1}$ is a constant which is corresponding to the maximal Sobolev regularity.

Keywords

Chemotaxis, Logistic Source, Classical Solution

1. 引言

趋化性亦被称为化学趋向性，是细胞或有机体对外界环境中的化学刺激所产生的趋向性反应，在诸如免疫系统反应、胚胎发育、肿瘤生长、种群动力学等生物学现象中起着至关重要的作用[1] [2]。20 世纪 70 年代初，Keller 和 Segel 研究粘液菌落的趋化现象时，基于生物细胞和化学物质的质量守恒定律，提出了标准的 Keller-Segel 模型[3]：

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v), & x\in\Omega, t>0,\\
v_t = \Delta v - v + u, & x\in\Omega, t>0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $u(x,t)$ 表示细胞密度，$v(x,t)$ 表示化学信号浓度。第二个方程表示，细胞既消耗化学物质，又会产生化学物质。对于方程(1)的 Neumann 初边值问题，Osaki，Nagai，Winkler [4] [5] [6]等人证明了空间维数 $N=1$ 时，对于任意充分光滑的初值，都存在全局有界经典解；$N=2$ 时，对于任意小的初值，经典解是全局存在的；当 $N\ge 3$ 时，在球形区域中，对于任意充分光滑的初值，其径向对称解会在有限时刻爆破。

由于细胞可以根据多种趋化诱因调整运动，许多学者开始关注经典 Keller-Segel 模型的各种变体。其中一类典型的模型是只含信号消耗机制而没有产生机制：

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v), & x\in\Omega, t>0,\\
v_t = \Delta v - uv, & x\in\Omega, t>0,\\
\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & x\in\partial\Omega, t>0,\\
u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega.
\end{cases}
\tag{2}
$$

此模型的第二个方程表明，氧气在与细菌接触后，按照固定的速率降解，并且不再产生额外的氧气。若Ω为有界凸区域，Tao 和 Winkler [7] [8]对解的适定性问题做了大量的工作。

Issa 和 Shen [9]考虑了以下一类具有 logistic 源项的趋化模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + u\left(a_0(x,t) - a_1(x,t)u - a_2(x,t)\int_\Omega u\right), & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v - \lambda v + \mu u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

其中$\lambda > 0, \tau > 0, \mu > 0$，$\chi \in \mathbb{R}$表示趋化敏感性。$u\left(a_0 - a_1 u - a_2\int_\Omega u\right)$表示 logistic 生长源项，$a_0$表示种群的增长，$a_1 u$表示物种的内部竞争，$a_2\int_\Omega u$表示物种的总质量对物种增长的影响。作者证明了非负经典解在一定条件下的全局存在性和有界性。

受上述工作的启发，若模型(3)的第二个方程变为只含信号消耗项而没有信号产生项，那么改变后的方程组是否还具有类似的性质是值得研究的问题。更准确地说，我们将考虑：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + u\left(a_0 - a_1 u - a_2\int_\Omega u\right), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(\cdot,0) = u_0, v(\cdot,0) = v_0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

其中$\Omega \subset \mathbb{R}^N\ (N \ge 1)$是一个具有光滑边界的有界区域，$\chi > 0$，$a_i > 0\ (i = 0,1,2)$。本文的初值$u_0, v_0$满足

$$\begin{cases} u_0 \in C^0(\bar{\Omega}), & u_0 \ge 0,\ u_0\text{不恒等于}0,\ x \in \bar{\Omega}, \\ v_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), & v_0 \ge 0,\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

定理 1 设$\Omega \subset \mathbb{R}^N\ (N \ge 1)$是一个具有光滑边界的有界区域，$a_i > 0\ (i = 0,1,2)$，$\chi > 0$，若初值$u_0, v_0$满足(5)式，则存在常数$\tilde{C} > 0$，使得当$a_1 > \dfrac{(N-2)_+}{N}\chi\tilde{C}$时，初边值问题(4)的经典解整体存在且有界，即存在常数$C > 0$，使得对任意的$t \in (0,\infty)$有

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \le C, \tag{6}$$

其中$\tilde{C} = C_\infty C_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{1}{\frac{N}{2}+1}}$，而$C_\infty = \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$，$C_{\frac{N}{2}+1}$为极大 Sobolev 正则性中相应的常数。

论文的其余部分组织如下：第二节介绍经典解的局部存在性和一些基本的性质。第三节给出主要结果的证明。

2. 经典解的局部存在性和一些基本的性质

引理 1 ([10] [11])设$\Omega \subset \mathbb{R}^N\ (N \ge 1)$是一个具有光滑边界的有界区域，初值$u_0, v_0$满足(5)式，$q > N$，$a_i > 0\ (i = 0,1,2)$，$\chi > 0$，则存在$T_{\max} \in (0,\infty]$，使得初边值问题(4)有唯一的经典解$(u,v)$，满足

$$\begin{cases} u \in C^0(\bar{\Omega} \times [0,T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0,T_{\max})), \\ v \in C^0(\bar{\Omega} \times [0,T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0,T_{\max})), \end{cases}$$

且当$T_{\max}<\infty$时，有

$$\limsup_{t\to T_{\max}}\left(\left\|u(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|v(\cdot,t)\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\right)=\infty. \tag{7}$$

引理 2 ([12])设$\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N\ge1)$是一个具有光滑边界的有界区域，$\gamma\in(1,+\infty)$，$g\in L^\gamma\left((0,T);L^\gamma(\Omega)\right)$，$v$是下列初边值问题的解

$$\begin{cases} v_t-\Delta v+v=g, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

其中$s_0\in(0,T), v(\cdot,s_0)\in W^{2,\gamma}(\Omega)\ (\gamma>N)$，且$\dfrac{\partial v(\cdot,s_0)}{\partial \boldsymbol{n}}=0$，那么存在一个常数$C_\gamma>0$，使得

$$\begin{aligned}&\int_{s_0}^T \mathrm{e}^{\gamma s}\left\|\Delta v(\cdot,s)\right\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma \mathrm{d}s\\ &\le C_\gamma\left(\int_{s_0}^T \mathrm{e}^{\gamma s}\left\|g(\cdot,s)\right\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma \mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\gamma s_0}\left(\left\|v(\cdot,s_0)\right\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma+\left\|\Delta v(\cdot,s_0)\right\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma\right)\right).\end{aligned} \tag{9}$$

引理 3 ([13] [14] [15])设$\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N\ge1)$是一个具有光滑边界的有界区域，$(u,v)$是初边值问题(4)的解，$a_i>0\ (i=0,1,2)$，$\chi>0$，初值$u_0,v_0$满足(5)式，则对任意的$t\in(0,T_{\max})$有

$$\left\|v(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\le\left\|v_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}=:C_\infty. \tag{10}$$

3. 经典解的全局存在性和有界性

引理 4 设$\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N\ge1)$是一个具有光滑边界的有界区域，$(u,v)$为初边值问题(4)在$(0,T_{\max})$内的解，初值$u_0,v_0$满足(5)式，$a_i>0\ (i=0,1,2)$，$\chi>0$。设$a_1>\dfrac{(N-2)_+}{N}\chi\tilde{C}$，则存在$q_0>\max\left\{1,\dfrac{N}{2}\right\}$及常数$C>0$，使得对任意的$t\in(0,T_{\max})$有

$$\int_\Omega u^{q_0}(\cdot,t)\le C, \tag{11}$$

其中$\tilde{C}=C_\infty C_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{1}{\frac{N}{2}+1}}$，而$C_\infty$为(10)式中所给定的常数，$C_{\frac{N}{2}+1}$为(9)式中令$\gamma=\dfrac{N}{2}+1$时的常数。

证明：将方程组(4)的第一个方程两边同时乘以$u^{\gamma-1}$，再在Ω上对x积分并利用u的非负性得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^\gamma+(\gamma-1)\int_\Omega u^{\gamma-2}|\nabla u|^2\\ &=(\gamma-1)\chi\int_\Omega u^{\gamma-1}\nabla u\cdot\nabla v+\int_\Omega u^\gamma\left(a_0-a_1u-a_2\int_\Omega u\right)\\ &\le(\gamma-1)\chi\int_\Omega u^{\gamma-1}\nabla u\cdot\nabla v+\int_\Omega u^\gamma(a_0-a_1u)\\ &=-\frac{\chi(\gamma-1)}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma\Delta v-\frac{\gamma+1}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma+\int_\Omega u^\gamma\left(a_0+\frac{\gamma+1}{\gamma}-a_1u\right),\quad t\in(0,T_{\max}),\end{aligned} \tag{12}$$

又因为

$$\int_\Omega u^{\gamma-2}|\nabla u|^2=\frac{4}{\gamma^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}\right|^2,\ \ t\in(0,T_{\max}),$$

故

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^\gamma+\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}\right|^2\le-\frac{\chi(\gamma-1)}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma\Delta v-\frac{\gamma+1}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma+\int_\Omega u^\gamma\left(a_0+\frac{\gamma+1}{\gamma}-a_1u\right),\quad t\in(0,T_{\max}). \tag{13}$$

由 Young 不等式知：对任意的 $\varepsilon>0$，都有

$$\int_\Omega u^\gamma\left(a_0+\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)\le\varepsilon\int_\Omega u^{\gamma+1}+C_1,\quad t\in(0,T_{\max}), \tag{14}$$

其中 $C_1:=\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\varepsilon\right)^{-\gamma}\left(a_0+\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{\gamma+1}|\Omega|$。由(13)与(14)式知

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^\gamma+\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}\right|^2\le\frac{\chi(\gamma-1)}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma|\Delta v|-\frac{\gamma+1}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma+(\varepsilon-a_1)\int_\Omega u^{\gamma+1}+C_1,\quad t\in(0,T_{\max}). \tag{15}$$

再利用 Young 不等式可知：对任意的 $m>0$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\chi(\gamma-1)}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma|\Delta v|&\le m\int_\Omega u^{\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{-\gamma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}\int_\Omega|\Delta v|^{\gamma+1}\\&=m\int_\Omega u^{\gamma+1}+A_\gamma m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}\int_\Omega|\Delta v|^{\gamma+1},\quad t\in(0,T_{\max}),\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $A_\gamma:=\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{-\gamma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\gamma+1}$。将(16)式带入(15)式得

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^\gamma+\frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{\gamma}{2}}\right|^2\le(m+\varepsilon-a_1)\int_\Omega u^{\gamma+1}-\frac{\gamma+1}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma+A_\gamma m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}\int_\Omega|\Delta v|^{\gamma+1}+C_1,\quad t\in(0,T_{\max}). \tag{17}$$

取定 $s_0\in(0,T_{\max})$ 且 $s_0\le1$，由引理 1 可知存在常数 $K>0$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le K,\quad\|\Delta v(\cdot,s_0)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}\le K,\quad t\in(0,s_0]. \tag{18}$$

设 y 为常微分方程

$$\begin{cases}y'=-(\gamma+1)y+\gamma f(t),\quad t\in(s_0,T_{\max}),\\y(s_0)=\|u(s_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\end{cases} \tag{19}$$

的解，其中 $f(t)=(m+\varepsilon-a_1)\int_\Omega u^{\gamma+1}+A_\gamma m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}\int_\Omega|\Delta v|^{\gamma+1}+C_1$。

由(17)和(19)式，并结合抛物型方程的比较原理和常数变易法，对任意的 $t\in(s_0,T_{\max})$ 有

$$\int_\Omega u^\gamma(\cdot,t)\le y(t)=\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s_0)}\|u(\cdot,s_0)\|_{L^\infty(\Omega)}+\gamma\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s)}f(s)\mathrm{d}s.$$

再结合(18)式有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma}\int_\Omega u^\gamma&\le\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s_0)}\|u(\cdot,s_0)\|_{L^\infty(\Omega)}+(m+\varepsilon-a_1)\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s)}\int_\Omega u^{\gamma+1}\mathrm{d}s\\&\quad+A_\gamma m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s)}\int_\Omega|\Delta v|^{\gamma+1}\mathrm{d}s+C_1\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s)}\mathrm{d}s\\&\le(m+\varepsilon-a_1)\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s)}\int_\Omega u^{\gamma+1}\mathrm{d}s\\&\quad+A_\gamma m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}\int_{s_0}^t\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s)}\int_\Omega|\Delta v|^{\gamma+1}\mathrm{d}s+\frac{K}{\gamma}\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s_0)}+\frac{C_1}{\gamma+1}.\end{aligned} \tag{20}$$

由引理 2 可知，对任意的 $t\in(s_0,T_{\max})$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_{s_0}^{t} e^{-(\gamma+1)(t-s)}\left\|\Delta v(\cdot,s)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}ds\\
&\le C_{\gamma+1}\int_{s_0}^{t}\left\|v(\cdot,s)-uv(\cdot,s)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}ds\\
&\quad+C_{\gamma+1}e^{-(\gamma+1)(t-s_0)}\left(\left\|v(\cdot,s_0)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}+\left\|\Delta v(\cdot,s_0)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}\right)\\
&\le\frac{C_{\gamma+1}}{\gamma+1}\left\|v_0\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\gamma+1}+C_{\gamma+1}\left\|v_0\right\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\gamma+1}\int_{s_0}^{t}e^{-(\gamma+1)(t-s)}\left\|u(\cdot,s)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}ds\\
&\quad+C_{\gamma+1}e^{-(\gamma+1)(t-s_0)}\left(\left\|v(\cdot,s_0)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}+\left\|\Delta v(\cdot,s_0)\right\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}^{\gamma+1}\right),
\end{aligned}\tag{21}$$

其中 $C_{\gamma+1}>0$ 为引理 2 所对应给定的常数。结合(18)，(20)和(21)式，对任意的 $t\in(s_0,T_{\max})$ 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma}\int_\Omega u^{\gamma}&\le\left(m+\varepsilon+A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}-a_1\right)\int_{s_0}^{t}e^{-(\gamma+1)(t-s)}\int_\Omega u^{\gamma+1}ds\\
&\quad+e^{-(\gamma+1)(t-s_0)}\left(\frac{K}{\gamma}+A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}K^{\gamma+1}+A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}\right)\\
&\quad+\frac{C_{\gamma+1}}{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}\chi^{\gamma+1}A_\gamma m^{-\gamma}+\frac{C_1}{\gamma+1}\\
&\le\left(m+\varepsilon+A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}-a_1\right)\int_{s_0}^{t}e^{-(\gamma+1)(t-s)}\int_\Omega u^{\gamma+1}ds+C_2.
\end{aligned}\tag{22}$$

其中 $C_2:=\frac{K}{\gamma}+A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}K^{\gamma+1}+A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}+\frac{C_{\gamma+1}}{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}\chi^{\gamma+1}A_\gamma m^{-\gamma}+\frac{C_1}{\gamma+1}$，$C_\infty$ 为引理 3 中所给定的常数。令

$$H(m)=A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma}\chi^{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}+m,$$

则

$$H'(m)=-\gamma A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma-1}\chi^{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}+1,$$

因此

$$H'(m)=0\Leftrightarrow m=\left(\gamma A_\gamma C_{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\chi C_\infty.$$

则对任意的 $m>0$ 有

$$H''(m)=\gamma(\gamma+1)A_\gamma C_{\gamma+1}m^{-\gamma-2}\chi^{\gamma+1}C_\infty^{\gamma+1}>0,$$

所以

$$\min_{m>0}H(m)=H(m_0),$$

其中 $m_0=\left(\gamma A_\gamma C_{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\chi C_\infty$，那么

$$H(m_0)=\left(A_\gamma C_{\gamma+1}\gamma^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\chi C_\infty(1+\gamma),\tag{23}$$

其中 $A_\gamma:=\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{-\gamma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\gamma+1}$。因此

$$A_\gamma^{\frac{1}{\gamma+1}}=\left(\frac{1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)=(\gamma+1)^{-1}\gamma^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right).\tag{24}$$

由(23)和(24)式可得

$$H\left(m_0\right)=\frac{\gamma-1}{\gamma}C_{\gamma+1}^{\frac{1}{\gamma+1}}\chi C_{\infty}.$$

最后，再结合(22)式可得

$$\frac{1}{\gamma}\int_{\Omega}u^{\gamma}\le\left(\varepsilon+\frac{\gamma-1}{\gamma}C_{\gamma+1}^{\frac{1}{\gamma+1}}C_{\infty}\chi-a_1\right)\int_{s_0}^{t}\mathrm{e}^{-(\gamma+1)(t-s)}\int_{\Omega}u^{\gamma+1}\mathrm{d}s+C_2,\quad t\in\left(0,T_{\max}\right).\tag{25}$$

由于 $a_1>\frac{(N-2)_+}{N}\chi\tilde{C}=\frac{\frac{N}{2}-1}{\frac{N}{2}}\chi\tilde{C}$ （$\tilde{C}=C_{\infty}C_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{1}{\frac{N}{2}+1}}$），则由实数的连续性可知，存在 $q_0>\frac{N}{2}$，使得

$$a_1>\frac{q_0-1}{q_0}\chi\tilde{C},$$

令 $\varepsilon<a_1-\frac{q_0-1}{q_0}\tilde{C}\chi$，则 $\varepsilon+\frac{q_0-1}{q_0}C_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{1}{\frac{N}{2}+1}}C_{\infty}\chi-a_1<0$，在(25)式中，取 $\gamma=q_0$，那么

$$\frac{1}{q_0}\int_{\Omega}u^{q_0}\le C_2,$$

即对任意的 $t\in\left(0,T_{\max}\right)$，(11)式成立。

引理 5 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $\left(N\ge1\right)$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$\left(u,v\right)$ 为初边值问题(4)在 $\left(0,T_{\max}\right)$ 内的解，初值 u_0,v_0 满足(5)式，$a_i>0\left(i=0,1,2\right)$，$\chi>0$，且 $q_0>\max\left\{1,\frac{N}{2}\right\}$，$a_1>\frac{(N-2)_+}{N}\chi\tilde{C}$。则对任意的 $q\in\left(1,\frac{Nq_0}{\left(N-q_0\right)_+}\right)$，存在常数 $C>0$，使得对任意的 $t\in\left(0,T_{\max}\right)$ 有

$$\left\|\nabla v\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^q(\Omega)}\le C,\tag{26}$$

其中 $\tilde{C}$ 为引理 4 中所给定的常数。

证明：由方程组(4)中的第二个方程和常数变易法知，

$$v\left(\cdot,t\right)=\mathrm{e}^{t\Delta}v_0-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}uv\left(\cdot,s\right)\mathrm{d}s,\quad t\in\left(0,T_{\max}\right).\tag{27}$$

由[[16]引理 1.3]以及 Hölder 不等式知，对任意的 $t\in\left(0,T_{\max}\right)$ 有

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla v\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^q(\Omega)}\\&\le C_1\left\|v_0\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+C_2\int_0^t\left(1+\left(t-s\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)_+}\right)\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left\|uv\left(\cdot,s\right)\right\|_{L^{q_0}(\Omega)}\mathrm{d}s\\&\le C_1\left\|v_0\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}+C_2\left\|v_0\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\sup_{t\in(0,T_{\max})}\left\|u\left(\cdot,t\right)\right\|_{L^{q_0}(\Omega)}\int_0^{\infty}\left(1+s^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)_+}\right)\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{28}$$

其中常数 $C_1,C_2>0$。因为 $q<\frac{Nq_0}{\left(N-q_0\right)_+}$，所以 $\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)_+<1$。由(5)和(11)式可得(26)式。

引理 6 设$\Omega\subset\mathbb{R}^N\,(N\ge 1)$是一个具有光滑边界的有界区域，$(u,v)$为初边值问题(4)在$(0,T_{\max})$内的解，初值$u_0,v_0$满足(5)式，$a_i>0\,(i=0,1,2)$，$\chi>0$，$a_1>\frac{(N-2)_+}{N}\chi\tilde{C}$，则对任意的$p\ge 1$，存在常数$C>0$，使得对任意的$t\in(0,T_{\max})$有

$$\int_\Omega u^p(\cdot,t)\le C, \tag{29}$$

其中$\tilde{C}$为引理 4 中所给定的常数。

证明：由于$q_0>\max\left\{1,\frac{N}{2}\right\}$，那么$q_0\in\left(1,\frac{Nq_0}{2(N-q_0)_+}\right)$，由引理 4 和引理 5 可知

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\int_\Omega u^{q_0}(\cdot,t)<\infty, \tag{30}$$

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\int_\Omega|\nabla v(\cdot,t)|^{2q_0}<\infty. \tag{31}$$

(i) 如果$p\le q_0$，则$L^{q_0}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$，那么存在常数$C_1>0$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}\le C_1\|u(\cdot,t)\|_{L^{q_0}(\Omega)},$$

由(30)式可得(29)式。

(ii) 如果$p>q_0$，将方程组(4)的第一个方程两边同时乘以u^{p-1}，再在Ω上对x积分得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\frac{4(p-1)}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right|^2\\&\le\chi(p-1)\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla v+a_0\int_\Omega u^p-a_1\int_\Omega u^{p+1},\quad t\in(0,T_{\max}).\end{aligned} \tag{32}$$

由 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\frac{4(p-1)}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right|^2\\&\le\chi(p-1)\int_\Omega u^{p-1}\nabla u\cdot\nabla v-\frac{a_1}{2}\int_\Omega u^{p+1}+C_2\\&\le\frac{p-1}{2}\int_\Omega u^{p-2}|\nabla u|^2+\frac{\chi^2(p-1)}{2}\int_\Omega u^p|\nabla v|^2-\frac{a_1}{2}\int_\Omega u^{p+1}+C_2\\&=\frac{2(p-1)}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right|^2+\frac{\chi^2(p-1)}{2}\int_\Omega u^p|\nabla v|^2-\frac{a_1}{2}\int_\Omega u^{p+1}+C_2,\ t\in(0,T_{\max}),\end{aligned} \tag{33}$$

其中常数$C_2>0$。由 Hölder 不等式和(31)式有

$$\begin{aligned}\frac{\chi^2(p-1)}{2}\int_\Omega u^p|\nabla v|^2&\le\frac{\chi^2(p-1)}{2}\left(\int_\Omega u^{\frac{q_0}{q_0-1}p}\right)^{\frac{q_0-1}{q_0}}\left(\int_\Omega|\nabla v|^{2q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}\\&\le C_3\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|^2_{L^{\frac{2q_0}{q_0-1}}(\Omega)},\qquad t\in(0,T_{\max}),\end{aligned} \tag{34}$$

其中常数$C_3>0$。由 Gagliardo-Nirenberg 不等式知，存在一个正常数C_4，使得

$$C_3\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|^2_{L^{\frac{2q_0}{q_0-1}}(\Omega)} \le C_4\left\|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right\|^{2\theta}_{L^2(\Omega)}\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|^{2(1-\theta)}_{L^{\frac{2q_0}{p}}(\Omega)}+C_4\left\|u^{\frac{p}{2}}\right\|^2_{L^{\frac{2q_0}{p}}(\Omega)}$$

其中 $\theta=\dfrac{\dfrac{Np}{2q_0}-\dfrac{N(q_0-1)}{2q_0}}{1+\dfrac{N}{2}\left(\dfrac{p}{q_0}-1\right)}$，由于 $\dfrac{N}{2}<q_0<p$，故 $0<\theta<1$。再利用 Young 不等式可得

$$\frac{\chi^2(p-1)}{2}\int_\Omega u^p|\nabla v|^2 \le \frac{2(p-1)}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right|^2+C_5,\quad t\in(0,T_{\max}). \tag{35}$$

再将(35)式带入(33)式，

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p &\le \frac{2(p-1)}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right|^2-\frac{2(p-1)}{p^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{p}{2}}\right|^2-\frac{a_1}{2}\int_\Omega u^{p+1}+C_6\\ &=-\frac{a_1}{2}\int_\Omega u^{p+1}+C_6\le-\frac{a_1}{2|\Omega|^{\frac{1}{p}}}\left(\int_\Omega u^p\right)^{\frac{p+1}{p}}+C_6,\quad t\in(0,T_{\max}).\end{aligned} \tag{36}$$

其中常数 $C_6>0$，故(29)式成立。

定理 1 的证明 由引理 6 可知，对任意的 $p\ge1$，$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)}$ 是有界的，由 Neumann 热半群的性质[17] [18]可知，存在常数 $C_1>0$，使得

$$\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_1 \tag{37}$$

另一方面，由 Moser-Alikakos 迭代理论[12]可知，存在一个常数 $C_2>0$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C_2 \tag{38}$$

由(37)和(38)式及引理 1 可知 $T_{\max}=\infty$，定理 1 得证。

致　谢

感谢审稿人的审阅及对文章的意见和建议。

参考文献

[1] Lauffenburger, D.A. (1991) Quantitative Studies of Bacterial Chemotaxis and Microbial Population Dynamics. *Microbial Ecology*, **22**, 175-185. https://doi.org/10.1007/BF02540222

[2] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1971) Model for Chemotaxis. *Journal of Theoretical Biology*, **30**, 225-234. https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90050-6

[3] Keller, E.F. and Segel, L.A. (1970) Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability. *Journal of Theoretical Biology*, **26**, 399-415. https://doi.org/10.1016/0022-5193(70)90092-5

[4] Nagai, T., Senba, T. and Yoshida, K. (1997) Application of the Trudinger-Moser Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis. *Funkcialaj Ekvacioj*, **40**, 411-433.

[5] Osaki, K. and Yagi, A. (2001) Finite Dimensional Attractor for One-Dimensional Keller-Segel Equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, **44**, 441-469.

[6] Winkler, M. (2013) Finite-Time Blow-Up in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Keller-Segel System. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **100**, 748-767. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2013.01.020

[7] Tao, Y. (2011) Boundedness in a Chemotaxis Model with Oxygen Consumption by Bacteria. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **381**, 521-529. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.041

[8] Tao, Y. and Winkler, M. (2012) Eventual Smoothness and Stabilization of Large-Data Solutions in a Three-Dimensional Chemotaxis System with Consumption of Chemoattractant. *Journal of Differential Equations*, **252**, 2520-2543. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.07.010

[9] Issa, T.B. and Shen, W. (2020) Pointwise Persistence in Full Chemotaxis Models with Logistic Source on Bounded Heterogeneous Environments. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **490**, 124204. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124204

[10] Winkler, M. (2010) Boundedness in the Higher-Dimensional Parabolic-Parabolic Chemotaxis System with Logistic Source. *Communications in Partial Differential Equations*, **35**, 1516-1537. https://doi.org/10.1080/03605300903473426

[11] 林静秋, 何璞, 侯智博. 一类带 logistic 源项的趋化方程组解的整体存在性和有界性(英文)[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2018, 55(5): 897-904.

[12] Cao, X. (2014) Boundedness in a Quasilinear Parabolic-Parabolic Keller-Segel System with Logistic Source. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **412**, 181-188. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.061

[13] Lankeit, J. and Wang, Y.L. (2017) Global Existence, Boundedness and Stabilization in a High-Dimensional Chemotaxis System with Consumption. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **37**, 6099-6121. https://doi.org/10.3934/dcds.2017262

[14] Peng, Y.P. and Xiang, Z.Y. (2019) Global Existence and Convergence Rates to a Chemotaxis-Fluids System with Mixed Boundary Conditions. *Journal of Differential Equations*, **267**, 1277-1321. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.02.007

[15] Wang, Y.L., Winkler, M. and Xiang, Z.Y. (2018) The Small-Convection Limit in a Two-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes system. *Mathematische Zeitschrift*, **289**, 71-108. https://doi.org/10.1007/s00209-017-1944-6

[16] Winkler, M. (2010) Aggregation vs. Global Diffusive Behavior in the Higher-Dimensional Keller-Segel Model. *Journal of Differential Equations*, **248**, 2889-2905. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.02.008

[17] Winkler, M. (2014) Global Asymptotic Stability of Constant Equilibria in a Fully Parabolic Chemotaxis System with Strong Logistic Dampening. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1056-1077. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.023

[18] 赵丽, 侯智博. 一类趋化－流体耦合方程组的局部存在性[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2019, 32(4): 94-100.