Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 7-15
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111002

一类含有参数的分数阶微分方程边值问题的单调算子方法

邵宏宇，王文霞*

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: 369487978@qq.com, *wwxgg@126.com

收稿日期：2020年12月9日；录用日期：2021年1月8日；发布日期：2021年1月15日

摘 要

利用单调算子和混合单调算子以及格林函数的性质，研究了一类含有参数的分数阶微分方程边值问题正解的存在唯一性，得到了存在唯一正解的充分条件和正解的若干性质，最后给出了两个具体的例子。

关键词

分数阶微分方程，边值问题，正解

Monotone Operator Method for a Class of Boundary Value Problem of Fractional Differential Equations with Parameter

Hongyu Shao, Wenxia Wang*

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: 369487978@qq.com, *wwxgg@126.com

Received: Dec. 9th, 2020; accepted: Jan. 8th, 2021; published: Jan. 15th, 2021

Abstract

By using monotone operator, mixed monotone operator and properties of Green function, the existence and uniqueness of monotone operator method for a class of boundary value problem of fractional differential equations with parameter are studied and some sufficient conditions for the

*通讯作者。

文章引用：邵宏宇，王文霞. 一类含有参数的分数阶微分方程边值问题的单调算子方法[J]. 理论数学，2021，11(1): 7-15. DOI: 10.12677/pm.2021.111002

existence and uniqueness of a positive solution are obtained. Finally, two examples are given to illustrate the main results.

Keywords

Fractional Differential Equation, Boundary Value Problem, Positive Solution

1. 引言

近三十年来，在包括分形现象在内的物理、工程等诸多应用学科领域的应用拓展，激发了科研人员对分数阶微积分的巨大热情。现在分数阶微分方程理论及其应用的研究已成为国内外研究的热点问题之一。在微分方程的理论研究及其应用中，含有参数的分数阶微分方程，包括特征值问题及边值条件中含有参数的分数阶微分方程都具有十分重要的研究价值，参见文献[1]-[6]及其参考文献。

最近，文献[7]研究了如下含参数的分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}x(t)+\lambda f(t,x(t))=0, 0<t<1, \\ ax(0)-bx'(0)=0, x(1)=\int_0^1 k(s)g(x(s))\mathrm{d}s+\mu. \end{cases}$$

作者利用不动点指数理论研究了参数对解的性质的影响。文献[8]研究了如下含参数的分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\delta}u(t)+f(t,u(t))=0,\ \ a.e.\ t\in(0,1), \\ \lim\limits_{t\to0^+} t^{2-\delta}u(t)=a, u(1)=b. \end{cases}$$

作者利用上下解和 Schauder 不动点定理得到了边值问题至少有一个正解，两个正解和没有正解的充分条件。

受上述文献启发，本文研究如下含有非线性积分项的分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\lambda f(t,u(t))=0,\ t\in(0,1], \\ \lim\limits_{t\to0^+} t^{2-\alpha}u(t)=0,\ u(1)=\lambda\left(\int_0^1 k(s)g(u(s))\mathrm{d}s+b\right), \end{cases} \tag{1.1}$$

以及

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\lambda f(t,u(t))=0,\ t\in(0,1], \\ \lim\limits_{t\to0^+} t^{2-\alpha}u(t)=0,\ u(1)=\lambda\int_0^1 k(s)g(u(s))\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $D_{0^+}^{\alpha}$ 为 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数，$\alpha\in(1,2]$，$b>0$，参数 $\lambda>0$，$k\in C([0,1],[0,+\infty))$，$f\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$，$g\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$。当 u 有界时，$f(t,u)$ 在 $t\in(0,1]$ 上有界，$g(u)$ 有界。

2. 预备知识与引理

定义 2.1 函数 $u:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数积分定义为

$$I_{0^+}^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t,$$

等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义。

定义 2.2 连续函数 $u:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数导数定义为

$$D_{0^+}^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\int_0^x\frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t,$$

等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义，其中 $n=\min\{m\in Z:m\ge\alpha\}$。

定义 2.3 边值问题(1.1)的解 u 称为正解，如果 $u(t)\ge 0$，$t\in(0,1]$，且 $\exists t_0\in(0,1]$，使得 $u(t_0)>0$。

下面，给出半序 Banach 空间中的一些基本概念[9]。

设 $(E,\|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间，θ 表示 E 中的零元。$P\subset E$ 是一个锥，“$\le$”是由 P 引出的半序，即 $\forall x,y\in E$，$y-x\in P\Leftrightarrow x\le y$。称锥 P 为正规的，如果存在常数 $N>0$，使得 $\theta\le x\le y\Rightarrow\|x\|\le N\|y\|$，称最小的 N 为 P 的正规常数。称 $x\sim y$，若 $\forall x,y\in E$，$\exists\lambda,\mu>0$，使得 $\lambda x\le y\le\mu x$。对于给定的 $h>0$，定义 $P_h=\{x\in P:x\sim h\}$。

定义 2.4 称 $A:P\times P\to P$ 是混合单调算子，若 $A(x,y)$ 关于 x 是增算子，关于 y 是减算子。即 $\forall u_1,u_2,v_1,v_2\in P$，$u_1\le u_2$，$v_1\le v_2$，有 $A(u_1,v_1)\le A(u_2,v_2)$。

引理 2.5 [10]设 E 是一个实 Banach 空间，P 是 E 中的正规锥，$h>\theta$，算子 $A:P\to P$ 是增算子，$\exists h_0\in P_h$，使得 $Ah_0\in P_h$，且 $\forall x\in P$，$r\in(0,1)$，$\exists\phi(r)\in(r,1)$，使得 $A(rx)\ge\phi(r)Ax$。则

(i) 方程 $Ax=x$ 在 P_h 中有唯一解 x^*；

(ii) $\forall x_0\in P_h$，设 $x_n=Ax_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to x^*$。

引理 2.6 [10] 假设引理 2.5 中的条件成立，x_λ 是方程 $Ax=\lambda x$ 的唯一解。则

(i) x_λ 关于 λ 严格单调递减，即 $\forall 0<\lambda_1<\lambda_2$，有 $x_{\lambda_1}>x_{\lambda_2}$；

(ii) 若 $\exists\beta\in(0,1)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^{\beta}$，则 x_λ 关于 λ 连续，即由 $\lambda\to\lambda_0\ (\lambda>0)$ 有 $\|x_\lambda-x_{\lambda_0}\|\to 0$；

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\|x_\lambda\|=\infty$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|x_\lambda\|=0$。

引理 2.7 [11] 设 E 是一个实 Banach 空间，P 是 E 中的正规锥，算子 $A:P\times P\to P$ 是混合单调算子，$\exists h\in P$，$h\ne\theta$，使得 $A(h,h)\in P_h$，且 $\forall x,y\in P$，$r\in(0,1)$，$\exists\phi(r)\in(r,1)$，使得 $A(rx,r^{-1}y)\ge\phi(r)A(x,y)$。则

(i) 方程 $A(x,x)=x$ 在 P_h 中有唯一解 x^*；

(ii) $\forall x_0,y_0\in P_h$，令 $x_n=A(x_{n-1},y_{n-1})$，$y_n=A(y_{n-1},x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，有 $\|x_n-x^*\|\to 0$，$\|y_n-x^*\|\to 0$ ($n\to\infty$)。

引理 2.8 [11] 假设引理 2.7 中的条件成立，x_λ 是方程 $Ax=\lambda x$ 的唯一解。则

(i) 若 $\forall\tau\in(0,1)$，有 $\phi(\tau)>\tau^{\frac{1}{2}}$，则 x_λ 关于 λ 严格单调递减，即 $\forall 0<\lambda_1<\lambda_2$，有 $x_{\lambda_1}>x_{\lambda_2}$；

(ii) 若 $\exists\beta\in(0,1)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^{\beta}$，则 x_λ 关于 λ 连续，即由 $\lambda\to\lambda_0\ (\lambda>0)$ 有 $\|x_\lambda-x_{\lambda_0}\|\to 0$；

(iii) 若 $\exists\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^{\beta}$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|x_\lambda\|=0,\ \lim_{\lambda\to0^+}\|x_\lambda\|=\infty.$$

引理 2.9 当 $\alpha\in(1,2]$，$\lambda>0$，$b\ge0$，$y,z\in L(0,1]$ 时，边值问题

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\alpha}u(t)+y(t)=0,\ t\in(0,1],\\ \lim\limits_{t\to0^+}t^{2-\alpha}u(t)=a,\ u(1)=\int_0^1k(s)z(s)\mathrm{d}s+\lambda b,\end{cases}\tag{2.1}$$

的解等价于如下积分方程的解

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)y(d)\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\int_0^1k(s)z(s)\mathrm{d}s+\lambda bt^{\alpha-1},\tag{2.2}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1},0\le s\le t\le1,\\(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}, \qquad 0\le t\le s\le1.\end{cases}$$

证明 由

$$D_{0^+}^{\alpha}u(t)+y(t)=0,$$

得

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2},\tag{2.3}$$

$$t^{2-\alpha}u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{2-\alpha}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s+c_1t+c_2.$$

当 $t\to0^+$ 时，得 $c_2=0$。将 $c_2=0$ 代入上式并令 $t=1$，得

$$c_1=\int_0^1k(s)z(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s+\lambda b.$$

将 c_1,c_2 代入(2.3)，得

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\int_0^1k(s)z(s)\mathrm{d}s+\lambda bt^{\alpha-1}.$$

另一方面，若 u 满足(2.2)，经计算 u 是边值问题的一个解。证毕。

引理 2.10 [8] $G(t,s)$ 满足以下性质

(1) $G(t,s)>0,\ t,s>0$；

(2) $G(t,s)<\frac{1}{\Gamma(\alpha)},\ t,s\ge0$；

(3) $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续；

(4) 当 $0\le s<t\le1$ 时，$G(t,s)$ 关于 t 单调递减。当 $0\le t<s\le1$ 时，$G(t,s)$ 关于 t 单调递增。

(5) $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)t(1-t)s(1-s)^{\alpha-1}\le t^{2-\alpha}G(t,s)\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}s(1-s)^{\alpha-1},\ t,s\in(0,1)$。

令

$$E=\left\{u\in C(0,1]:\lim_{t\to0^+}t^{2-\alpha}u(t)<+\infty\right\}.$$

定义 E 中范数 $\|u\|=\sup\limits_{t\in(0,1]}t^{2-\alpha}|u(t)|$，由[8]可知 E 是 Banach 空间。

令

$$P=\left\{u\in E:u(t)\ge0,t\in(0,1]\right\}.$$

则 P 为 E 中的正规锥。

3. 单调算子方法

这里使用如下假设：

(H1) 对于固定的 $t\in(0,1]$，$f(t,u)$ 关于 $u\in[0,+\infty)$ 单调递增，且 $\forall\tau\in(0,1)$，$\exists\phi_1(\tau)\in(\tau,1]$，使得 $f(t,\tau u)\ge\phi_1(\tau)f(t,u)$，$\forall u\in P$，$t\in(0,1]$；

(H2) $g(u)$ 关于 $u\in[0,+\infty)$ 单调递增，且 $\forall\tau\in(0,1)$，$\exists\phi_3(\tau)\in(\tau,1]$，使得 $g(\tau u)\ge\phi_3(\tau)g(u)$，$\forall u\in P$；

(H3) $\int_0^1k(s)g(0)\mathrm{d}s>0$；

令

$$h(t)=t^{\alpha-1},t\in(0,1].$$

定义算子

$$Au(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\int_0^1k(s)g(u(s))\mathrm{d}s+bt^{\alpha-1},u\in P,t\in(0,1].$$

显然，$A:P\to P$。

定理 3.1 设(H1)和(H2)成立，则 $\forall\lambda>0$，边值问题(1.1)存在唯一的正解 $u_\lambda\in P_h$，且 $\forall u_0\in P_h$，设 $u_n=Au_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，有 $u_n\to u_\lambda$（$n\to\infty$）。u_λ 满足：

(i) u_λ 关于 λ 严格单调递增；

(ii) 若 $\exists\beta\in(0,1)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则 u_λ 关于 λ 连续；

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty$。

证明 由(H1)和(H2)可知 A 是增算子。记 $\phi_A(\tau)=\min\{\phi_1(\tau),\phi_3(\tau)\}$，再由(H1)和(H2)可知 $\forall\tau\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}A(\tau u)(t)&=\int_0^1G(t,s)f(s,\tau u(s))\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\int_0^1k(s)g(\tau u(s))\mathrm{d}s+bt^{\alpha-1}\\&\ge\phi_A(\tau)\int_0^1G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\phi_A(\tau)\int_0^1k(s)g(v(s))\mathrm{d}s+bt^{\alpha-1}\\&\ge\phi_A(\tau)Au(t),\ \forall u\in P,t\in(0,1].\end{aligned}$$

根据算子 A 的定义，有

$$Ah\ge hb.$$

又因为

$$Ah(t)\le h(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,1)\mathrm{d}s+\int_0^1k(s)g(1)\mathrm{d}s+b\right),\ \forall t\in(0,1].$$

由此可知 $Ah\in P_h$。

由引理 2.5 可知 $\forall\lambda>0$，边值问题(1.1)存在唯一的正解 $u_\lambda\in P_h$，且 $\forall u_0\in P_h$，设 $u_n=Au_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，有 $u_n\to u_\lambda$ （$n\to\infty$）。由引理 2.6 可知 u_λ 满足：

(i) u_λ 关于 λ 严格单调递增；

(ii) 若 $\exists\beta\in(0,1)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则 u_λ 关于 λ 连续；

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty$。证毕。

定理 3.2 设(H1)，(H2)和(H3)成立，则 $\forall\lambda>0$，边值问题(1.2)存在唯一的正解 $u_\lambda\in P_h$，且 $\forall u_0\in P_h$，设 $u_n=Au_{n-1}$， $n=1,2,\cdots$，有 $u_\lambda^n\to u_\lambda$ （$n\to\infty$）。u_λ 满足：

(i) u_λ 关于 λ 严格单调递增；

(ii) 若 $\exists\beta\in(0,1)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则 u_λ 关于 λ 连续；

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty$。

证明 根据算子 A 的定义及(H2)，有

$$Ah(t)\ge h(t)\int_0^1 k(s)g(0)\mathrm{d}s,\ \forall t\in(0,1].$$

又因为

$$Ah(t)\le h(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,1)\mathrm{d}s+\int_0^1 k(s)g(1)\mathrm{d}s+b\right),\ \forall t\in(0,1].$$

由此可知 $Ah\in P_h$。其余证明过程类似于定理 3.1。证毕。

4. 混合单调算子方法

这里使用如下假设：

(H4) 对于固定的 $t\in(0,1]$，$f(t,u)$ 关于 $u\in[0,+\infty)$ 单调递减，且 $\forall\tau\in(0,1)$，$\exists\phi_2(\tau)\in(\tau,1]$，使得 $f(t,\tau^{-1}u)\ge\phi_2(\tau)f(t,u)$，$\forall u\in P$，$t\in(0,1]$；

(H5) $g(u)$ 关于 $u\in[0,+\infty)$ 单调递减，且 $\forall\tau\in(0,1)$，$\exists\phi_4(\tau)\in(\tau,1]$，使得 $g(\tau^{-1}u)\ge\phi_4(\tau)g(u)$，$\forall u\in P$；

(H6) $\int_0^1 k(s)g(1)\mathrm{d}s>0$。

定义算子

$$B(u,v)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\int_0^1 k(s)g(v(s))\mathrm{d}s+bt^{\alpha-1},u,v\in P,t\in(0,1].$$

显然 $B:P\times P\to P$。

定理 4.1 设(H1)和(H5)成立，则 $\forall\lambda>0$，边值问题(1.1)存在唯一的正解 $u_\lambda\in P_h$，且 $\forall u_0,v_0\in P_h$，设 $u_n=B(u_{n-1},v_{n-1})$，$v_n=B(v_{n-1},u_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，有 $\|u_n-u_\lambda\|\to0$ （$n\to\infty$），$\|v_n-u_\lambda\|\to0$。u_λ 满足：

(i) 若 $\forall\tau\in(0,1)$，有 $\phi(\tau)>\tau^{\frac{1}{2}}$，则 u_λ 关于 λ 严格单调递增；

(ii) 若 $\exists\beta\in(0,1)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则 u_λ 关于 λ 连续；

(iii) 若 $\exists\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0,\ \lim_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty.$$

证明 由(H1)和(H5)可知 B 是混合单调算子。

再由(H1)和(H5)可知$\forall\tau\in(0,1)$，记$\phi_B(\tau)=\min\{\phi_1(\tau),\phi_4(\tau)\}$，有

$$\begin{aligned}B(\tau u,\tau^{-1}v)(t)&=\int_0^1 G(t,s)f(s,\tau u(s))\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\int_0^1 k(s)g(\tau^{-1}v(s))\mathrm{d}s+bt^{\alpha-1}\\&\ge\phi_B(\tau)\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+t^{\alpha-1}\phi_B(\tau)\int_0^1 k(s)g(v(s))\mathrm{d}s+bt^{\alpha-1}\\&\ge\phi_B(\tau)B(u,v)(t),\ \forall u,v\in P,t\in(0,1].\end{aligned}$$

根据算子B的定义，有

$$B(h,h)\ge hb,$$

又因为

$$B(h,h)(t)\le h(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}f(s,1)\mathrm{d}s+\int_0^1 k(s)g(0)\mathrm{d}s+b\right),\forall t\in(0,1].$$

由此可知$B(h,h)\in P_h$。

由引理2.7可知，$\forall\lambda>0$，边值问题(1.1)存在唯一的正解$u_\lambda\in P_h$，且$\forall u_0,v_0\in P_h$，设$u_n=B(u_{n-1},v_{n-1})$，$v_n=B(v_{n-1},u_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，有$\|u_n-u_\lambda\|\to0$（$n\to\infty$），$\|v_n-u_\lambda\|\to0$。由引理2.8可知，u_λ满足：

(i) 若$\forall\tau\in(0,1)$，有$\phi(\tau)>\tau^{\frac{1}{2}}$，则$u_\lambda$关于$\lambda$严格单调递增；

(ii) 若$\exists\beta\in(0,1)$，当$\tau\in(0,1)$时，有$\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则u_λ关于λ连续；

(iii) 若$\exists\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，当$\tau\in(0,1)$时，有$\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0,\ \lim_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty.$$

证毕。

类似于定理4.1可证如下结论。

定理 4.2 设(H2)和(H4)成立，则$\forall\lambda>0$，边值问题(1.1)存在唯一的正解$u_\lambda\in P_h$，且$\forall u_0,v_0\in P_h$，设$u_n=B(u_{n-1},v_{n-1})$，$v_n=B(v_{n-1},u_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，有$\|u_n-u_\lambda\|\to0$（$n\to\infty$），$\|v_n-u_\lambda\|\to0$。u_λ满足：

(i) 若$\forall\tau\in(0,1)$，有$\phi(\tau)>\tau^{\frac{1}{2}}$，则$u_\lambda$关于$\lambda$严格单调递增；

(ii) 若$\exists\beta\in(0,1)$，当$\tau\in(0,1)$时，有$\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则u_λ关于λ连续；

(iii) 若$\exists\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，当$\tau\in(0,1)$时，有$\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0,\ \lim_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty.$$

定理 4.3 设(H1)，(H5)和(H6)成立，则$\forall\lambda>0$，边值问题(1.2)存在唯一的正解$u_\lambda\in P_h$，且$\forall u_0,v_0\in P_h$，设$u_n=B(u_{n-1},v_{n-1})$，$v_n=B(v_{n-1},u_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，有$\|u_n-u_\lambda\|\to0$（$n\to\infty$），$\|v_n-u_\lambda\|\to0$。u_λ满足：

(i) 若$\forall\tau\in(0,1)$，有$\phi(\tau)>\tau^{\frac{1}{2}}$，则$u_\lambda$关于$\lambda$严格单调递增；

(ii) 若$\exists\beta\in(0,1)$，当$\tau\in(0,1)$时，有$\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则u_λ关于λ连续；

(iii) 若$\exists\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，当$\tau\in(0,1)$时，有$\phi(\tau)\ge\tau^\beta$，则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0,\ \lim_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty.$$

证明 根据算子 B 的定义及(H5)，有

$$B(h,h)(t) \geq h(t)\int_0^1 k(s)g(1)\mathrm{d}s, \forall t \in (0,1].$$

又因为

$$B(h,h)(t) \leq h(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,1)\mathrm{d}s + \int_0^1 k(s)g(0)\mathrm{d}s + b\right), \forall t \in (0,1].$$

由此可知 $B(h,h) \in P_h$。其余证明过程类似于定理 4.1。证毕。

类似于定理 4.1 和定理 4.3 的证明可得如下结论。

定理 4.4 设(H2)，(H3)和(H4)成立，则 $\forall \lambda > 0$，边值问题(1.2)存在唯一的正解 $u_\lambda \in P_h$，且 $\forall u_0, v_0 \in P_h$，设 $u_n = B(u_{n-1}, v_{n-1})$， $v_n = B(v_{n-1}, u_{n-1})$， $n = 1,2,\cdots$， 有 $\|u_n - u_\lambda\| \to 0$ （$n \to \infty$）， $\|v_n - u_\lambda\| \to 0$。 u_λ 满足：

(i) 若 $\forall \tau \in (0,1)$，有 $\phi(\tau) > \tau^{\frac{1}{2}}$，则 u_λ 关于 λ 严格单调递增；

(ii) 若 $\exists \beta \in (0,1)$，当 $\tau \in (0,1)$ 时，有 $\phi(\tau) \geq \tau^\beta$，则 u_λ 关于 λ 连续；

(iii) 若 $\exists \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，当 $\tau \in (0,1)$ 时，有 $\phi(\tau) \geq \tau^\beta$，则

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\| = 0, \ \lim_{\lambda \to \infty} \|u_\lambda\| = \infty.$$

5. 例子

例 1 考虑如下边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^\alpha u(t) + \lambda f(t, u(t)) = 0, \ t \in (0,1], \\ \lim\limits_{t \to 0^+} t^{2-\alpha} u(t) = 0, \ u(1) = \lambda\left(\int_0^1 k(s) g(u(s))\mathrm{d}s + b\right), \end{cases} \tag{5.1}$$

其中

$$f(t,u) = \frac{u^{\frac{1}{5}}}{1+t}, \ g(u) = u^{\frac{1}{5}}, \ \lambda > 0, \ b = 2.$$

$\forall u \in P$， $\tau \in (0,1)$， $t \in (0,1]$，取 $\phi_1(\tau) = \tau^{\frac{1}{4}} \in (\tau, 1]$，则

$$f(t,\tau u) = \frac{\tau^{\frac{1}{5}} u^{\frac{1}{5}}}{1+t} \geq \frac{\tau^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{5}}}{1+t} = \phi_1(\tau) f(t,u), \ g(\tau u) = \tau^{\frac{1}{5}} u^{\frac{1}{5}} \geq \tau^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{5}} = \phi_1(\tau) g(u).$$

满足(H1)和(H2)。令 $\beta_1 = \frac{1}{3} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，当 $\tau \in (0,1)$ 时，有 $\phi_1(\tau) \geq \tau^{\beta_1}$。由定理 3.1 可知 $\forall \lambda > 0$，方程(5.1)存在唯一的正解 $u_\lambda \in P_h$， 且 $\forall u_0 \in P_h$， 设 $u_n = Au_{n-1}$， $n = 1,2,\cdots$， 有 $u_n \to u_\lambda$ （$n \to \infty$）。 u_λ 满足：

(i) u_λ 关于 λ 严格单调递增；

(ii) u_λ 关于 λ 连续；

(iii) $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\| = 0$， $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \|u_\lambda\| = \infty$。

例 2 考虑如下边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^\alpha u(t) + \lambda f(t, u(t)) = 0, \ t \in (0,1], \\ \lim\limits_{t \to 0^+} t^{2-\alpha} u(t) = 0, \ u(1) = \lambda\left(\int_0^1 k(s) g(u(s))\mathrm{d}s + b\right), \end{cases} \tag{5.2}$$

其中

$$f(t,u)=t^2u^{\frac{1}{9}},\ g(u)=u^{-\frac{1}{9}},\ \lambda>0,\ b=5.$$

$\forall u\in P$，$\tau\in(0,1)$，$t\in(0,1]$，取 $\phi_2(\tau)=\tau^{\frac{1}{7}}\in(\tau,1]$，则

$$f(t,\tau u)=t^2\tau^{\frac{1}{9}}u^{\frac{1}{9}}\geq t^2\tau^{\frac{1}{7}}u^{\frac{1}{9}}=\phi_2(\tau)f(t,u),\ g(\tau^{-1}u)=\tau^{\frac{1}{9}}u^{-\frac{1}{9}}\geq\tau^{\frac{1}{7}}u^{-\frac{1}{9}}=\phi_2(\tau)g(u).$$

满足(H1)和(H5)。令 $\beta_2=\frac{1}{4}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，当 $\tau\in(0,1)$ 时，有 $\phi_2(\tau)\geq\tau^{\beta_2}$。由定理4.1可知 $\forall\lambda>0$，方程(5.2)存在唯一的正解 $u_\lambda\in P_h$，且 $\forall u_0,v_0\in P_h$，设 $u_n=B(u_{n-1},v_{n-1})$，$v_n=B(v_{n-1},u_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，有 $\|u_n-u_\lambda\|\to0$，$\|v_n-u_\lambda\|\to0$ ($n\to\infty$)。u_λ 满足：

(i) u_λ 关于 λ 严格单调递增；

(ii) u_λ 关于 λ 连续；

(iii) $\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda\|=0$，$\lim_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda\|=\infty$。

基金项目

国家自然科学基金(11361047)。

参考文献

[1] Bai, Z.B. (2012) Eigenvalue Intervals for a Class of Fractional Boundary Value Problem. *Computers & Mathematics with Applications*, **64**, 3253-3257. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.01.004

[2] Jiang, W.H. (2013) Eigenvalue Interval for Multi-Point Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 4570-4575. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.10.068

[3] Sun, S.R., Zhao, Y.G., Han, Z.L. and Liu, J. (2013) Eigenvalue Problem for a Class of Nonlinear Fractional Differential Equations. *Annals of Functional Analysis*, **4**, 25-39. https://doi.org/10.15352/afa/1399899834

[4] Zhai, C.B. and Xu, L. (2014) Properties of Positive Solutions to a Class of Four-Point Boundary Value Problem of Caputo Fractional Differential Equations with a Parameter. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**, 2820-2827. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.003

[5] Zhang, X.G., Liu, L.S., *et al.* (2014) The Eigenvalue for a Class of Singular *p*-Laplacian Fractional Differential Equations Involving the Riemann-Stieltjes Integral Boundary Condition. *Applied Mathematics and Computation*, **235**, 412-422. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.062

[6] Wang, G.T., Liu, S.Y. and Zhang, L.H. (2014) Eigenvalue Problem for Nonlinear Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 916260. https://doi.org/10.1155/2014/916260

[7] Wang, W.X. and Guo, X.T. (2016) Eigenvalue Problem for Fractional Differential Equations with Nonlinear Integral and Disturbance Parameter in Boundary Conditions. *Boundary Value Problems*, **2016**, Article No. 42. https://doi.org/10.1186/s13661-016-0548-0

[8] Su, X.F., Jia, M. and Li, M.M. (2016) The Existence and Nonexistence of Positive Solutions for Fractional Differential Equations with Nonhomogeneous Boundary Conditions. *Advances in Difference Equations*, **2016**, Article No. 30. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0750-5

[9] 郭大均. 非线性泛函分析(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[10] Zhai, C.B. and Wang, F. (2015) Properties of Positive Solutions for the Operator Equation $Ax=\lambda x$ and Applications to Fractional Differential Equations with Integal Boundary Conditions. *Advances in Difference Equations*, **2015**, Article No. 366. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0704-3

[11] Zhai, C.B. and Zhang, L.L. (2011) New Fixed Point Theorems for Mixed Monotone Operators and Local Existence-Uniqueness of Positive Solutions for Nonlinear Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **382**, 594-614. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.066