Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 37-40
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111006

Hans汉斯

仅存在一个无限子群的无限Abel群

邓　奇，李　诺

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 332110204@qq.com, 996511375@qq.com

收稿日期：2020年12月11日；录用日期：2021年1月8日；发布日期：2021年1月15日

摘　要

本文我们研究一类无限Abel群，它仅有一个无限子群，即这个群本身。本文首先讨论了这种Abel群的结构和性质，然后给出和这种群有关的两个定理，及相应的证明。

关键词

同构，循环P-群，无限群，有限子群

Infinite Abel Groups Having Only One Infinite Subgroup

Qi Deng, Nuo Li

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 332110204@qq.com, 996511375@qq.com

Received: Dec. 11th, 2020; accepted: Jan. 8th, 2021; published: Jan. 15th, 2021

Abstract

In this paper, we study a class of infinite Abel group, which has only one infinite subgroup, that is, the group itself. Here we first discuss the structure and properties of this Abel group, and then give two theorems related to this group, and the corresponding proofs of the theorems.

Keywords

Isomorphism, Cyclic P-Group, Infinite Group, Finite Subgroup

文章引用: 邓奇, 李诺. 仅存在一个无限子群的无限 Abel 群[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 37-40.
DOI: 10.12677/pm.2021.111006

1. 引言

在群的研究中，有限群的结构通常比较复杂，除非是一些特殊的群如循环群等。相对而言有限 Abel 群的结构较为简单，易于分析和研究，是最早研究也是研究的最彻底的一类群。但无限 Abel 群的结构就显得很复杂了，无限 Abel 群的分类至今也没有完成，对无限 Abel 群的研究不仅是群论中的一个重要且有意义的问题，并且对解决一些拓扑曲面上的问题也非常有帮助[1]。

本文主要研究一类特殊的无限 Abel 群，这类 Abel 群的真子群的阶都是有限的。首先，这类群是存在的，例子可以详见下文。这自然的会引出两个问题，对于有这种性质的群，一共会有多少种同构类？它们有着什么共同的性质？关于这两个问题本文得到的主要结果是：

定理 1. 如果一个无限 Abel 群仅存在一个无限子群，即这个群本身，那么这个群必然与 $Z\left(p^{\infty}\right)$ 同构($Z\left(p^{\infty}\right)$ 的定义见下文)。

定理 2. 设 Q 为有理数集，Z 为整数集，则商群 $Q/Z \cong \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} Z_{p^{\infty}}$ ($\mathbb{P}$ 表示全体素数的集合)。

2. 预备知识

本文使用的符号和术语都是标准的。

定义 1.1. 令 p 为一个素数，Q 为有理数集，Z 为整数集，定义商群 Q/Z 中的群运算为普通加法，Q/Z 的无限子群 $Z\left(p^{\infty}\right)$ 为：$Z\left(p^{\infty}\right)=\left\{\overline{a/p^{k}}\in Q/Z \mid a,k\in Z,k\geq 0\right\}$。

且 $Z\left(p^{\infty}\right)$ 有以下性质成立[2]：

1) $\forall a\in Z\left(p^{\infty}\right),|a|=p^{i},i\in Z$。

2) 任取 $Z\left(p^{\infty}\right)$ 的真子群 H，存在某个整数 k 使得 $H=\left\langle\overline{1/p^{k}}\right\rangle$，自然的，所有 $Z\left(p^{\infty}\right)$ 的真子群都是有限群。

3) 任取 $Z\left(p^{\infty}\right)$ 的真子群 H，有 $Z\left(p^{\infty}\right)/H\cong Z\left(p^{\infty}\right)$ 成立。

定义 1.2. Abel 群族 $\{G_i \mid i\in\lambda\}$ 的直积记为：$\bigoplus_{i\in\lambda}G_i$，其中 $\bigoplus_{i\in\lambda}G_i$ 的元素定义为$\{x:\lambda\to\bigcup_{i\in\lambda}G_i \mid x(i)\in G_i$，并且对除了有限个元之外的所有 $x(i)$ 都为单位元$\}$。对 $x,y\in\bigoplus_{i\in\lambda}G_i$ 定义群加法运算：$(x+y)(i)=x(i)+y(i)$。

本文的讨论中需要用到以下两个已知的结果。

命题 1.1. 有限 Abel 群分解定理[3]：有限 Abel 群可以分解阶为素数的方幂的循环子群的内直积，且这样的分解方法是唯一的。

命题 1.2. Zorn 引理[4]：在一个非空偏序集中，如果任意链都有上界，那么这个偏序集必然存在极大元。

3. 证明

本文利用关于群的基础知识，可以得到以下两个定理。

定理 1.如果一个无限 Abel 群仅存在一个无限子群(即这个群本身)，那么这个群必然与 $Z\left(p^{\infty}\right)$ 同构。

证明：令 G 为满足定理 1 假设的一个无限 Abel 群，任取 G 中的真子群 G_1，考虑到 G_1 是有限群，所以必然存在 G 的中的元素 a 满足 $a \in G - G_1$，记 $G_2 = \langle G_1, a \rangle$，接下来用完全同样的办法添加 G 中元素得到 $G_3, G_4, \cdots$，如此便构成了一个有限群包含链，即：$G_1 < G_2 < \cdots < G_n < \cdots$，可见这一个升链不会终止于有限项，即 G 并不满足 A.C.C 条件。利用 Zorn 引理的逆否命题，我们知道，定义集合包含关系为偏序，真子群的集合中不存在极大元，也就是说构造出的这条有限群包含链是无限长的。

1) 先证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$：$\forall x \in G_l \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$，$\forall y \in G_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$，不妨认为 $m > l$，则 $x \in G_m$，所以 $x - y \in G_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ 是 G 的子群，而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ 不是有限群，所以由定义 $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$。

2) 对所有的 n，G_n 都是循环 P-群：对包含链 $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$，把这些群都分解为循环 P-群的内直积，如果某一项 G_k，可以被分解为两个或以上循环 P-群的内直积，不妨记为：$G_k = G_a \cdot G_b$，对任意包含 G_k 的群 G_m，必然有 $G_a \subset G_m$，$G_b \subset G_m$，$G_a \cap G_b = e$，利用有限 Abel 群分解定理，G_m 的分解式中也必然直接或间接的包含 G_a 和 G_b 这两个循环 P-群，记为：$G_m = G_A \cdot G_B \cdot G_{m1} \cdots G_{ml}$，其中 $G_a \subset G_A$，$G_b \subset G_B$，通过这种分析也可以得到推论，分解式的长度是单调递增的。模仿分析学中对无限的定义，考虑分解式的长度(或者说符号 $\cdot$ 的个数)是否会随着 m 的增加而趋于无穷，分为两种情况讨论：

情况 1，若分解式无限变长，考虑集合 $H = \bigcup_{i=m}^{\infty} G_{i1} \cdots G_{ix}$ (x 的大小和 i 有关)，这个集合把所有分解式中不包含 G_a 和 G_b 的循环 P-群乘起来，这意味着 H 是一个群，分解式无限变长就可以推测 x 随着 i 增加趋于无穷，所以 H 是无限群，而由 $G_a \cap G_{ij} = e$ (i 和 j 任取)知道 $G_a \not\subset H$。又因为 $G_a \subset G$，所以 H 是 G 的一个无穷真子群，这与假设矛盾。

情况 2，若分解式长度有限，结合前面的推论：分解式的长度单调递增。所以从某一项开始分解式的长度就达到最大值固定了，不妨认为从 G_m 开始固定，且在分解式中循环 P-群个数为 n，在分解式 $G_k = G_{k1} \cdots G_{kn}$ 中，利用前面的分析知道有 $G_{(k+1)i} \supseteq G_{ki}$ 成立，所以 $|G_{ki}|$ 随着 m 的增加单调递增，又考虑到 $\lim_{k\to\infty} |G_k| = \lim_{k\to\infty} |G_{k1}| \cdots |G_{kn}| = \infty$，这式子意味着必然有某项 $|G_{ki}|$ 随着 m 的增加趋于无穷，不妨认为 $\lim_{k\to\infty} |G_{k1}| = \infty$，考虑集合 $H = \bigcup_{k=m}^{\infty} G_{k1}$，由包含关系 $G_{k1} \subset G_{(k+1)1} \subset G_{(k+2)1} \subset \cdots$ 可以推出 H 是一个无限群，而又有 $(|G_{m2}|, |G_{k1}|) = 1$，所以 $G_{m2} \not\subset G_{k1}$，进一步可以推出 $G_{m2} \not\subset H$，又因为 G_{m2} 是 G 的子群，所以 $H \neq G$，推出矛盾。

3) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \cong Z(p^{\infty})$：因为 $G_n \subset G_{n+1} \cdots$ 是一列循环 P-群，在同构意义下可以用模 n 加法群来代替表示它们，记做 $Z_{|G_n|} \subset Z_{|G_{n+1}|} \subset \cdots$，为了使这个包含关系成立，我们认为 $\bar{k} \in Z_{|G_n|}$ 和 $\overline{\frac{|G_{n+1}|}{|G_n|} \cdot k} \in Z_{|G_{n+1}|}$ 是同一个元素。

定义映射 $f_n : Z_{|G_n|} \to Z(p^{\infty})$ 为 $f_n(\bar{x}) = \overline{\frac{x}{|G_n|}}$，如果 $\overline{x_1} = \overline{x_2}$，那么 $f_n(\overline{x_1}) - f_n(\overline{x_2}) = \overline{\frac{x_1}{G_n}} - \overline{\frac{x_2}{G_n}} = 0$，所以 $f_n(\overline{x_1}) = f_n(\overline{x_2})$，所以 f_n 是单映射。任取 $x, y \in Z_{|G_n|}$，有 $f(x) + f(y) = \overline{\frac{x}{|G_n|}} + \overline{\frac{y}{|G_n|}} = f(x+y)$，所以 f_n 是单同态映射。若 $x \in Z_{|G_n|} \subset Z_{|G_{n+1}|}$，则 $f_{n+1}(x) = \overline{\frac{|G_{n+1}|/|G_n| \cdot x}{|G_{n+1}|}} = \overline{\frac{x}{|G_n|}} = f_n(x)$，所以 f_{n+1} 可以看成是 f_n 的延拓。

因此可以定义 $f=\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$，$\forall x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_{|G_n|}$，若 $x\in Z_{|G_k|}$，定义 $f(x)=f_k(x)$。直接由定义知道 f 的定义域是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_{|G_n|}$。$\forall x\in Z_{|G_a|}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_{|G_n|}$，$\forall y\in Z_{|G_b|}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_{|G_n|}$，不妨认为 $a\ge b$，则 $y\in Z_{|G_a|}$，所以有：$f(x+y)=f_a(x+y)=f_a(x)+f_a(y)=f(x)+f(y)$，即 f 是个同态映射。又考虑到 f_n 是单同态映射，即 $\ker f_n(\overline{0})=\overline{0}$，所以 $\ker f(\overline{0})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\ker f_n(\overline{0})=\overline{0}$，所以 f 还是单射。综合即有 f 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_{|G_n|}$ 到 $Z(p^{\infty})$ 的同构映射，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_{|G_n|}\cong Z(p^{\infty})$，而由前面提到的，$Z_{|G_n|}$ 同构于 G_n，所以 $G\cong Z(p^{\infty})$。

定理 2. 设 Q 为有理数集，Z 为整数集，则商群 $Q/Z\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} Z_{p^{\infty}}$ ($\mathbb{P}$ 代表全体素数)。

证明：在证明开始前，有必要说明一下为什么对直和 $\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} Z_{p^{\infty}}$ 的定义中要求只有有限项不为 0，因为如果允许无穷项出现的话，上述直和中元素的个数就会有不可数多个，而商群 Q/Z 的个数是可数的，这样是不可能同构的。

建立 $\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} Z_{p^{\infty}}$ 到 Q/Z 的映射：$f:(a_1,\cdots,a_n)\to a_1+\cdots+a_n$。

可见有 $f(a_1,\cdots,a_n)=f\left(\cdots\left(f\left(f(a_1,a_2),a_3\right)\cdots\right),a_n\right)$ 成立，这意味着映射 f 可以分解为只有两个自变量的形式，即：$f\left(\frac{\overline{x}}{a},\frac{\overline{y}}{b}\right)=\overline{\frac{x\cdot b+y\cdot a}{a\cdot b}}$，其中 $(a,b)=1$，只需要要证明这种形式的映射是同构就足够了。

1) f 是一个映射。

当 $\frac{\overline{x_1}}{a}=\frac{\overline{x_2}}{a}$ 时，$a\,|\,x_1-x_2$，有 $f\left(\frac{x_1}{a},\frac{y}{b}\right)-f\left(\frac{x_2}{a},\frac{y}{b}\right)=\overline{\frac{x_1\cdot b+y\cdot a}{a\cdot b}}-\overline{\frac{x_2\cdot b+y\cdot a}{a\cdot b}}=\overline{\frac{(x_1-x_2)\cdot b}{a\cdot b}}=\overline{0}$。所以有 $f\left(\frac{x_1}{a},\frac{y}{b}\right)=f\left(\frac{x_2}{a},\frac{y}{b}\right)$，当 $\frac{\overline{y_1}}{b}=\frac{\overline{y_2}}{b}$ 时，利用同样的办法可以得到 $f\left(\frac{x}{a},\frac{y_1}{b}\right)=f\left(\frac{x}{a},\frac{y_2}{b}\right)$。

2) f 是满射。因为 $\left(\frac{\overline{n}}{a},\frac{\overline{n}}{b}\right)\xrightarrow{f} n\overline{\frac{a+b}{a\cdot b}}$，利用简单的数论知识知道 a 和 b 互素可以推出 $a+b$ 和 $a\times b$ 互素，这意味着元素 $n\cdot\overline{\frac{a+b}{a\cdot b}}$ 会随着 n 的变化而取遍 $\overline{\frac{0}{a\cdot b}}$ 到 $\overline{\frac{a\cdot b-1}{a\cdot b}}$ 的所有元。

3) f 是单射。$c=\overline{0}$ 的充分且必要条件是 $a\cdot b\,|\,x\cdot b+y\cdot a$，因此 $x=0(\bmod a)$，$y=0(\bmod b)$，故 $\ker f=(\overline{0},\overline{0})$。

综上 f 是 $\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} Z_{p^{\infty}}$ 到 Q/Z 的一个同构映射，证明完毕。

参考文献

[1] James R. Munkres. 代数拓扑基础[M]. 北京：科学出版社, 2006: 311.

[2] Sahai, V. and Bist, V. (1999) Algebra. Alpha Science Intl Ltd., New Delhi, 34-35.

[3] 张远达. 有限群构造(上册) [M]. 北京：科学出版社, 2015: 143.

[4] 张锦文. 公理集合论导引[M]. 北京：科学出版社, 1991: 175.