Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 192-200
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112027

Hans汉斯

一类二维MHD-Boussinesq方程组整体解的存在性

秦文迪

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 1334625080@qq.com

收稿日期：2021年1月1日；录用日期：2021年2月1日；发布日期：2021年2月9日

摘 要

本文证明了一类二维不可压缩MHD-Boussinesq方程组的初值问题在 $H^s\left(R^2\right), s>2$ 空间中存在唯一的整体强解。

关键词

MHD-Boussinesq方程组，局部解，整体解

Existence of Global Solution to a Class of Two-Dimensional MHD-Boussinesq Equations

Wendi Qin

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1334625080@qq.com

Received: Jan. 1st, 2021; accepted: Feb. 1st, 2021; published: Feb. 9th, 2021

Abstract

In this paper, we prove that there exists a unique global strong solution to the initial-value problem of a class of two-dimensional incompressible MHD-Boussinesq equations in $H^s\left(R^2\right), s>2$.

文章引用: 秦文迪. 一类二维 MHD-Boussinesq 方程组整体解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 192-200.
DOI: 10.12677/pm.2021.112027

Keywords

MHD-Boussinesq Equations, Local Solution, Global Solution

1. 引言

磁流体力学(Magnetohydrodynamics，简称 MHD)是研究等离子体和磁场相互作用的物理学分支。MHD-Boussinesq 系统模拟由热场或密度场的浮力效应和磁场产生的洛伦兹力驱动的不可压缩流体的对流，这种对流发生在存在磁场的导电流体的水平层，它与 Rayleigh-Benard 对流的自然类型密切相关。本文研究如下形式的 MHD-Boussinesq 方程组的初值问题：

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla\pi=b\cdot\nabla b+\theta e_2,\\ \partial_t b-\Delta b+u\cdot\nabla b=b\cdot\nabla u,\\ \partial_t\theta-\Delta\theta+u\cdot\nabla\theta=0,\\ \nabla\cdot u=0=\nabla\cdot b,\\ (u,b,\theta)|_{t=0}=(u_0,b_0,\theta_0),\end{cases} \tag{1}$$

其中，$t\geq 0,x\in R^2,u=u(x,t),b=b(x,t),\theta=\theta(x,t)$ 分别表示速度，磁场和温度，$\pi=\pi(x,t)$ 表示压力，e_2 是单位矢量 $(0,1)$。

2009 年，Hmidi T.和 Keraani S. [1]证明了当 $u_0\in B_{p,1}^{1+\frac{2}{p}},\theta^0\in L^r,2<r\leq p<\infty$ 时，Boussinesq 方程组的初值问题存在整体解 $u\in C\left(R_+;B_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}\right),\theta\in L^\infty\left(R_+;L^r\right)\cap\tilde{L}_{loc}^1\left(R_+;B_{r,\infty}^2\right)$。2017 年，Larios A.和 Pei Y. [2]证明了当 $m>3,u_0,b_0\in H_x^m\cap V,\theta_0\in H_x^m$ 时，初值问题(1)在 $H_x^m(\Omega)$ 空间中存在局部解。2018 年，Zhai X.和 Chen Z. [3]证明了当 $u_0\in B_{2,1}^0(R^d),b_0\in B_{2,1}^s(R^d)\cap L^\infty(R^d),\theta_0\in B_{2,1}^{s+1}(R^d)$ 且运动粘度依赖温度时，初值问题(1)在 $B_{2,1}^s(R^d)$ 空间中存在整体解。2019 年，Li Z., Liu P.和 Niu P. [4]证明了当 $(u_0,b_0)\in H^s(R^2)$ 时，三维 MHD 方程组在 $H^s(R^2)$ 空间中存在整体解。

本文研究初值问题(1)在 $H^s(R^2)$ 空间中整体解的存在性，主要结果如下：

定理 1.1 设 $(u_0,b_0,\theta_0)\in H^s(R^2),s>2$ 且 $\nabla\cdot u_0=\nabla\cdot b_0=0$，则初值问题(1)存在唯一的强解 (u,b,θ)，满足

$$(u,b,\theta)\in C\left([0,\infty);H^s(R^2)\right)\cap L^2\left([0,\infty);H^{s+1}(R^2)\right).$$

本文中用到的符号：

- $C=C(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 表示 C 是仅依赖于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的常数。
- 如 $C=C(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ 表示 C 是仅依赖于 $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ 的常数。
- $\wedge^s=(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 表示具有傅里叶符号 $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$ 的伪微分算子，其中 Δ 为 Laplace 算子。

- P 表示 Leray 投影算子，被定义为[4] $P(u)=u-\nabla\Delta^{-1}(\nabla\cdot u), u\in H^s\left(R^2\right)$。
- $(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 空间中的内积。
- 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$X\subset Y$。$X\circlearrowleft\circlearrowleft Y$ 表示 X 紧嵌入到 Y。

2. 初值问题(1)局部解的存在唯一性

为了研究初值问题(1)局部解的存在性，我们需要引用以下引理。

引理 2.1 [5] **(Aubin-Lions 紧性引理)**假定 $X\subset E\subset Y$ 是 Banach 空间且 $X\circlearrowleft\circlearrowleft E$，则

1) 当 $1\le q\le\infty$ 时，$\left\{\varphi:\varphi\in L^q([0,T];X),\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^1([0,T];Y)\right\}\circlearrowleft\circlearrowleft L^q([0,T];E)$。

2) 当 $1\le r\le\infty$ 时，$\left\{\varphi:\varphi\in L^\infty([0,T];X),\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^r([0,T];Y)\right\}\circlearrowleft\circlearrowleft C([0,T];E)$。

引理 2.2 [6]设 $0<\alpha<1,1<p<\infty$ 且 $f,g\in L^p\left(R^2\right)$，则

$$\left\|D^\alpha(fg)-fD^\alpha g-gD^\alpha f\right\|_p\le C(s)\|g\|_\infty\left\|D^\alpha f\right\|_p.$$

为了证明初值问题(1)存在局部解，先引入初值问题(1)的磨光近似方程组的初值问题，任给 $\varepsilon>0$，考虑

$$\begin{cases}\partial_t u^\varepsilon=PJ_\varepsilon\left(\Delta u^\varepsilon\right)+PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right]-PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right]+P\left(J_\varepsilon\theta^\varepsilon e_2\right),\\ \partial_t b^\varepsilon=PJ_\varepsilon\left(\Delta b^\varepsilon\right)+PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right]-PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\\ \partial_t\theta^\varepsilon=PJ_\varepsilon\left(\Delta\theta^\varepsilon\right)-PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon\theta^\varepsilon\right)\right],\\ u^\varepsilon(0,x)=u_0^\varepsilon(x),b^\varepsilon(0,x)=b_0^\varepsilon(x),\theta^\varepsilon(0,x)=\theta_0^\varepsilon(x),\end{cases}\tag{2}$$

其中，J_ε 表示磨光算子。

将初值问题(2)视为 $H^s\left(R^2\right)$ 空间中的抽象常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}t}=PJ_\varepsilon\left(\Delta u^\varepsilon\right)+PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right]-PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right]+P\left(J_\varepsilon\theta^\varepsilon e_2\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}b^\varepsilon}{\mathrm{d}t}=PJ_\varepsilon\left(\Delta b^\varepsilon\right)+PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right]-PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta^\varepsilon}{\mathrm{d}t}=PJ_\varepsilon\left(\Delta\theta^\varepsilon\right)-PJ_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon\theta^\varepsilon\right)\right],\\ u^\varepsilon(0,x)=u_0^\varepsilon(x),b^\varepsilon(0,x)=b_0^\varepsilon(x),\theta^\varepsilon(0,x)=\theta_0^\varepsilon(x),\end{cases}\tag{3}$$

由经典的 Picard 定理知，存在 $T^\varepsilon>0$，使得初值问题(3)有唯一的光滑解

$$\left(u^\varepsilon,b^\varepsilon,\theta^\varepsilon\right)\in C\left(\left[0,T^\varepsilon\right);H^s\left(R^2\right)\right).$$

引理 2.3 假设 $\left(u_0,b_0,\theta_0\right)\in H^s\left(R^2\right),s>2$ 且 $\nabla\cdot u_0=\nabla\cdot b_0=0$，则存在常数 $T>0$，使得初值问题(1)存在唯一的局部强解 (u,b,θ)，满足

$$(u,b,\theta)\in C\left([0,T);H^s\left(R^2\right)\right)\cap L^2\left([0,T);H^{s+1}\left(R^2\right)\right).$$

证明：在(2)的三个方程两边作用 $\wedge^s$，并分别与 $\wedge^s u,\wedge^s b,\wedge^s\theta$ 作内积，再将左右两边分别相加，得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\wedge^s u^\varepsilon\right\|_{L^2}^2+\left\|\wedge^s b^\varepsilon\right\|_{L^2}^2+\left\|\wedge^s \theta^\varepsilon\right\|_{L^2}^2\right)\\
&=\left(\wedge^s J_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\wedge^s u^\varepsilon\right)-\left(\wedge^s J_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right],\wedge^s u^\varepsilon\right)\\
&\quad+\left(\wedge^s J_\varepsilon\left(\Delta u^\varepsilon\right),\wedge^s u^\varepsilon\right)+\left(\wedge^s J_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right],\wedge^s b^\varepsilon\right)\\
&\quad-\left(\wedge^s J_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\wedge^s b^\varepsilon\right)+\left(\wedge^s J_\varepsilon\left(\Delta b^\varepsilon\right),\wedge^s b^\varepsilon\right)\\
&\quad-\left(\wedge^s J_\varepsilon\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\nabla\left(J_\varepsilon \theta^\varepsilon\right)\right],\wedge^s \theta^\varepsilon\right)+\left(\wedge^s J_\varepsilon\left(\Delta \theta^\varepsilon\right),\wedge^s \theta^\varepsilon\right)+\left(\left(\wedge^s J_\varepsilon \theta^\varepsilon e_2\right),\wedge^s u^\varepsilon\right)\\
&\triangleq\sum_{n=1}^{9} I_n.
\end{aligned}\tag{4}$$

由 Green 公式，得

$$\begin{aligned}
I_1=&-\left(\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right),\wedge^s\nabla J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\\
&+\left(\left[\wedge^s\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right]-\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\wedge^s J_\varepsilon u^\varepsilon\right)
\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}
I_4=&\left(\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon u^\varepsilon\right),\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\\
&+\left(\left[\wedge^s\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\left(\nabla J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right]-\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right],\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right)
\end{aligned}\tag{6}$$

由 Hölder 不等式和引理 2.2，得

$$\begin{aligned}
\left|I_1+I_4\right|\le&\left|\left(\left[\wedge^s\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right]-\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\wedge^s J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right|\\
&+\left|\left(\left[\wedge^s\left[\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\left(\nabla J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right]-\left(J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\right],\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right|\\
\le&\, C(s)\left\|\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{L^2}\left\|J_\varepsilon\nabla b^\varepsilon\right\|_{L^\infty}\left\|\wedge^s J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{L^2}+\left\|\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{L^2}\left\|J_\varepsilon\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^\infty}\left\|\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{L^2}\\
\le&\, C(s)\left(\left\|J_\varepsilon\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^\infty}+\left\|\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{L^\infty}\right)\left(\left\|J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{H^s}^2+\left\|J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{H^s}^2\right),
\end{aligned}\tag{7}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}
\left|I_5\right|=&\left|\left(\left[\wedge^s\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right]-\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)+\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right|\\
\le&\left|\left(\left[\wedge^s\left[\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right]-\left(J_\varepsilon u^\varepsilon\right)\cdot\wedge^s\left(\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right],\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right)\right|\\
\le&\, C(s)\left\|\wedge^s J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{L^2}\left\|J_\varepsilon\nabla b^\varepsilon\right\|_{L^\infty}\left\|\wedge^s J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{L^2}\\
\le&\, C(s)\left\|\nabla J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{L^\infty}\left(\left\|J_\varepsilon b^\varepsilon\right\|_{H^s}^2+\left\|J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{H^s}^2\right),
\end{aligned}\tag{8}$$

$$\left|I_7\right|\le C(s)\left\|\nabla J_\varepsilon\theta^\varepsilon\right\|_{L^\infty}\left(\left\|J_\varepsilon\theta^\varepsilon\right\|_{H^s}^2+\left\|J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{H^s}^2\right),\tag{9}$$

$$\left|I_2\right|\le C(s)\left\|\nabla J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{L^\infty}\left\|J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{H^s}^2.\tag{10}$$

由 Green 公式，得

$$I_3=\left(\wedge^s J_\varepsilon\left(\Delta u^\varepsilon\right),\wedge^s u^\varepsilon\right)=-\int_{R^2}\left|\wedge^s J_\varepsilon\left(\nabla u^\varepsilon\right)\right|^2\mathrm{d}x=-\left\|J_\varepsilon\nabla u^\varepsilon\right\|_{H^s}^2.\tag{11}$$

类似地，有

$$I_6 = -\left\|J_\varepsilon \nabla b^\varepsilon\right\|_{H^s}^2 \text{ 和 } I_8 = -\left\|J_\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon\right\|_{H^s}^2. \tag{12}$$

由 Sobolev 不等式，得

$$|I_9| \le \left\|\wedge^s \theta^\varepsilon\right\|_{L^2} \left\|\wedge^s J_\varepsilon u^\varepsilon\right\|_{L^2} \le C(s)\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{H^s}\left\|u^\varepsilon\right\|_{H^s}. \tag{13}$$

结合(4)~(13)，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\left(u^\varepsilon, b^\varepsilon, \theta^\varepsilon\right)\right\|_{H^s}^2 + \left\|J_\varepsilon \nabla u^\varepsilon\right\|_{H^s}^2 + \left\|J_\varepsilon \nabla b^\varepsilon\right\|_{H^s}^2 + \left\|J_\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon\right\|_{H^s}^2 \le C(s)\left\|\left(u^\varepsilon, b^\varepsilon, \theta^\varepsilon\right)\right\|_{H^s}^3. \tag{14}$$

由(14)和 $\left(u^\varepsilon(x,0), b^\varepsilon(x,0), \theta^\varepsilon(x,0)\right) = \left(u_0^\varepsilon(x), b_0^\varepsilon(x), \theta_0^\varepsilon(x)\right)$ 及 $\left\|\left(u_0^\varepsilon(x), b_0^\varepsilon(x), \theta_0^\varepsilon(x)\right)\right\|_{H^s} \le \left\|\left(u_0(x), b_0(x), \theta_0(x)\right)\right\|_{H^s}$ 知，存在一个不依赖于 ε 的 $T = T\left(u_0, b_0, \theta_0\right)\left(\le T^\varepsilon\right) > 0$，使得

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\left(u^\varepsilon, b^\varepsilon, \theta^\varepsilon\right)\right\|_{H^s} \le C(s)\left\|\left(u_0, b_0, \theta_0\right)\right\|_{H^s}. \tag{15}$$

由(15)和引理 2.1 知，存在 $\{\varepsilon_n\}$，满足 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$。当 $n\to\infty$ 时，解族 $\left\{\left(u^\varepsilon, b^\varepsilon, \theta^\varepsilon\right)\right\}_{\varepsilon>0}$ 的子列 $\left\{\left(u^{\varepsilon_n}, b^{\varepsilon_n}, \theta^{\varepsilon_n}\right)\right\}$ 收敛，其极限 (u, b, θ) 为初值问题(1)的解，且

$$(u, b, \theta) \in C\left([0,T); H^s\left(R^2\right)\right) \cap L^2\left([0,T); H^{s+1}\left(R^2\right)\right).$$

下证初值问题(1)的局部解的唯一性。

设 (u_1, b_1, θ_1) 和 (u_2, b_2, θ_2) 是初值问题(1)的两个解。令 $u = u_1 - u_2, b = b_1 - b_2$，$\theta = \theta_1 - \theta_2$ 和 $\pi = \pi_1 - \pi_2$，则 (u, b, θ) 满足

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u_1\cdot\nabla u + u\cdot\nabla u_2 + \nabla\pi = b_1\cdot\nabla b + b\cdot\nabla b_2 + \theta e_2, \\ \partial_t b - \Delta b + u_1\cdot\nabla b + u\cdot\nabla b_2 = b_1\cdot\nabla u + b\cdot\nabla u_2, \\ \partial_t \theta - \Delta\theta + u_1\cdot\nabla\theta + u\cdot\nabla\theta_2 = 0, \\ \nabla\cdot u = 0 = \nabla\cdot b, \\ (u, b, \theta)_{t=0} = (0,0,0). \end{cases} \tag{16}$$

在初值问题(16)的三个方程两边分别与 u, b 和 θ 作内积，再将左右两边分别相加，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{L^2}^2 + \|b\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2\right) \\ &= -\left(u_1\cdot\nabla u, u\right) - \left(u\cdot\nabla u_2, u\right) - \left(u_1\cdot\nabla b, b\right) - \left(u\cdot\nabla b_2, b\right) \\ &\quad + \left(b_1\cdot\nabla b, u\right) + \left(b\cdot\nabla b_2, u\right) + \left(b_1\cdot\nabla u, b\right) + \left(b\cdot\nabla u_2, b\right) \\ &\quad + (\Delta u, u) + (\Delta b, b) + (\Delta\theta, \theta) - \left(u_1\cdot\nabla\theta, \theta\right) - \left(u\cdot\nabla\theta_2, \theta\right) + \left(\theta e_2, u\right) \\ &\triangleq \sum_{n=1}^{14} M_n. \end{aligned} \tag{17}$$

由 Green 公式和 $\operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0$，得

$$M_1 = \left(u_1\cdot\nabla u, u\right) = 0,\ M_3 = \left(u_1\cdot\nabla b, b\right) = 0. \tag{18}$$

由 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理，得

$$M_2=\left(u\cdot\nabla u_2,u\right)\le\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u_2\|_{L^\infty}\le C(s)\|u_2\|_{H^s}\|u\|_{L^2}^2,\tag{19}$$

$$M_4=\left(u\cdot\nabla b_2,b\right)\le\|u\|_{L^2}\|b\|_{L^2}\|\nabla b_2\|_{L^\infty}\le C(s)\|b_2\|_{H^s}\left(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2\right),\tag{20}$$

$$M_6=\left(b\cdot\nabla b_2,u\right)\le C(s)\|b_2\|_{H^s}\left(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2\right),\tag{21}$$

$$M_8=\left(b\cdot\nabla u_2,b\right)\le C(s)\|u_2\|_{H^s}\|b\|_{L^2}^2,\tag{22}$$

$$M_{13}=\left(u\cdot\nabla\theta_2,\theta\right)\le\|u\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2}\|\nabla\theta_2\|_{L^\infty}\le C(s)\|\theta_2\|_{H^s}\left(\|u\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right),\tag{23}$$

$$M_5=\left(b_1\cdot\nabla b,u\right)\le\|\nabla b\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\|b_1\|_{L^\infty}\le C(s)\|\nabla b\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\|b_1\|_{H^s}\le\frac{1}{2}\|\nabla b\|_{L^2}^2+C(s)\|b_1\|_{H^s}^2\|u\|_{L^2}^2,\tag{24}$$

$$M_7=\left(b_1\cdot\nabla u,b\right)\le\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2+C(s)\|b_1\|_{H^s}^2\|b\|_{L^2}^2,\tag{25}$$

$$M_{12}=\left(u_1\cdot\nabla\theta,u\right)\le\frac{1}{2}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+C(s)\|u_1\|_{H^s}^2\|u\|_{L^2}^2.\tag{26}$$

$$M_{14}=\left(\theta e_2,u\right)\le\frac{1}{2}\left(\|\theta\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2\right).\tag{27}$$

由 Green 公式，得

$$M_9=\left(\Delta u,u\right)=-\|\nabla u\|_{L^2}^2.\tag{28}$$

类似地，有

$$M_{10}=-\|\nabla b\|_{L^2}^2\text{ 和 }M_{11}=-\|\nabla\theta\|_{L^2}^2.\tag{29}$$

结合(17)~(29)知，存在 $C=C(s)$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right)+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\le C\left(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right).$$

因此，对任意 $t\in[0,T]$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right)\le C\left(\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right).$$

由 Gronwall 不等式及 $(u,b,\theta)|_{t=0}=(0,0,0)$，可得在 $[0,T]$ 上恒有 $\|u\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2=0$，即 $\|u\|_{L^2}=0,\|b\|_{L^2}=0,\|\theta\|_{L^2}=0$。因此初值问题(1)的局部解唯一。引理 2.3 证毕。

3. 定理 1.1 的证明

为了研究初值问题(1)整体解的存在性，需用到如下引理。

引理 3.1 [7] **(Sobolev 对数不等式)** 设 $s>\frac{d}{2}, f\in H^s\left(R^d\right)$，则以下不等式成立：

$$\|f\|_{L^\infty}\le C(s)\left(1+\|f\|_{H^{\frac{d}{2}}}\right)\log^{\frac{1}{2}}\left(e+\|f\|_{H^s}\right).$$

为了证明初值问题(1)存在整体解，设$\left[0,T^*\right)$是初值问题(1)的解存在的最大时间区间，只需证明$T^*=+\infty$。用反证法，假设$T^*<+\infty$。在初值问题(1)中的方程两边分别与u,b,θ作内积，用类似于引理2.3的证明方法，得

$$\left\|(u,b,\theta)\right\|_{L^\infty\left(0,T^*;L^2\right)}+\left\|(\nabla u,\nabla b,\nabla\theta)\right\|_{L^2\left(0,T^*;L^2\right)}\le C(s)\left\|(u_0,b_0,\theta_0)\right\|_{L^2}. \tag{30}$$

在初值问题(1)中的方程两边分别与$\Delta u,\Delta b$和$\Delta\theta$作内积，再将左右两边分别相加，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\right)+\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|\Delta b\|_{L^2}^2+\|\Delta\theta\|_{L^2}^2\\&=(-u\cdot\nabla u,\Delta u)+(-u\cdot\nabla b,\Delta b)+(-u\cdot\nabla\theta,\Delta\theta)+(\theta e_2,\Delta u)\\&\triangleq\sum_{n=1}^{4}G_n.\end{aligned} \tag{31}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式及 Young 不等式，得

$$|G_1|\le\|u\cdot\nabla u\|_{L^2}\|\Delta u\|_{L^2}\le C(s)\|u\|_{L^4}\|\nabla u\|_{L^4}\|\Delta u\|_{L^2}\le\frac{1}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2+C(s)\left(\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^4\right), \tag{32}$$

类似地，有

$$|G_2|\le\|u\cdot\nabla b\|_{L^2}\|\Delta b\|_{L^2}\le\frac{1}{2}\|\Delta b\|_{L^2}^2+C(s)\left(\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla b\|_{L^2}^2\right), \tag{33}$$

$$|G_3|\le\|u\cdot\nabla\theta\|_{L^2}\|\Delta\theta\|_{L^2}\le\frac{1}{2}\|\Delta\theta\|_{L^2}^2+C(s)\left(\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\right), \tag{34}$$

$$|G_4|\le\|\theta e_2\|_{L^2}\|\Delta u\|_{L^2}\le\frac{1}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2+C(s)\|\theta\|_{L^2}^2, \tag{35}$$

结合(31)~(35)知，存在$C=C(s)$，使得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\right)+\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|\Delta b\|_{L^2}^2+\|\Delta\theta\|_{L^2}^2\\&\le C\left(\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^4+\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla b\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla\theta\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2\right)\\&\le C\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla b\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2\right)+\|\theta\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式及(30)得，(u,b,θ)在$L^2\left(0,T;H^2\left(R^2\right)\right)$中有界。

在方程组(1)的两边作用$\wedge^s$并分别与$\wedge^s u$, $\wedge^s b$和$\wedge^s\theta$作内积，再将左右两边分别相加，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\wedge^s u\right\|_{L^2}^2+\left\|\wedge^s b\right\|_{L^2}^2+\left\|\wedge^s\theta\right\|_{L^2}^2\right)\\&=\left(\wedge^s(b\cdot\nabla b),\wedge^s u\right)-\left(\wedge^s(u\cdot\nabla u),\wedge^s u\right)+\left(\wedge^s(\Delta u),\wedge^s u\right)\\&\quad+\left(\wedge^s(b\cdot\nabla u),\wedge^s b\right)-\left(\wedge^s(u\cdot\nabla b),\wedge^s b\right)+\left(\wedge^s(\Delta b),\wedge^s b\right)\\&\quad-\left(\wedge^s(u\cdot\nabla\theta),\wedge^s\theta\right)+\left(\wedge^s(\Delta\theta),\wedge^s\theta\right)+\left(\wedge^s\theta e_2,\wedge^s u\right)\\&\triangleq\sum_{n=1}^{9}H_n.\end{aligned} \tag{36}$$

类似I_1,I_2,I_4,I_5和I_7的估计方法，可得关于H_1,H_2,H_4,H_5和H_7的如下估计，

$$H_1+H_4\le C(s)\left(\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla b\|_{L^\infty}\right)\left(\|b\|_{H^s}^2+\|u\|_{H^s}^2\right), \tag{37}$$

$$H_5 \le C(s)\|\nabla b\|_{L^\infty}\left(\|b\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}^2\right), \tag{38}$$

$$H_7 \le C(s)\|\nabla \theta\|_{L^\infty}\left(\|\theta\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}^2\right), \tag{39}$$

$$H_2 \le C(s)\|\nabla u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}^2, \tag{40}$$

由 Sobolev 不等式，得

$$H_9 \le \left\|\wedge^s \theta e_2\right\|_{L^2}\left\|\wedge^s u\right\|_{L^2} \le C(s)\|\theta\|_{L^2}\|u\|_{H^s} \le C(s)\|\theta\|_{H^s}\|u\|_{H^s}. \tag{41}$$

由 Green 公式，得

$$H_3 = -\|\nabla u\|_{H^s}^2, H_6 = -\|\nabla b\|_{H^s}^2 \text{ 和 } H_8 = -\|\nabla \theta\|_{H^s}^2. \tag{42}$$

结合(36)~(42)知，存在 $C = C(s)$，使得，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u\|_{H^s}^2 + \|b\|_{H^s}^2 + \|\theta\|_{H^s}^2\right) + \left(\|\nabla u\|_{H^s}^2 + \|\nabla b\|_{H^s}^2 + \|\nabla \theta\|_{H^s}^2\right)\\&\le C\left(\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|\nabla b\|_{L^\infty} + \|\nabla \theta\|_{L^\infty}\right)\left(\|u\|_{H^s}^2 + \|b\|_{H^s}^2 + \|\theta\|_{H^s}^2\right).\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式，得

$$\|u\|_{H^s}^2 + \|b\|_{H^s}^2 + \|\theta\|_{H^s}^2 \le C\mathrm{e}^{\int_0^t\left(\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|\nabla b\|_{L^\infty} + \|\nabla \theta\|_{L^\infty}\right)\mathrm{d}\tau}\left(\|u_0\|_{H^s}^2 + \|b_0\|_{H^s}^2 + \|\theta_0\|_{H^s}^2\right).$$

由引理 3.1 可证，对任意 $t \in \left[0, T^*\right]$，有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left(\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|\nabla b\|_{L^\infty} + \|\nabla \theta\|_{L^\infty}\right)\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_0^t\left[1 + \log\left(e + \|u(\tau)\|_{H^s}^2 + \|b(\tau)\|_{H^s}^2 + \|\theta(\tau)\|_{H^s}^2\right)\right]\mathrm{d}\tau + C\left(u_0, b_0, \theta_0, s, T^*\right),\end{aligned}$$

因此，

$$\|u\|_{H^s}^2 + \|b\|_{H^s}^2 + \|\theta\|_{H^s}^2 \le C\left(\|u_0\|_{H^s}^2 + \|b_0\|_{H^s}^2 + \|\theta_0\|_{H^s}^2\right)\mathrm{e}^{\int_0^t\left(1 + \log\left(e + \|u(\tau)\|_{H^s}^2 + \|b(\tau)\|_{H^s}^2 + \|\theta(\tau)\|_{H^s}^2\right)\right)\mathrm{d}\tau},$$

从而，

$$\begin{aligned}&\log\left(e + \|u(t)\|_{H^s}^2 + \|b(t)\|_{H^s}^2 + \|\theta(t)\|_{H^s}^2\right)\\&\le C\left(u_0, b_0, \theta_0, s, T^*\right) + C\int_0^t \log\left(e + \|u(\tau)\|_{H^s}^2 + \|b(\tau)\|_{H^s}^2 + \|\theta(\tau)\|_{H^s}^2\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得 $(u, b, \theta) \in L^\infty\left(0, T^*; H^s\left(R^2\right)\right)$。又由 $(u, b, \theta) \in L^2\left(0, T^*; H^2\left(R^2\right)\right)$ 知，解可被延拓到 $t = T^*$ 后，这与 $\left(0, T^*\right]$ 为初值问题(1)的解的最大存在区间的假设相矛盾，因此 $T^* = \infty$。定理 1.1 证毕。

参考文献

[1] Hmidi, T. and Keraani, S. (2007) On the Global Well-Posedness of the Boussinesq System with Zero Viscosity. *Indiana University Mathematics Journal*, **58**, 1591-1618. https://doi.org/10.1512/iumj.2009.58.3590

[2] Larios, A. and Pei, Y. (2017) On the Local Well-Posedness and a Prodi-Serrin-Type Regularity Criterion of the Three-Dimensional MHD-Boussinesq System without Thermal Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **263**, 1419-1450. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.03.024

[3] Zhai, X. and Chen, Z. (2018) Global Well-Posedness for the MHD-Boussinesq System with the Temperature-Dependent Viscosity. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **44**, 260-282. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.05.006

[4] Li, Z., Liu, P. and Niu, P. (2019) Global Well-Posedness and Large Time Asymptotic Behavior of Strong Solutions to the Cauchy Problem of the 2-D MHD Equation. arXiv: 1901.01384. https://doi.org/10.1007/s40818-019-0064-5

[5] Simon, J. (1990) Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids: Existence of Velocity, Density, and Pressure. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, **21**, 1093-1117. https://doi.org/10.1137/0521061

[6] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. (1993) Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-De Vries Equation via the Contraction Principle. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **46**, 527-620. https://doi.org/10.1002/cpa.3160460405

[7] Wang, C. and Zhang, Z. (2011) Global Well-Posedness for the 2-D Boussinesq System with the Temperature-Dependent Viscosity and Thermal Diffusivity. *Advances in Mathematics*, **228**, 43-62. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.05.008