Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 310-312
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112040

Hans汉斯

矩阵多项式问题的两种解法

陈　贺，金长松

东北大学秦皇岛分校，数学与统计学院，河北 秦皇岛
Email: 852449638@qq.com

收稿日期：2021年1月15日；录用日期：2021年2月18日；发布日期：2021年2月25日

摘　要

线性代数的问题中，关于矩阵多项式的问题有很多。本文从两个观点讨论对他们的解法。并用它们分别证明线性代数中著名的Hamilton-Caylay定理与根子空间分解定理加强命题。

关键词

矩阵多项式，若尔当标准型，Hamilton-Caylay定理，根子空间分解定理

Two Solutions of Matrix Polynomial Problem

He Chen, Changsong Jin

School of Mathematics and Statistics, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao Hebei
Email: 852449638@qq.com

Received: Jan. 15th, 2021; accepted: Feb. 18th, 2021; published: Feb. 25th, 2021

Abstract

Among the problems of linear algebra, there are many problems about matrix polynomials. This article discusses their solutions from two viewpoints. And we use them to prove the famous Hamilton-Caylay Theorem and root subspace decomposition theorem in linear algebra to strengthen the proposition.

Keywords

Matrix Polynomial, Jordan Normal Form, Hamilton-Caylay Theorem, Root Subspace Decomposition Theorem

文章引用: 陈贺, 金长松. 矩阵多项式问题的两种解法[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 310-312.
DOI: 10.12677/pm.2021.112040

1. 从一般到特殊看矩阵

在 C (或其子域)上的矩阵 A，及多项式 $f(x)\in C[x]Xf(A)X^{-1}=f(XAX^{-1})$。故在考查关于某个矩阵 A 的命题时，可设其为若尔当标准形式。即 $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$，$J_i=J(\lambda_i,n_i)$，$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$。

另外，有时根据需要，也将 A 设为可逆或有几个互异特征值，只要把 A 中每个元素添一些有极限的数列，变为 A_n，A_n 满足题设，$A_n\to A(n\to\infty)$。这样任意的 A 也满足要求。就完成证明了。这就是从一般到特殊的观点，有时候特殊情况下我们更容易处理。比如若尔当标准下，不仅能分块还是一对角的，可逆下，有可逆矩阵方便处理而特殊情况解决了，有时候更一般问题也迎刃而解[1] [2]。

例 1

$$A\in k^{n\times n}，\quad f,g\in K[x]，\quad d=\gcd(f,g)，\quad g(A)=0。$$

则 $\operatorname{rank}(f(A))=\operatorname{rank}(d(A))$

不妨设 $A=\operatorname{diag}(J_1,\cdots,J_k)$，$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n\times n}$

其中

$$J_i=J(\lambda_i,n_i)，\qquad \begin{aligned}\operatorname{rank}(f(A))&=\sum_i \operatorname{rank}(f(J_i))=\sum_{f(x_i)\neq 0} n_i+\sum_{f(\lambda_i)=0}\operatorname{rank}(f(J_i))\\ &=\sum_{d(\lambda_i)\neq 0} n_i+\sum_{d(\lambda_i)=0}\operatorname{rank}(d(J_i))\\ &=\sum_i \operatorname{rank}(d(J_i))=\operatorname{rank}(d(A))\end{aligned}$$

这里用到，因 $g(A)=0$，故 $g(\lambda_i)=0$，而 $d\mid f,d\mid g$。

故 $f(\lambda_i)=0\Leftrightarrow d(\lambda_i)=0$

另一方面 $d(\lambda_i)=0$ 时，$\operatorname{rank}(f(J_i))=\operatorname{rank}(d(J_i))$

要说明这一点，设 λ_i 为 f,g 的 p,q 重根。

若 $p\geq q$，则 $\operatorname{rank}(f(J_i))=\operatorname{rank}(g(J_i))=\operatorname{rank}(d(J_i))=0$

若 $p<q$，d 和 f 关于 λ_i 的根的重数相同，比较因式分解，则直接有 $\operatorname{rank}(f(J_i))=\operatorname{rank}(d(J_i))$

例 2 (Hamilton-Caylay 定理) [3]

$A\in K^{n\times n}$，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，则 $f(A)=A^n+\alpha_1A^{n-1}+\cdots+\alpha_nE=0$

若是只要求 $A\in C^{n\times n}$

一定存在与 A 任意接近且有互异特征根的矩阵 B，构造 $\{B_m\}$ 使 $\lim\limits_{m\to\infty}B_m=A$ 每个 B_m 有 n 个互异特征

根，记 $f_m(\lambda)=|\lambda E-B_m|=\lambda^n+\alpha_1^m\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n^m$，其中 α_k^m 是 B_m 中元素的多项式函数，且是诸元素的连续函数，同 $\lim\limits_{m\to\infty}B_m=A$，下有 $\lim\limits_{m\to\infty}\alpha_k^m=\alpha_k$， α_k 是 A 的特征多项式系数，

从而

$$f(A)=A^n+\alpha_1A^{n-1}+\cdots+\alpha_nE=\lim_{m\to\infty}\left(B_m^n+\alpha_1^mB_m^{n-1}+\cdots+\alpha_n^mE\right)=\lim_{m\to\infty}f_m(B_m)$$

因 B_m 的特征根互异时，结论是容易的，而在有重根时，只需一个极限过程，逼近时，因而可以在一开始不妨设 A 特征根互异。

但在 $k^{n\times n}$ 下，没有定义距离也就没有收敛，这时要更本质的证明如下：

设 $\lambda E-A$ 的伴随矩阵 $B(\lambda)$，则 $B(\lambda)\cdot(\lambda-A)=f(\lambda)E$

两边都在 $K[\lambda][A]$ 环中，将 A 代入 λ 中，左边=0，右边为 $f(A)$，

即 $f(A)=0$。

2. 利用多项式的性质

例 3 根子空间分解定理的加强命题：

设 $A\in K^{n\times n},f,g\in K[x]$，且 f,g 互素， $h=fg$，有 $\ker f(A)\oplus\ker g(A)$， p,q 的意义如上例，显然 $\ker f(A),\ker g(A)\subset\ker h(A)$。

取 $x\in\ker h(A)$，则 $x=f(A)p(A)x+g(A)q(A)x\in\ker g(A)+\ker f(A)$。

容易得到若 $f(A)=\prod_{i=1}^{S}(A-\lambda_iE)^{n_i}$ 得 $V=\oplus\ker(A-\lambda_iE)^{n_i}$。

在解决矩阵多项式有关的问题时，通常也要借助多项式本身的性质，如整除，辗转相除法。

例 1 的另证：

用 $d\mid f$，故 $\operatorname{rank}(d(A))\geq\operatorname{rank}(f(A))$。

同有 $p,q\in K[x]$，使 $d=fp+gq$。

又 $0\in\ker f(A)\cap\ker g(A)$，则 $x=p(A)f(A)x+q(A)g(A)x=0$。

故 $\ker f(A)+\ker g(A)=\ker h(A)$，证毕。

参考文献

[1] 胡适耕, 刘先忠. 高等代数[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[2] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[3] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.