Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 271-276
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112036

Hans汉斯

格点的多重可见性

黄　旸

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: hy17862903835@126.com

收稿日期：2021年1月13日；录用日期：2021年2月16日；发布日期：2021年2月24日

摘　要

设$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$是二维整数格且$k,l\in\mathbb{N}$，若格点$(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$位于形如$y=rx^k$ $(r\in\mathbb{Q})$的曲线上，且在(m,n)与原点$(0,0)$之间的相应曲线段上至多有$l-1$个格点(不含端点)，则称(m,n)是l-重的k-可见格点。特别地，当重数$l=1$时，简称(m,n)为k-可见格点。本文给出了方形区域$[1,x]\times[1,x]$中l-重k-可见格点个数的一个渐近公式，这推广了Goins等人关于k-可见格点密度的一个结果。

关键词

格点，k-可见，渐近公式

Multiple Visibility of Lattice Points

Yang Huang

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: hy17862903835@126.com

Received: Jan. 13th, 2021; accepted: Feb. 16th, 2021; published: Feb. 24th, 2021

Abstract

Let $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ be the two dimensional integer lattice and $k,l\in\mathbb{N}$. We say a point $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ is *k*-visible with Level-*l* if it lies on a curve of type $y=rx^k$ with $r\in\mathbb{Q}$ and there are at most $l-1$ lattice points on the curve segment between points (m,n) and $(0,0)$ (not included). In this paper, we prove an asymptotic formula for the number of lattice points in the square $[1,x]\times[1,x]$ which are *k*-visible with Level-*l*. This generalizes a result of Goins *et al.*

文章引用：黄旸. 格点的多重可见性[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 271-276.
DOI: 10.12677/pm.2021.112036

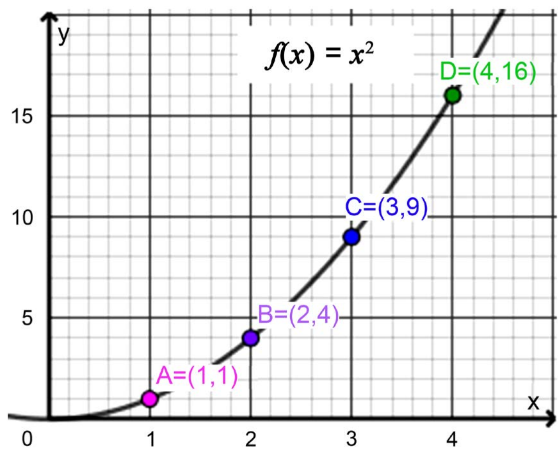
Keywords

Lattice Points, *k*-Visibility, Asymptotic Formula

1. 引言

二维格 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中的一个格点 (m,n) 称为是可见的，若没有其它格点位于 (m,n) 与 $(0,0)$ 之间的直线段(不含端点)上。1883 年，Sylvester [1]证明了 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中可见格点的比例为 $1/\zeta(2)=6/\pi^2\approx 0.60793$，其中 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$，$\Re(s)>1$，是黎曼 Zeta 函数。2018 年，Goins，Harris，Kubik 和 Mbirika [2]将 Sylvester 的结果推广到了沿曲线可见的情形。格点 $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 称为是 k-可见的，若 (m,n) 位于形如 $y=rx^k\ (r\in\mathbb{Q})$ 的曲线上，且在 (m,n) 与 $(0,0)$ 的之间曲线段(不含端点)上没有其它格点。Goins 等人证明了 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中 k-可见格点的比例为 $1/\zeta(k+1)$，其他相关研究可参见文献[3]和[4]等。

最近，刘奎和孟宪昌[5]提出了多重 k-可见性的概念。对于 $k,l\in\mathbb{N}$，若格点 $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 在形如 $y=rx^k\ (r\in\mathbb{Q})$ 的曲线上，且在点 (m,n) 与 $(0,0)$ 之间的曲线段(不含端点)上至多有 $l-1$ 个格点，则称点 (m,n) 是 l-重 k-可见的(见图 1)。特别地，当 $l=1$ 时，简称 (m,n) 为 k-可见格点；当 $k=1$ 时，简称 (m,n) 是 l-重可见格点。刘奎和孟宪昌给出了方形区域 $[1,x]\times[1,x]$ 中 1-重和 2-重 k-可见格点个数的渐近公式。从他们的结果可以得到 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中 2-重可见格点的密度为 $5/(4\zeta(2))=15/(2\pi^2)\approx 0.75991$。



格点 A：1-重 2-可见；格点 A,B：2-重 2-可见；格点 A,B,C：3-重 2-可见；格点 D：非 3-重 2-可见。

Figure 1. Higher level 2-visible lattice points along a curve
图 1. 沿曲线的多重 2-可见格点

本文主要考虑更高重数的 k-可见格点。对于 $k,l\in\mathbb{N}$，定义

$$V_l(k;x):=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:m,n\le x,(m,n)\ l\text{-重}\ k\text{-可见}\}$$

为 $[1,x]\times[1,x]\ (x\ge 2)$ 中 l-重 k-可见格点的集合。

定理 1.1. 对于任意的 $x\ge 2$ 和给定的 $k,l\in\mathbb{N}$，则

$$\#V_l(k;x)=\frac{1}{\zeta(k+1)}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{i^{k+1}}\right)x^2+O_{k,l}(x\log x).$$

注：由于格点的可见性在四个象限里是对称分布的，因此由定理 1.1 可知，格 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中 l-重 k-可见格点的密度为 $\zeta^{-1}(k+1)\sum_{i=1}^{l}i^{-(k+1)}$ 。由此及黎曼 Zeta 函数的定义可知，当 l 趋于无穷时，该密度趋于 1，符合直观。特别地，当 $l=1,2$ 时，定理 1.1 分别覆盖了上述 Goins 等人[2]以及刘奎和孟宪昌[5]的相应结果。

我们还对 l-重 k-可见格点的密度进行了数值实验(见表 1)，实验结果与理论结果十分吻合。

Table 1. The density of l-level k-visible points
表 1. l-重 k-可见格点的密度

可见类型 k	可见重数 l	数值实验结果	理论结果≈
1	1	0.60838	0.60792
1	2	0.76061	0.75991
1	3	0.82825	0.82746
1	4	0.86629	0.86545
1	5	0.89076	0.88977
2	1	0.83200	0.83191
2	2	0.93620	0.93590
2	3	0.96719	0.96671
2	4	0.98022	0.97971
2	5	0.986952	0.98636

根据定理 1.1，容易得到以下推论。

推论. 对于给定的 $l\in\mathbb{N}$，格 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中 l-重可见格点的密度为 $\frac{1}{\zeta(2)}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{i^2}\right)$。

符号说明:

以下是对本文用到的符号的说明。

$\#S$	集合 S 中元素的个数
$a\mid b$	a 整除 b
$a\nmid b$	a 不整除 b
$\gcd(a,b)$	a 和 b 的最大公约数
$\gcd_k(a,b)$	a 和 b 的与参数 k 有关的广义最大公约数，见本文定义 2.1
$[a,b]$	a 和 b 的最小公倍数；或表示闭区间 $a\le x\le b$
$a\equiv b(\bmod q)$	$q\mid a-b$， $q>0$
$\zeta(s)$	黎曼 Zeta 函数： $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$， $\Re(s)>1$ 时收敛； $\Re(s)$ 表示复数 s 的实部
$\mu(n)$	莫比乌斯函数： $\mu(1)=1$； $n=p_1p_2\cdots p_t$ 且 $p_i(1\le i\le t)$ 是素数时， $\mu(n)=(-1)^t$；其它情况 $\mu(n)=0$
$f(x)=O(g(x))$	存在正常数 C，使 $f(x)\le C\lvert g(x)\rvert$； $f(x)=O_\varepsilon(g(x))$ 表示 C 与参数 ε 有关
$f(x)\ll g(x)$	即 $f(x)=O(g(x))$； $f(x)\ll_\varepsilon g(x)$ 表示 C 与参数 ε 有关

2. 准备知识

以下广义最大公约数的定义是由 Goins 等人在[2]中提出的。

定义 2.1.对 $k\in\mathbb{N}$，与参数 k 有关的广义最大公约数定义为

$$\gcd_k(m,n):=\max\left\{d\in\mathbb{N}:d\mid m\text{且}d^k\mid n\right\}.$$

在证明 l-重 k-可见格点的判别法则之前，我们先证明以下引理。

引理 2.1. 对任意 $b\in\mathbb{Z}$，$(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，我们有

$b\mid m$ 且 $b^k\mid n\ (k\in\mathbb{N})$ 当且仅当 $b\mid\gcd_k(m,n)$。

证明：若 $b\mid m$ 且 $b^k\mid n$。设 $\gcd_k(m,n)=d$，$b\neq d$。根据 $\gcd_k$ 的定义，我们知道 d 是使得 $d\mid m$ 且 $d^k\mid n$ 的最大正整数，显然有 $b\mid d$。否则，若 $b\nmid d$，则由 $b\mid m$，$d\mid m$，我们有 $[b,d]\mid m$。同样，由 $b^k\mid n$，$d^k\mid n$，我们有 $[b,d]^k\mid n$。而显然 $[b,d]>d$，这与 $\gcd_k(m,n)=d$ 矛盾。

反之。若 $b\mid\gcd_k(m,n)$，设 $\gcd_k(m,n)=d$，则有 $b\mid d$。令 $d=bt$，由 $\gcd_k$ 的定义，有 $bt\mid m$，$(bt)^k\mid n$，从而有 $b\mid m$，$b^k\mid n$。

以下 l-重 k-可见格点的判别法则是证明定理 1.1 的关键。

引理 2.2. 对 $k\in\mathbb{N}$，任意整数 $d\geq 1$。格点 $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 位于曲线 $y=rx^k\ (r\in\mathbb{Q})$ 上，则在点 (m,n) 与点 $(0,0)$ 之间的曲线段上恰好有 $d-1$ 个整数格点当且仅当 $\gcd_k(m,n)=d$。

证明：假设 $\gcd_k(m,n)=d$。当 $d=1$ 时，点 (m,n) 与点 $(0,0)$ 之间的曲线段(不含端点)上恰好有 0 个整数格点，即格点 (m,n) 关于原点 k-可见，当且仅当 $\gcd_k(m,n)=1$。详细证明细节见([2]，命题 3)。

当 $d>1$ 时。位于曲线 $y=rx^k\ (r\in\mathbb{Q})$ 的连接点 (m,n) 与点 $(0,0)$ 的曲线段(不含端点)上任意整数格点 (p,q) 可以用以下参数形式表示出来：

$$\begin{cases}p=tm\\ q=t^kn\end{cases},$$

$0<t<1$，$t\in\mathbb{Q}$。t 的所有可能取值的个数即为点 (m,n) 与点 $(0,0)$ 之间的曲线段(不含端点)上的整数格点数。

设 $t=\dfrac{a}{b}(a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0)$，$\gcd(a,b)=1$。$p,q\in\mathbb{Z}$，则必有 $b\mid am$，$b^k\mid a^kn$，因而有 $b\mid m$，$b^k\mid n$。由引理 1.1 可知，$b\mid\gcd_k(m,n)$，即 $b\mid d$。则 $1/d,\cdots,(d-1)/d$ 为 t 的全部可能取值。由此得证。

我们还需要用到以下两个熟知的公式。

引理 2.3. ([6]，定理 2.1)设 μ 是莫比乌斯函数，则对任意整数 $n\geq 1$，有

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{当}n=1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

引理 2.4. ([6]，定理 3.2)对 $x\geq 1$，有

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O\left(x^{-1}\right),$$

其中 $\gamma=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}n^{-1}-\log N\right)$ 是欧拉常数。

3. 定理 1.1 的证明

设 $(m,n)\in V_l(k;x)$。由 l-重 k-可见格点的定义，并运用引理 1.2，区域 $[1,x]\times[1,x]$ 中 l-重 k-可见格点数可表示为

$$\#V_l(k;x)=S_1(k;x)+\cdots+S_l(k;x), \tag{1}$$

其中

$$S_i(k;x):=\sum_{\substack{m,n\le x\\ \gcd_k(m,n)=i}}1,$$

$1\le i\le l$。运用引理 1.3，得

$$S_i(k;x)=\sum_{\substack{m,n\le x\\ i|m,i^k|n\\ \gcd_k(m/i,n/i^k)=1}}1=\sum_{\substack{m,n\le x\\ i|m,i^k|n}}\sum_{d|\gcd_k(m/i,n/i^k)}\mu(d).$$

交换求和顺序，得到

$$S_i(k;x)=\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\mu(d)\sum_{\substack{m,n\le x\\ i|m,i^k|n\\ d|(m/i)),d^k|(n/i^k)}}1=\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\mu(d)\sum_{\substack{s\le x/i\\ s\equiv 0(\bmod d)}}1\sum_{\substack{t\le x/i^k\\ t\equiv 0(\bmod d^k)}}1.$$

因为同余式 $s\equiv 0(\bmod d)$ 且 $s\le x/i$ 的解数为 $x/(id)+O(1)$，同余式 $t\equiv 0(\bmod d^k)$ 且 $t\le x/i^k$ 的解数为 $x/(id)^k+O(1)$。因此，我们有

$$S_i(k;x)=\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\mu(d)\left(\frac{x}{id}+O(1)\right)\left(\frac{x}{i^kd^k}+O(1)\right).$$

余项中对 $\mu(d)$ 取绝对值，整理得

$$S_i(k;x)=\frac{x^2}{i^{k+1}}\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\frac{\mu(d)}{d^{k+1}}+O\left(\frac{x}{i}\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\frac{1}{d}\right)+O\left(\frac{x}{i^k}\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\frac{1}{d^k}\right)+O\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{i}\right).$$

下面整理一下这 3 个余项。应用引理 1.4，第一个余项可得如下估计

$$\frac{x}{i}\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\frac{1}{d}\ll_{k,i}x\log x.$$

当 $k=1$ 时，第二个余项与第一个余项估计结果相同；$k>1$ 时，由于 $\sum_{d=1}^{\infty}1/d^k$ 是一个收敛级数，因此 $\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}1/d^k=O(1)$，从而

$$\frac{x}{i^k}\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\frac{1}{d^k}\ll_{k,i}x。$$

故而有

$$S_i(k;x)=\frac{x^2}{i^{k+1}}\sum_{d\le\sqrt[k]{x}/i}\frac{\mu(d)}{d^{k+1}}+O_{k,i}(x\log x)。$$

扩大上式中求和的范围，得到

$$S_i(k;x)=\frac{x^2}{i^{k+1}}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^{k+1}}+O\left(\frac{x^2}{i^{k+1}}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/i}\frac{1}{d^{k+1}}\right)+O_{k,i}(x\log x)。$$

由于 $\sum_{d>\sqrt[k]{x}/i}\frac{1}{d^{k+1}}\ll\int_{\sqrt[k]{x}/i}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{k+1}}=\frac{1}{x}$，因此

$$\frac{x^2}{i^{k+1}}\sum_{d>\sqrt[k]{x}/i}\frac{1}{d^{k+1}}\ll_{k,i}x。$$

又因为$\frac{1}{\zeta(k+1)}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^{k+1}}$，因此，

$$S_i(k;x)=\frac{x^2}{\zeta(k+1)i^{k+1}}+O_{k,i}(x\log x),$$

$1\le i\le l$。将$S_i(k;x)$，$1\le i\le l$，代入(1)式，定理得证。

基金项目

由国家自然科学基金(项目编号：NSFC12071238)资助。

参考文献

[1] Sylvester, J.J. (1883) Sur le nombre de fractions ordinaires inegales quon peut exprimer en se servant de chiffffres quinexcedent pas un nombre donne. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris XCVI*: 409413.

[2] Goins, E.H., Harris, P.E., Kubik, B. and Mbirika, A. (2018) Lattice Point Visibility on Generalized Lines of Sight. *American Mathematical Monthly*, **125**, 593-601. https://doi.org/10.1080/00029890.2018.1465760

[3] Benedetti, C., Estupinan, S. and Harris, P.E. (2020) Generalized Lattice Point Visibility. https://arxiv.org/abs/2001.07826

[4] Harris, P.E. and Omar, M. (2018) Lattice Point Visibility on Power Functions. *Integers*, **18**, 1-7.

[5] Liu, K. and Meng, X.C. (2020) Visible Lattice Points along Curves. *The Ramanujan Journal*, 1-14. https://doi.org/10.1007/s11139-020-00302-w

[6] Apostol, T.M. (1976) Introduction to Analytic Number Theory. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5579-4