Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 277-281
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112037

弱Gorenstein投射、内射和平坦复形

朵珍珍

西北师范大学，甘肃 兰州
Email: 649210121@qq.com

收稿日期：2021年1月13日；录用日期：2021年2月16日；发布日期：2021年2月24日

摘　要

本文将弱Gorenstein投射、内射和平坦模的概念推广到复形范畴。首先给出了弱Gorenstein投射、内射和平坦复形的定义；其次在n-Gorenstein环上讨论了弱Gorenstein投射与内射复形；最后给出了一些弱Gorenstein平坦复形的简单性质。

关键词

弱Gorenstein投射复形，弱Gorenstein内射复形，弱Gorenstein平坦复形，n-Gorenstein环

Weak Gorenstein Projective, Injective and Flat Complexes

Zhenzhen Duo

Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 649210121@qq.com

Received: Jan. 13th, 2021; accepted: Feb. 16th, 2021; published: Feb. 24th, 2021

Abstract

In this article, we extend the notion of weak Gorenstein projective, injective and flat modules to the complex category. Firstly, the definition of weak Gorenstein projective, injective and flat complex is given; and then, the weak Gorenstein projective and injective complex is discussed in n-Gorenstein ring. Finally, the simple properties of weak Gorenstein flat complex are given.

Keywords

Weak Gorenstein Projective Complex, Weak Gorenstein Injective Complex, Weak Gorenstein Flat Complex, n-Gorenstein Ring

文章引用: 朵珍珍. 弱 Gorenstein 投射、内射和平坦复形[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 277-281.
DOI: 10.12677/pm.2021.112037

1. 引言

投射模、内射模和平坦模是环模理论中最常用也最基本的三大模类，投射模与内射模具有丰富的对偶性，内射模与平坦模也存在丰富的内在联系。1995 年，Enochs 在文献[1]中给出了 Gorenstein 投射模与内射模的概念，开始了对其一般理论的研究。1998 年，Enochs 和 Jenda 在文献[2]中研究了 n-Gorenstein 环上 Gorenstein 投射与内射复形，把模理论推广到复形。2011 年，Yang 和 Liu 在文献[2]的基础上把结论推广到一般环上并讨论了 Gorenstein 投射、内射和平坦复形。Gao 比较系统的研究了弱 Gorenstein 投射、内射和平坦模，2012 年 Gao 在文献[3]中给出了弱 Gorenstein 投射、内射和平坦模的定义，并用它们刻画了几类著名的环。受上述研究的启发，本文将弱 Gorenstein 投射、内射和平坦模的概念推广到复形范畴。首先给出了弱 Gorenstein 投射、内射和平坦复形的定义；其次在一些特殊环上研究其简单性质。

2. 预备知识

除非特别声明，环 R 是具有单位元的结合环，所以涉及的模均是酉模，ModR 表示左 R 模范畴。

定义 1　[2]我们称复形 G 是 Gorenstein 投射的，如果存在一个复形的正合序列

$P=\cdots\longrightarrow P_{-1}\xrightarrow{u_{-1}}P_0\xrightarrow{u_0}P_1\longrightarrow\cdots$ 满足以下条件：

1) 对所有的 $i\in Z$，P_i 是投射的；

2) $G=Keru_0$；

3) 用任意的投射复形 Q，$Hom_{C(R)}(P,Q)$ 是正合的。

定义 2　[4]我们称复形 G 是 Gorenstein 平坦的，如果存在一个复形的正合序列

$F=\cdots\longrightarrow F_{-1}\xrightarrow{u_{-1}}F_0\xrightarrow{u_0}F_1\longrightarrow\cdots$ 满足以下条件：

1) 对所有的 $i\in Z$，F_i 是平坦的；

2) $G=Keru_0$；

3) 用任意的内射复形 I，$I\otimes F$ 是正合的。

定义 3　[3]我们称左 R 模 M 是弱 Gorenstein 投射模，如果存在一个投射左 R 模的正合序列

$p=\cdots\to p_1\to p_0\to p^0\to p^1\to\cdots$ 满足以下条件：

1) 对所有的 $i\in Z$，p^i 和 p_i 是投射的；

2) $M=Ker\left(p^0\to p^1\right)$。

并且称上述正合列 p 为左 R 模的弱完全投射分解。

定义 4　[3]我们称左 R 模 M 是弱 Gorenstein 平坦模，如果存在一个左 R 模的正合序列

$f=\cdots\to f_1\to f_0\to f^0\to f^1\to\cdots$ 满足以下条件：

1) 对所有的 $i\in Z$，f^i 和 f_i 是平坦的；

2) $M=Ker\left(f^0\to f^1\right)$。

并且称上述正合列 f 为左 R 模的弱完全平坦分解。

对偶的有 Gorenstein 内射复形与弱 Gorenstein 内射模的定义，读者可参阅文献[2]与[3]。

3. 弱 Gorenstein 投射和内射复形

定义 3.1　我们称复形 G 是弱 Gorenstein 投射的,如果存在一个复形的正合序列

$P=\cdots\longrightarrow P_{-1}\xrightarrow{u_{-1}}P_0\xrightarrow{u_0}P_1\longrightarrow\cdots$ 满足以下条件：

1) 对所有的 $i\in Z$，P_i 是投射的；

2) $G=Keru_0$。

并且称正合列 P 是复形的弱完全投射分解。

定义 3.2　我们称复形 G 是弱 Gorenstein 内射的，如果存在一个复形的正合序列 $I=\cdots\longrightarrow I_{-1}\xrightarrow{u_{-1}}I_0\xrightarrow{u_0}I_1\longrightarrow\cdots$ 满足以下条件：

1) 对所有的 $i\in Z$，I_i 是内射的；

2) $G=Keru_0$。

并且称正合列 I 是复形的弱完全内射分解。

推论 3.3　所有的 Gorenstein 投射(内射)复形是弱 Gorenstein 投射(内射)的。

命题 3.4　设 G 是复形，则以下等价：

1) G 是弱 Gorenstein 投射复形；

2) 存在一个复形的正合列 $0\to G\to P_0\to P_1\to\cdots$，其中对任意的 $i\in Z$，P_i 是投射的；

3) 存在复形的正合序列 $0\to G\to P\to N\to 0$，其中 P 是投射的，N 是弱 Gorenstein 投射的。

证明：根据定义 3.1，(1)$\Rightarrow$(2)，(1)$\Rightarrow$(3)显然。

(3)$\Rightarrow$(2)假设存在复形的正合序列 $0\to G\to P\to N\to 0$，其中 P 是投射的且 N 是弱 Gorenstein 投射的。根据定义 3.1，存在一个复形的正合列 $0\to N\to P_0\to P_1\to\cdots$ 且对所有的 $i\in Z$，P_i 是投射复形。因此存在复形的正合列 $0\to G\to P\to P_0\to P_1\to\cdots$ 其中 P 和 P_i 是投射的。即(2)成立。

(2)$\Rightarrow$(1)设 G 是左 R 模构成的复形，序列 $\cdots\to P_{-2}\to P_{-1}\to G\to 0$ 是复形 G 的投射分解且每个 P_i 是投射的。结合条件(2)，则存在一个复形的正合序列 $P=\cdots\to P_{-1}\to P_0\to P_1\to\cdots$ 使得 $G=Ker\left(P_0\to P_1\right)$，因此 G 是弱 Gorenstein 投射复形。

命题 3.5　设 $0\to G\to M\to P\to 0$ 是一个复形的正合列。如果 G 是弱 Gorenstein 投射复形且 P 是投射的，那么 M 是弱 Gorenstein 投射的。

证明：因为复形 G 是弱 Gorenstein 投射的。由命题 3.4 (3)知存在一个复形的正合列 $0\to G\to P'\to N\to 0$，其中 P' 是投射的且 N 是弱 Gorenstein 投射的。考虑如下推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] & 0 \\
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为中间行序列 P' 与 P 是投射的，所以 D 也是投射的。又因为中间列序列 N 是弱 Gorenstein 投射的，那么根据命题 3.4 知 M 是弱 Gorenstein 投射的。

推论 3.6　若存在复形的短正合列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$

1) 如果 M' 和 M'' 是弱 Gorenstein 投射复形，那么 M 是弱 Gorenstein 投射的。

2) 如果 M 和 M'' 是弱 Gorenstein 投射复形，那么 M' 是弱 Gorenstein 投射的。

引理 3.7　我们称环 R 是 Gorenstein 环，如果它是双边 Noether 环且它作为模时有有限的自内射维数。若它的自内射维数为 n，则环 R 是 n-Gorenstein 环。

定理 3.8　设 R 是 n-Gorenstein 环。如果复形 G 是弱 Gorenstein 投射的当且仅当对任意的 $m\in Z$，G^m 是弱 Gorenstein 投射左 R 模。

证明：$\Rightarrow$ 设 G 是弱 Gorenstein 投射复形，那么存在一个复形的正合序列 $P=\cdots\longrightarrow P_{-1}\xrightarrow{u_{-1}}P_0\xrightarrow{u_0}P_1\longrightarrow\cdots$ 使得对所有的 $i\in Z$，P_i 是投射复形且 $G=Keru_0$。对任意的 $m,i\in Z$，则存在一个 ModR 上的正合序列 $P^m=\cdots\longrightarrow P_{-1}^m\xrightarrow{u_{-1}^m}P_0^m\xrightarrow{u_0^m}P_1^m\longrightarrow\cdots$，其中 P_i^m 是投射左 R 模且 $G^m=Keru_0^m$，那么 G^m 是弱 Gorenstein 投射左 R 模。

$\Leftarrow$ 由文献命[3]题 2.6 知当环 R 是 n-Gorenstein 环时，对任意的 $m\in Z$，弱 Gorenstein 投射左 R 模 G^m 是 Gorenstein 投射的。由文献[2]定理 4.5，对任意的 $m\in Z$，G^m 是 Gorenstein 投射左 R 模当且仅当 G 是 Gorenstein 投射的。结合推论 3.3 可得复形 G 是弱 Gorenstein 投射的。

推论 3.9　如果 R 是 n-Gorenstein 环，那么弱 Gorenstein 投射复形 G 是 Gorenstein 投射的。

证明：设 R 是 n-Gorenstein 环。若 G 是弱 Gorenstein 投射复形，由定理 3.8，对任意的 $m\in Z$，G^m 是弱 Gorenstein 投射左 R 模。由文献[3]命题 2.6 知弱 Gorenstein 投射左 R 模 G^m 是 Gorenstein 投射的。由文献[2]定理 4.5，G^m 是 Gorenstein 投射左 R 模当且仅当复形 G 是 Gorenstein 投射的。故 R 是 n-Gorenstein 环时，弱 Gorenstein 投射复形 G 是 Gorenstein 投射的，得证。

注 3.10　对偶的可以验证命题 3.4 和 3.5 以及定理 3.8 与推论 3.6、3.9 对弱 Gorenstein 内射复形也成立。

4. 弱 Gorenstein 平坦复形

定义 4.1　我们称复形 G 是弱 Gorenstein 平坦的，如果存在一个复形的正合列 $F=\cdots\longrightarrow F_{-1}\xrightarrow{u_{-1}}F_0\xrightarrow{u_0}F_1\longrightarrow\cdots$ 满足以下条件：

1) 对所有的 $i\in Z$，F_i 是平坦复形；

2) $G=Keru_0$。

并且称正合列 F 是复形的弱完全平坦分解。

推论 4.2　所有的 Gorenstein 平坦复形是弱 Gorenstein 平坦的。

命题 4.3　设 G 是复形，则以下等价：

1) G 是弱 Gorenstein 平坦的；

2) 存在一个复形的正合列 $0\to G\to F_0\to F_1\to\cdots$，其中对任意的 $i\in Z$，F_i 是平坦的；

3) 存在复形的正合序列 $0\to G\to F\to H\to 0$，其中 F 是平坦的，H 是弱 Gorenstein 平坦的。

证明：证明过程与命题 3.4 类似。

命题 4.4　设 $0\to G\to N\to F\to 0$ 是一个复形的正合列。如果 G 是弱 Gorenstein 平坦复形且 F 是平坦的，那么 N 是弱 Gorenstein 平坦的。

证明：证明过程与命题 3.5 类似。

定理 4.5　若 R 是一个环且每个内射左 R 模具有有限的平坦维数，则弱 Gorenstein 平坦复形 G 是 Gorenstein 平坦的。

证明：设 G 是弱 Gorenstein 平坦复形，那么对任意的 $m\in Z$，存在 ModR 上正合序列 $F^m=\cdots\longrightarrow F_{-1}^m\xrightarrow{u_{-1}^m}F_0^m\xrightarrow{u_0^m}F_1^m\longrightarrow\cdots$，使得对所有的 $i\in Z$，F_i^m 是平坦左模且 $G^m=Keru_0^m$，则 G^m

是弱 Gorenstein 平坦左 R 模。

不妨设 R 模 E 的平坦维数有限，即 $fd_R(E)=n<\infty$。我们对 n 进行归纳，当 $n=0$ 时，$E\underset{R}{\otimes}F^m$ 正合是显然的；当 $fd_R(E)=n$ 且 $1\le n\le\infty$ 时，存在一个正合序列 $0\to M\to F\to E\to 0$，其中 F 是平坦模且 $fd_R(M)\le n-1$。因此得到复形的正合序列 $0\to M\underset{R}{\otimes}F^m\to F\underset{R}{\otimes}F^m\to E\underset{R}{\otimes}F^m\to 0$，显然 $F\underset{R}{\otimes}F^m$ 是正合的，通过归纳 $M\underset{R}{\otimes}F^m$ 正合，根据文献[5]中定理 2.3，$E\underset{R}{\otimes}F^m$ 是正合的，从而弱 Gorenstein 平坦左 R 模 G^m 是 Gorenstein 平坦的。由文献[4]定理 3.1 知对任意的 $m\in Z$，G^m 是 Gorenstein 平坦左 R 模当且仅当复形 G 是 Gorenstein 平坦的，即证。

推论 4.6　设 R 是一个环且每个内射左 R 模具有有限的平坦维数。如果复形 G 是弱 Gorenstein 平坦的，那么 G^+ 是 Gorenstein 内射复形。

证明：设复形 G 是弱 Gorenstein 平坦的，由定理 4.5 得弱 Gorenstein 平坦复形 G 是 Gorenstein 平坦的。因此对任意的 $m\in Z$，G^m 是 Gorenstein 平坦左 R 模。根据文献[6]定理 3.6 可得 $Hom_Z\left(G^m,Q/Z\right)$ 是 Gorenstein 内射左 R 模，由文献[4]定理 2.8 知 G^+ 是 Gorenstein 内射复形。

定理 4.7　若 R 是右凝聚环，则弱 Gorenstein 平坦复形构成的类关于直积封闭。

证明：设 $G=\prod_{i\in Z}G_i$，G_i 是弱 Gorenstein 平坦左 R 模构成的复形，下证 G 是弱 Gorenstein 平坦复形。因为 G_i 是弱 Gorenstein 平坦的，所以存在一个复形的正合序列 $F_i=\cdots\to F_{-i1}\to F_{i0}\to F_{i1}\to\cdots$ 使得对任意的 $i\in Z$，$G_i=Ker\left(F_{i0}\to F_{i1}\right)$。因为 R 是右凝聚环，那么序列 $\prod_{i\in Z}F_i=\cdots\to\prod_{i\in Z}F_{-i1}\to\prod_{i\in Z}F_{i0}\to\prod_{i\in Z}F_{i1}\to\cdots$ 是正合的且对任意的 $i,j\in Z$，$\prod_{i\in Z}F_{ij}$ 是平坦复形，$G=\prod_{i\in Z}G_i=Ker\left(\prod_{i\in Z}F_{i0}\to\prod_{i\in Z}F_{i1}\right)$。故 G 是弱 Gorenstein 平坦复形，得证。

命题 4.8　设 R 是交换环且 N 是平坦复形。

1) 如果 G 是弱 Gorenstein 平坦复形，那么 $G\otimes N$ 是弱 Gorenstein 平坦的。

2) 如果 G 是弱 Gorenstein 内射复形，那么 $G\otimes N$ 是弱 Gorenstein 内射的。

证明：1)设 G 是弱 Gorenstein 平坦复形，那么存在一个复形的正合列 $F=\cdots\to F_{-1}\to F_0\to F_1\to\cdots$，其中对所有 $i\in Z$，F_i 是平坦复形且 $G=Ker\left(F_0\to F_1\right)$。那么
$F\otimes N=\cdots\to F_{-1}\otimes N\to F_0\otimes N\to F_1\otimes N\to\cdots$ 是正合的，其中 $F_i\otimes N$ 是平坦的且
$G\otimes N=Ker\left(F_0\otimes N\to F_1\otimes N\right)$。因此 $G\otimes N$ 是弱 Gorenstein 平坦的。

2)与 1)的证明类似。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Enochs, E.E. and Garcia Rozas, J.R. (1998) Gorenstein Injective and Projective Complexes. *Communications in Algebra*, **26**, 1657-1674. https://doi.org/10.1080/00927879808826229

[3] Gao, Z.H. (2012) Weak Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **12**, Article ID: 1250165. https://doi.org/10.1142/S0219498812501654

[4] Yang, X.Y. and Liu, Z.K. (2011) Gorenstein Projective, Injective and Flat Complexes. *Communications in Algebra*, **39**, 1705-1721. https://doi.org/10.1080/00927871003741497

[5] Rotman, J.J. (1979) An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, New York, 30-60.

[6] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimension. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007