Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 407-418
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113053

Hans汉斯

$\mathbb{C}^n$ 中Fock型空间上线性算子的有界性和紧性

罗 颜，杨从丽*，黄星星

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳
Email: 1291115793@qq.com, *229602241@qq.com

收稿日期：2021年2月21日；录用日期：2021年3月23日；发布日期：2021年3月31日

摘 要

本文主要给出了n维复空间 $\mathbb{C}^n$ 中Fock型空间上线性算子为有界算子的充分条件，以及利用Berezin变换给出了线性算子为紧算子的充分条件。

关键词

稠密算子，有界算子，紧算子

Boundedness and Compactness of Linear Operators on Fock Type Spaces in $\mathbb{C}^n$

Yan Luo, Congli Yang*, Xingxing Huang

Department of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou
Email: 1291115793@qq.com, *229602241@qq.com

Received: Feb. 21st, 2021; accepted: Mar. 23rd, 2021; published: Mar. 31st, 2021

Abstract

In this paper, the sufficient conditions for linear operators to be bounded on Fock type spaces in n-dimensional complex spaces $\mathbb{C}^n$ are given, and the sufficient conditions for linear operators to be compact operators are given by Berezin transformation.

*通讯作者。

文章引用: 罗颜, 杨从丽, 黄星星. $\mathbb{C}^n$ 中 Fock 型空间上线性算子的有界性和紧性[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 407-418.
DOI: 10.12677/pm.2021.113053

Keywords

Dense Operator, Bounded Operator, Compact Operator

1. 引言

设 $\mathbb{C}^n$ 为 n 维复空间，α 为一个正参数，其中 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，让

$$\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)=\frac{p\alpha}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\frac{p\alpha|z|^2}{2}}\mathrm{d}m_{2n}(z)。$$

为高斯测度，其中

$$\frac{\alpha}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{C}^n}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^2}{2}}\mathrm{d}m_{2n}(z)=1。$$

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的可测函数。若 $|f|^p\,(1\le p<\infty)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上可积，则这样的全体构成空间 $L^p(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)$，即

$$L^p(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)=\left\{f(t)\mid\int_{\mathbb{C}^n}|f(t)|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha(t)<\infty\right\}。$$

Fock 空间 $F_\alpha^p=L^2(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)\cap H(\mathbb{C}^n)$。其中 $H(\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中所有整函数构成的集合。特别地，当 $p=2$ 时，就是经典的 F_α^2 空间。即 $F_\alpha^2=L^2(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)\cap H(\mathbb{C}^n)$。显然 F_α^2 是 $L^2(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 的闭子空间，即 F_α^2 也是希尔伯特空间，它的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}^n}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)。$$

实际上，F_α^2 是一个再生核希尔伯特空间，其中核函数为

$$K_\omega(z)=k(z,\omega)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha z\bar{\omega}}{2}}。$$

当 $f\in L^2(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 时，范数 $\|f\|_{2,\alpha}$ 定义为

$$\|f\|_{2,\alpha}=\left(\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)|^2\,\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{2}}。$$

同样的定义 $f\in L^p(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 时，范数 $\|f\|_{p,\alpha}$ 被表示为

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left(\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\right)^{\frac{1}{p}}。$$

由 F_α^2 的每个线性算子 S 均可导出一个 $\mathbb{C}^n$ 上的函数 $\tilde{s}$，即

$$\tilde{S}(z)=\langle Sk_z,k_z\rangle,\ z\in\mathbb{C}^n。$$

其中 $\tilde{S}$ 是 S 的 Berezin 变换。因为 k_z 是单位向量，所以当 S 有界时 $\tilde{S}$ 就有界，并且 $\|\tilde{S}\|_\infty\le\|S\|$。另外，在 F_α^2 上，当 $z\to\infty$ 时，$k_z\to 0$，因此当 S 是 F_α^2 上的紧算子时，$z\to\infty$ 时，$\tilde{S}_z\to 0$。

我们主要研究线性算子 F_α^2 上的有界性和紧性。为了说明我们的主要结果，我们需要在 F_α^2 上引入一类酉算子。对于任何 $z\in\mathbb{C}^n$，令 φ_z 代表示 $\mathbb{C}^n$ 上由 $\varphi_z(\omega)=z-\omega$ 定义的解析自映射，k_z 表示正规化的再生核，即

$$k_z(\omega)=\frac{K(\omega,z)}{\sqrt{K(z,z)}}=\mathrm{e}^{\frac{\alpha\omega\bar{z}}{2}-\frac{\alpha}{4}|z|^2}。$$

设 U_z 是 F_α^2 上的线性算子 $U_z(f)=f\circ\varphi_z k_z$，其中每一个 k_z 是 F_α^2 上的单位向量。从变量的变化易知每个 U_z 都是 F_α^2 的一个自伴单位算子，参见文献[1]。同时每个 U_z 都将 $\wp$ 映射到 $\wp$，其中 $\wp$ 为 F_α^2 的核函数 $K_\omega(z)$ 的有限线性组合构成的集合。

设 (x,y) 是测度空间，$K(s,t)$ 是 $(\Omega\times\Omega,\mathrm{B}\times\mathrm{B},\mu\times\mu)$ 上可测函数，并且

$$\iint|K(s,t)|^2\,\mathrm{d}\mu(s)\,\mathrm{d}\mu(t)<+\infty；$$

则

$$(Tx)(s)=\int_\Omega K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}\mu(t)。$$

是 $L^2(\Omega,\mathrm{B},\mu)$ 到自身的有界线性积分算子。进一步，如果 $L^2(\Omega,\mathrm{B},\mu)$ 是可分空间，那么 T 是 $L^2(\Omega,\mathrm{B},\mu)$ 上的 Hilbert-Schmidt 积分算子。

在文献[2]中，Wang 已经在复平面 $\mathbb{C}$ 上得到了以下结论。

定理 A. 如果存在 $p>2$ 和 $C>0$，使得对任意的 $z\in\mathbb{C}$ 都有 $\|S_z1\|_p\to 0$，则算子 S 在 F_α^2 上有界。

定理 B. 如果存在 $p>2$ 使得当 $z\to\infty$ 时都有，则 S 是 F_α^2 上的紧算子。

定理 C. 假设存在 $p>2$ 且 $C>0$，使得对所有的 $z\in\mathbb{C}$ 都有 $\|S_z1\|_p\le C$。则 S 是 F_α^2 上的紧算子当 且仅当 $z\to\infty$ 时，$\tilde{S}_z\to 0$。

以上这些结果都是在复平面 $\mathbb{C}$ 上成立，我们将 $\mathbb{C}$ 的这些结果推广到 n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ 上，进一步得到 $\mathbb{C}^n$ 上类似的结果。

下面我们介绍本文的主要结果。

定理 7. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子。如果存在常数 $p>2$ 和 $C>0$，使得对于任意的 $z\in\mathbb{C}^n$ 都 $\|S_z1\|_p\le C$，则 S 在 F_α^2 上有界，且有 $\|S\|\le\dfrac{2pC}{p-2}$。

定理 8. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子，$p>2$。如果当 $z\to\infty$ 时都有 $\|S_z1\|_p\to 0$，则 S 是 F_α^2 上的算子。

定理 9. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子，$p>2$，若存在正常数 C，使得对于任意的 $z\in\mathbb{C}^n$，都有 $\|Sk_z\|_p\le C$ 和 $\|S^*k_z\|_p\le C$。则 S 是 F_α^2 上的 Hilbert-Schmidt。特别的，S 是紧算子。

2. 相关引理

在本节将给出本文要用到的一系列引理。

在文献[1]中，Zhu 已经在 $\mathbb{C}$ 上得到了相应的引理。为了本文定理的证明的需要，我们将此结果推广到 $\mathbb{C}^n$ 上。得到类似的结果如下：

引理 1. 对于任何 $p>0$，对于 $L^p(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 上的任意整函数都有：

$$|f(z)|\le\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p\,\mathrm{e}^{\frac{\beta}{4}|z|^2}$$

其中 $\beta=\dfrac{2\alpha}{p}$。

证明：由范数的定义可得

$$\|f\|_{p,\alpha}^{p}=\frac{\alpha}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}|f(t)|^{p}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^{2}}{2}}\mathrm{d}m_{2n}(z),$$

令 $L_{\alpha}^{p}=L^{p}\left(\mathbb{C}^{n},\mathrm{d}\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}\right)$，则

$$\|f\|_{p,\alpha}^{p}=\frac{\alpha}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}\left|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^{2}}{4}}\right|^{p}\mathrm{d}m_{2n}(z),$$

当 $z=0$ 时，可以得到：

$$|f(0)|^{p}\leq\frac{\alpha}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}\left|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^{2}}{4}}\right|^{p}\mathrm{d}m_{2n}(z)=\|f\|_{p,\alpha}^{p}\text{。}$$

一般的，对任意的 $z\in\mathbb{C}^{n}$， $f\in F_{\alpha}^{p}$，我们构造函数

$$F(\omega)=f(z-\omega)\mathrm{e}^{\frac{\alpha\omega\bar{z}}{2}-\frac{\alpha|z|^{2}}{4}},$$

则

$$F(0)\leq\|F\|_{p,\alpha}^{p},$$

即

$$\begin{aligned}|f(z)|^{p}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^{2}}{4}}&\leq\frac{\alpha}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}\left|f(z-\omega)\mathrm{e}^{\frac{\alpha\omega\bar{z}}{2}-\frac{\alpha|z|^{2}}{4}-\frac{\alpha|\omega|^{2}}{4}}\right|^{p}\mathrm{d}m_{2n}(\omega)\\&=\frac{\alpha}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}\left|f(z-\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z-\omega|^{2}}{4}}\right|^{p}\mathrm{d}m_{2n}(\omega)\\&=\frac{\alpha}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}\left|f(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|\omega|^{2}}{4}}\right|^{p}\mathrm{d}m_{2n}(\omega)=\|f\|_{p,\alpha}^{p}\end{aligned}$$

所以有

$$|f(z)|\leq\|f\|_{p,\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha|z|^{2}}{4}}\text{。}$$

令 $\beta=\dfrac{2\alpha}{p}$，显然有

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,\alpha}^{p}&=\frac{\alpha}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}|f(z)|^{p}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha|z|^{2}}{4}}\mathrm{d}m_{2n}(z)\\&=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}|f(z)|^{p}\mathrm{e}^{-\frac{\beta p|z|^{2}}{4}}\mathrm{d}m_{2n}(z)\\&=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{C}^{n}}\left|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\beta|z|^{2}}{4}}\right|^{p}\mathrm{d}m_{2n}(z)\end{aligned}$$

所以有 $\left|f(z)\right| \le \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \mathrm{e}^{\frac{\beta|z|^2}{4}}$。

为了证明，性算子的有界性和紧性，我们先引入下面的引理说明集合 $\wp$ 是 F_α^p 的稠密子空间。

引理 2. 设 $f(z)$ 为 F_α^p 上的核函数的有限线性组合表示的函数，则 $f(z)$ 构成的集合表示为 $\wp$，其中

$$f(z)=\sum_{k=1}^n c_k K_\alpha(z,\omega_k)=\sum_{k=1}^n c_k \mathrm{e}^{\frac{\alpha z\overline{\omega_k}}{2}}$$

则 $\wp$ 是 F_α^p 的稠密子空间，其中 $0<p<\infty$。

该引理的证明思想来自文献[1]的引理 2.11。

证明：当 $p=2$ 时，结论显然成立。事实上，如果在 F_α^p 中存在一个函数 h，使得对任意的 $\omega\in\mathbb{C}^n$，h 都与 $K_a(z,\omega)$ 正交，那么 $h(\omega)=0$。一般地，由引理 1 的证明可以知道，可以找到一个正参数 β，使得 $F_\beta^2\subset F_\alpha^p$，且对所有的 $f\in F_\beta^2$ 都有 $\|f\|_{p,\alpha}\le C\|f\|_{2,\beta}$ 成立。且对任何的 $\beta\in(0,\alpha)$ 这个结果都成立。如果 f 是一个多项式，且 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 是空间 $\mathbb{C}^n$ 的点，则

$$\begin{aligned}
\left\|f-\sum_{k=1}^n c_k K_\alpha(z,\omega_k)\right\|_{p,\alpha}^p &\le C\left\|f-\sum_{k=1}^n c_k K_\alpha(z,\omega_k)\right\|_{2,\beta} \\
&=\left\|f-\sum_{k=1}^n c_k \mathrm{e}^{\frac{\alpha z\overline{\omega_k}}{2}}\right\|_{2,\beta} \\
&=\left\|f-\sum_{k=1}^n c_k \mathrm{e}^{\frac{\beta z\frac{\alpha\overline{\omega_k}}{\beta}}{2}}\right\|_{2,\beta} \\
&=C\left\|f-\sum_{k=1}^n c_k K_\beta\left(z,\frac{\alpha\omega_k}{\beta}\right)\right\|_{2,\beta}
\end{aligned}$$

因为 $p=2$ 时结论成立，即函数 $\sum_{k=1}^n c_k K_\beta(z,\omega_k)$ 在 F_β^2 上是稠密的。进一步，在 F_α^p 的范数拓扑中，由上式可知每一个多项式都可以由函数 $\sum_{k=1}^n c_k K_\alpha(z,\omega_k)$ 逼近。因此我们可以得到集合 $\wp$ 在 F_α^p 上稠密。

这篇文章中的每一个算子的定义域都包含 $\wp$。由于 $\langle SK_z,K_\omega\rangle=\langle K_z,S^*K_\omega\rangle$，则 S^* 的区域也包含 $\wp$。我们进一步假设函数 $z\to SK_z$ 是共轭解析的。

对于任意 $z\in\mathbb{C}^n$ 和 F_α^2 上的任意线性算子 S，设 $S_z=U_zSU_z$。而每一个 U_z 都是 $\wp$ 上的自映射。因此当每个 S 的定义域都包含 $\wp$ 时，S_z 的定义域也包含 $\wp$。

为了后面我们证明线性算子的紧性，我们引入下面的引理它给出算子 $\langle SK_\omega,K_z\rangle$ 的一个上界。

引理 3. 设 $p>2$，S 是 F_α^2 上的线性算子，则对任意的 $z,\omega\in\mathbb{C}^n$ 有：

$$\langle SK_\omega,K_z\rangle\le\|S_\omega 1\|_p \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2}$$

其中 $\beta=\frac{2\alpha}{p}$ 和 $\sigma=\frac{\alpha-\beta}{2}$。进一步，如果存在某些正常数 C，使得对任意的 $\omega\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\|S_\omega 1\|_p\le C$ 成立，则有

$$\langle SK_\omega,K_z\rangle\le C\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2},\quad z,\omega\in\mathbb{C}^n,$$

证明：由 $S_z=U_zSU_z, U_zf=f\circ\varphi_z k_z$ 有

$$S_\omega 1(z)=\left(U_\omega SU_\omega 1\right)(z)=\left(U_\omega Sk_\omega\right)(z)=k_\omega(z)\left(Sk_\omega\right)(\omega-z),$$

在引理 1 中，对所有的 $z,\omega\in\mathbb{C}^n$，有

$$\left|k_\omega(z)\left(Sk_\omega\right)(\omega-z)\right|\le\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p\left\|S_\omega 1\right\|_p \mathrm{e}^{\frac{\beta}{4}|z|^2}\le\left\|S_\omega 1\right\|_p \mathrm{e}^{\frac{\beta}{4}|z|^2}。$$

其中 $\beta=\dfrac{2\alpha}{p}<\alpha$。用 $\omega-z$ 去代替 z，则有

$$Sk_\omega(z)=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2}SK_\omega(z)=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2}\left\langle SK_\omega,K_z\right\rangle,$$

并对结果进行简化，对任意的 $z,\omega\in\mathbb{C}^n$ 有

$$\left\langle SK_\omega,K_z\right\rangle\le\left\|S_\omega 1\right\|_p \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2}。$$

下面的引理表明对于 F_α^2 上的每一个线性算子都可以用正则的方式表示积分算子。

引理 4. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子，T 是 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上的积分算子，T 定义为:

$$Tf(z)=\int_{\mathbb{C}^n}\ulcorner f(\omega)\left\langle SK_\omega,K_z\right\rangle\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\tag{1}$$

S 在 F_α^2 上有界当且仅当 T 在 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上有界。进一步，当 T 和 S 都有界时，则 S 是 T 在 F_α^2 上的一个等价限制。

证明：任何固定的 $z\in\mathbb{C}^n$，函数

$$\omega\to\left\langle K_z,SK_\omega\right\rangle=\left\langle S^*K_z,K_\omega\right\rangle=\left(S^*K_z\right)(\omega),$$

是 F_α^2 上的整函数。因此，对于任意的 $f\in L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)\Theta F_\alpha^2$ 都有 $Tf=0$ 成立，其中 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)\Theta F_\alpha^2$ 表示 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 中除去 F_α^2 的部分。如果 S 在 F_α^2 上有界，对于某些 $a\in\mathbb{C}^n$ 的核函数 $f=K_a$，通过 K_a 的再生性质有

$$\begin{aligned}Tf(z)&=\int_{\mathbb{C}^n}K(\omega,a)\left\langle SK_\omega,K_z\right\rangle\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\\&=\overline{\int_{\mathbb{C}^n}\left\langle S^*K_z,K_\omega\right\rangle K(a,\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)}\\&=\overline{\left\langle S^*K_z,K_a\right\rangle}=\left\langle SK_a,K_z\right\rangle\\&=SK_a(z)=Sf(z)\end{aligned}$$

由此得出在 $\wp$ 上有 $Tf=Sf$，对于任意的 $f\in\wp$ 都有 $\|Tf\|\le\|S\|\|f\|$。应用前面的结论，我们得出了 T 在 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上有界，且 S 是 T 在 F_α^2 上的等价限制。

反之，对于任意的 $f\in\wp$，如果 T 在 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上是有界的，则当 $z\in\mathbb{C}^n$ 有

$$Tf(z)=\int_{\mathbb{C}^n}f(\omega)\overline{S^*K_z(\omega)}\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)=\left\langle f,S^*K_z\right\rangle=\left\langle Sf,K_z\right\rangle=Sf(z),$$

这表明 T 在 $\wp$ 上的限制作用与 S 是一致的。由于 $\wp$ 在 F_α^2 中是稠密的，且 T 是有界的，所以 S 是扩展到 F_α^2 上有界线性算子。

引理 5. 对于 $z,\omega\in\mathbb{C}^n$，有

$$U_aK_\omega=\overline{k_a(\omega)}K_{\varphi_a}(\omega);\quad U_ak_\omega=\beta k_{\varphi_a}(\omega);\quad \tilde{S}\circ\varphi_a=\tilde{S}_a,$$

其中 β 是一个依赖于 a 和 ω 单位模常数。

证明：

$$\begin{aligned} U_aK_\omega &= K_\omega\circ\varphi_a k_a = k_a K_\omega \varphi_a = k_a(\omega)K_\omega(a-\omega) \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha\omega\bar{a}}{2}+\frac{\alpha\bar{\omega}a}{2}-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}-\frac{\alpha|a|^2}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{\alpha\bar{\omega}a}{2}-\frac{\alpha|a|^2}{4}+\frac{\alpha\omega\bar{a}}{2}-\frac{\alpha|\omega|^2}{2}} = \mathrm{e}^{\overline{\frac{\alpha\bar{\omega}a}{2}-\frac{\alpha|a|^2}{4}}}\mathrm{e}^{\frac{\alpha\omega\overline{(a-\omega)}}{2}} \\ &= \overline{k_a(\omega)}K_{(a-\omega)}(\omega) = \overline{k_a(\omega)}K_{\varphi_{a(\omega)}}(\omega) \end{aligned}$$

第一个等式证明完毕。

因为

$$U_aK_\omega = \overline{k_a(\omega)}K_{\varphi_a}(\omega),$$

由正规化再生核的定义有

$$U_ak_\omega \mathrm{e}^{\frac{\alpha|\omega|^2}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{\alpha a\bar{\omega}}{2}-\frac{\alpha|a|^2}{4}}k_{\varphi_{a(\omega)}}\mathrm{e}^{\frac{|a-\omega|^2}{4}},$$

化简得

$$U_ak_\omega = \mathrm{e}^{\frac{\alpha a\bar{\omega}}{2}-\frac{\alpha|a|^2}{4}-\frac{\alpha|\omega|^2}{4}+\frac{|a-\omega|^2}{4}} = \beta k_{\varphi_{a(\omega)}},$$

其中

$$\beta = \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}(a\bar{\omega}-\bar{a}\omega)},$$

第二个式子证明完毕。

通过 Berezin 变换的定义和 S_a 的定义，以及前面已经证明的第二个等式，有

$$\begin{aligned} \tilde{S}_a(\omega) &= \langle S_ak_\omega, k_\omega\rangle = \langle U_aSU_ak_\omega, k_\omega\rangle = \langle SU_ak_\omega, U_ak_\omega\rangle \\ &= \langle \beta Sk_{\varphi_a}(\omega), \beta k_{\varphi_a}(\omega)\rangle = |\beta|^2\langle Sk_{\varphi_a}(\omega), k_{\varphi_a}(\omega)\rangle \\ &= \tilde{S}(\varphi_a(\omega)) \end{aligned}$$

第三个等式证明完成。

引理 6. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子，设常数 $p>2$ 和 $C>0$，使得对所有的 $z\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\|S_z1\|_p\le C$，则当 $\omega\to\infty$ 时，$\tilde{S}(\omega)\to 0$ 当且仅当对于每一个(或者一些) $2<p'<p$，有 $\|S_\omega 1\|_{p'}\to 0,(\omega\to\infty)$。

证明：如果对于某些 $p'\in(2,p)$，有 $\|S_\omega 1\|_{p'}\to 0(\omega\to\infty)$，应用 Hölder's 不等式，当 $\omega\to\infty$ 时，

$$\left|\tilde{S}(\omega)\right| = \langle S_\omega 1,1\rangle \le \|S_\omega 1\|_{p'} \to 0,$$

反之，假设当 $\omega\to\infty$ 时，$\tilde{S}(\omega)\to 0$，并固定 $p'\in(2,p)$。接下来证明当 $\omega\to\infty$ 时，$\|S_\omega 1\|_{p'}\to 0$。$\forall a,z\in\mathbb{C}^n$，我们有

$$\tilde{S}(\varphi_z(a)) = \tilde{S}_z(a) = \langle S_zk_a, k_a\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\langle S_zK_a, K_a\rangle,$$

其中

$$K_a(u) = \mathrm{e}^{\frac{\alpha u\bar{a}}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{2^k k!}u^k\bar{a}^k,$$

将上式带入有

$$\tilde{S}(\varphi_z(a)) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{\alpha^{k+j}}{2^{k+j}k!j!}\langle S_zu^k, u^j\rangle a^j\bar{a}^k,$$

对于任意的的正数 r，我们考虑积分

$$\begin{aligned}I_r(z) &= \int_{|u|<r} \tilde{S}(\varphi_z(u))\bar{u}^n e^{\alpha|u|^2} dm_{2n}(u) \\ &= \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+j}}{2^{k+j}k!j!}\langle S_z u^k, u^j\rangle \int_{|v|<r} \bar{v}^{k+n} v^j dm_{2n}(v) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+n}}{2^{2k+n}k!(k+n)!}\langle S_z u^k, u^{k+n}\rangle \int_{|v|<r} |v|^{2(k+n)} dm_{2n}(v) \\ &= (2\pi)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+n}}{2^{2k+n}k!(k+n+1)!}\langle S_z u^k, u^{k+n}\rangle r^{2(k+n+1)} \\ &= (2\pi)^n r^{2(n+1)}\left[\frac{\alpha^n}{(n+1)!}\langle S_z 1, u^n\rangle + \Sigma_{r,n}(z)\right]\end{aligned}$$

其中

$$\Sigma_{r,n}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+n}}{2^{2k+n}k!(k+n+1)!}\langle S_z u^k, u^{k+n}\rangle r^{2k} 。$$

对于任意的 $u \in \mathbb{C}^n$，当 $z \to \infty$ 时，有 $\tilde{S}(\varphi_z(u)) \to 0$。则对任意 $r > 0$ 都有

$$\lim_{z\to\infty} I_r(z) = \lim_{z\to\infty} \int_{|u|<r} \tilde{S}(\varphi_z(u))\bar{u}^n e^{\alpha|u|^2} dm_{2n}(u) = 0,$$

进一步，对任意的 $r > 0$ 有

$$\lim_{z\to\infty}\left[\frac{\alpha^n}{(n+1)!}\langle S_z 1, u^n\rangle + \Sigma_{r,n}(z)\right] = 0,$$

因此，当 $z \in \mathbb{C}^n$ 存在一个与 z 有关的常数 C，使得 $\|S_z\| \le C$，对任意的 $n \ge 0, z \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$\begin{aligned}|\Sigma_{r,n}(z)| &= C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+n}\|u^k\|\|u^{k+n}\|}{2^{2k+n}k!(k+n+1)!} r^{2k} \\ &= C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+n}}{2^{2k+n}k!(k+n+1)!}\sqrt{\frac{2^{2k+n}k!(k+n)!}{\alpha^{2k+n}}} r^{2k} \\ &\le C\alpha^{\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha r^2)^k}{k!} = C\alpha^{\frac{n}{2}}\left[e^{\alpha r^2} - 1\right]\end{aligned}$$

则给定任意的 $\varepsilon > 0$ 和一个充分小的 $r > 0$ 就有

$$C\alpha^{\frac{n}{2}}\left[e^{\alpha r^2} - 1\right] < \varepsilon 。$$

进一步得

$$\limsup_{z\to\infty}|\langle S_z 1, u^n\rangle| \le \frac{(n+1)!}{\alpha^n}\varepsilon 。$$

对任意的 $n \ge 0$ 有

$$\lim_{z\to\infty}\langle S_z 1, u^n\rangle = 0 。$$

由于 F_α^2 中的多项式是稠密的，则当 $z \to \infty$ 时 $S_z 1 \to 0$。特别是，对于每一个 $\omega \in \mathbb{C}^n$，当 $z \to \infty$ 时，

$S_z 1(\omega) \to 0$

令 $s=\frac{p}{p'}>1$，存在 $t>1$ 使得 $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1$。任意的可测集 E 有

$$\int_E \left|S_z 1(\omega)\right|^{p'} \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega) \le \left[\int_E \left|S_z 1(\omega)\right|^{p'} \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\right]^{\frac{1}{s}} \left[\int_E \mathrm{d}\lambda(\omega)\right]^{\frac{1}{t}} \le \left\|S_z 1\right\|_p^{p'} \left[\lambda_\alpha(E)\right]^{\frac{1}{t}}$$

由于所有 $z \in \mathbb{C}^n$ 有 $\left\|S_z 1\right\|_p \le C$，这表明 $\left\{\left|S_z 1\right|^{p'} : z \in \mathbb{C}^n\right\}$ 是一致可积的。根据 Vitali's 定理有

$$\lim_{z\to\infty} \int_E \left|S_z 1(\omega)\right|^{p'} \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega) = 0。$$

引理的证明完毕。

3. 主要结果及其证明

定理 7. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子。如果存在常数 $p>2$ 和 $C>0$，使得对于任意的 $z \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\left\|S_z 1\right\|_p \le C$，则 S 在 F_α^2 上有界，且有 $\|S\| \le \frac{2pC}{p-2}$。

证明：由引理 4，定义的积分算子 T 在 $L^2\left(\mathbb{C}^n, \mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上有界。又由引理 3 中存在的常数 C 和 $\sigma=\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha(p-2)}{2p}$，对于 $z \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$\begin{aligned}
\left|Tf(z)\right| &\le C\int_{\mathbb{C}^n} \left|f(\omega)\right| \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2} \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega) \\
&= \frac{\alpha C}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{C}^n} \left|f(\omega)\right| \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2-\frac{\alpha}{2}|\omega|^2} \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)
\end{aligned}$$

进一步有

$$F(z) \le C_1 \int_{\mathbb{C}^n} \left|f(\omega)\right| \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2} \mathrm{d}A(\omega) \tag{2}$$

其中 $C_1=\frac{C\alpha}{(2\pi)^n}$ 和 $F(z)=\left|Tf(z)\right| \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|z|^2}$，对(2)两边平方再应用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
F(z)^2 &\le C_1^2 \int_{\mathbb{C}^n} \left|f(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2}\right|^2 \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2} \mathrm{d}A(\omega) \int_{\mathbb{C}^n} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2} \mathrm{d}A(\omega) \\
&= C_2 \int_{\mathbb{C}^n} \left|f(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2}\right|^2 \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2} \mathrm{d}A(\omega)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_2 &= C_1^2 \int_{\mathbb{C}^n} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}|u|^2} \mathrm{d}A(u) \\
&= C_1^2 \cdot \frac{(2\pi)^n}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{C}^n} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}|u|^2} \mathrm{d}A(u) \\
&= \frac{C_1^2 (2\pi)^n}{\sigma}
\end{aligned}$$

再由 Fubini's 定理和变量变换可以得到

$$\int_{\mathbb{C}^n}\left|Tf(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|z|^2}\right|^2\mathrm{d}A(z)\le C_3\int_{\mathbb{C}^n}\left|f(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2}\right|^2\mathrm{d}A(\omega),$$

其中

$$C_3=C_2\int_{\mathbb{C}^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}|u|^2}\mathrm{d}A(u)=\frac{C_2(2\pi)^n}{\sigma}=\left(\frac{2pC}{p-2}\right)^2。$$

这表明算子 T 在 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上是有界的，并且

$$\|T\|\le\frac{2p}{p-2}C。$$

将 T 限制在 F_α^2 空间上，所以 S 是有界算子。

注记：上面的证明仅取决于引理 3 中的点态估计给出的上界，不是关于范数 $\|S_z1\|_p$ 的全部上界的结果。

下面，我们给出了 F_α^2 上算子是紧算子的两个充分条件。

定理 8. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子，且 $p>2$。如果当 $z\to\infty$ 时，都有 $\|S_z1\|_p\to0$，则 S 是 F_α^2 上的紧算子。

证明：由假设条件：当 $z\to\infty$ 时，都有 $\|S_z1\|_p\to0$，则 $\|S_z1\|_p$ 是有界的。由定理 7，S 在 F_α^2 上有界。又由引理 4，积分算子 T 在 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上是紧算子。

则对于任何 $r>0$，定义在 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上的算子 T_r 如下：

$$\begin{aligned}T_rf(z)&=\int_{|\omega|<r}f(\omega)\langle SK_\omega,K_z\rangle\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\\&=\int_{\mathbb{C}^n}f(\omega)\chi_r(\omega)\langle SK_\omega,K_z\rangle\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\end{aligned}$$

其中 χ_r 是空间 $\left\{\omega\in\mathbb{C}^n:|\omega|<r\right\}$ 的特征函数。由引理 3 得到

$$\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{C}^n}\left|\chi_r(\omega)\langle SK_\omega,K_z\rangle\right|^2\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)<\infty。$$

因此，每个算子 T_r 是 Hilbert-Schmidt。特别地，每个 T_r 都是空间 $L^2\left(\mathbb{C}^n,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)$ 上的紧算子。事实上，令 $D_r=T-T_r$，则

$$\begin{aligned}D_rf(z)&=\int_{|\omega|<r}f(\omega)\left(1-\chi_r(\omega)\right)\langle SK_\omega,K_z\rangle\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\\&=\int_{|\omega|>r}f(\omega)\langle SK_\omega,K_z\rangle\mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\end{aligned}$$

于是，当 $r\to\infty$ 时，有 $\|D_r\|\to0$。即 T 是紧算子。

给定任何 $\varepsilon>0$，选定一个正数 R，使得对任意 $|\omega|>R$，都有 $\|S_\omega1\|_p<\varepsilon$。根据引理 3，对任意的 $r>R$ 都有

$$\left|1-\chi_r(\omega)\right|\left|\langle SK_\omega,K_z\rangle\right|\le\varepsilon\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2},\quad z,\omega\in\mathbb{C}^n。$$

我们只考虑 $|\omega|\le r$ 和 $|\omega|>r$ 这两种情况。从定理 7 的证明可以看出，给定一个不依赖于 ε 和 r 的正数 C，使得对于任意的 $r>R$ 都有 $\|D_r\|\le C\varepsilon$。这表明当 $r\to\infty$ 时，有 $\|D_r\|\to0$。

回顾 S_z 和 U_z 的定义：

$$S_z1=U_zSU_z1=U_zSk_z,\ z\in\mathbb{C}^n$$

因为每个 U_z 都是 F_α^2 上的单位算子，所以条件 $\|S_z1\|\le C$ 和 $\|Sk_z\|\le C$ 是等价的。但是，当 $p\ne2$ 时，U_z

在 $L^2(\mathbb{C}^n, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 上不一定恒为单位算子。因此，我们很自然地考虑了条件 $\|Sk_z\|_p \le C$。

定理 9. 设 S 是 F_α^2 上的线性算子，$p>2$，若存在正常数 C，使得对于任意的 $z\in\mathbb{C}^n$，都有 $\|Sk_z\|_p \le C$ 和 $\|S^*k_z\|_p \le C$。则 S 是 F_α^2 上的 Hilbert-Schmidt。特别地，S 是紧算子。

证明。通过引理 1，假设存在一个正常数 C，使得

$$\left|Sk_\omega(\omega)\right| \le C\mathrm{e}^{\frac{\beta}{4}|z|^2},\quad z,\omega\in\mathbb{C}^n,$$

其中 $\beta=\dfrac{2\alpha}{p}<\alpha$。因为 $Sk_\omega(z)\le \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2}\langle SK_\omega, K_z\rangle$，进一步有

$$\left|\langle SK_\omega, K_z\rangle\right| \le C\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{4}|\omega|^2+\frac{\beta}{4}|z|^2},\quad z,\omega\in\mathbb{C}^n \tag{3}$$

因为 $S^*k_z=\overline{Sk_z}$，则对于 $\|S^*k_z\|_p$ 同样有

$$\left|\langle SK_\omega, K_z\rangle\right| \le C\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}|z|^2+\frac{\beta}{4}|\omega|^2},\quad z,\omega\in\mathbb{C}^n \tag{4}$$

将不等式(3)和(4)相乘有

$$\left|\langle SK_\omega, K_z\rangle\right|^2 \le C^2\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)+\frac{\beta}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)} = C^2\mathrm{e}^{\frac{\alpha+\beta}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)},\quad z,\omega\in\mathbb{C}^n$$

两边开方得

$$\left|\langle SK_\omega, K_z\rangle\right| \le C\mathrm{e}^{\frac{\delta}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)},\quad z,\omega\in\mathbb{C}^n,$$

其中 $\delta=\dfrac{\alpha+\beta}{4}<\dfrac{\alpha}{4}$。又因为有

$$\left|\langle SK_\omega, K_z\rangle\right| \le \|S_\omega 1\|_p\,\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{4}\left(|z|^2+|\omega|^2\right)-\frac{\sigma}{2}|z-\omega|^2},$$

因此

$$\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{C}^n}\left|\langle SK_\omega, K_z\rangle\right|^2 \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)\mathrm{d}\lambda_\alpha(z)<\infty。$$

于是积分算子 T，即

$$Tf(z)=\int_{\mathbb{C}^n} f(\omega)\langle SK_\omega, K_z\rangle \mathrm{d}\lambda_\alpha(\omega)$$

是 $L^2(\mathbb{C}^n, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ 上的 Hilbert-Schmidt。因为 S 是 T 在 F_α^2 的限制，所以 S 也是 F_α^2 上的 Hilbert-Schmidt。

Toeplitz 算子的相关应用，在文献[2]中已经给出了复平面 C 上的结果。在空间 $\mathbb{C}^n$ 的应用可以 类似得到同样的结果。有关算子的有界性或紧性的更多研究参看文献[3]-[9]。

基金项目

国家自然科学基金(11861024，11561012)。

参考文献

[1] Zhu, K.H. (2012) Analysis on Fock Spaces. Springer Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8801-0

[2] Wang, X.F., Cao, G.F. and Zhu, K.H. (2013) Boundedness and Compactness of Operators on the Fock Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **77**, 355-370. https://doi.org/10.1007/s00020-013-2066-0

[3] Axler, S. and Zheng, D.C. (1998) Compact Operators via Berezin Tranforms. *Indiana Univ. Math. J.*, **47**, 387-400.

https://doi.org/10.1512/iumj.1998.47.1407

[4] Coburn, L.A., Isralowitz, J. and Li, B. (2011) Toeplitz Operators with BMO Symbols on the Segal-Bargmann Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, **363**, 3015-3030. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05278-5

[5] Dieudonne, A. and Tchoundja, E. (2010) Toeplitz Operators with L^1 Symbols on Bergman Spaces in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, **2**, 65-88. https://doi.org/10.1515/apam.2010.027

[6] Miao, J. and Zheng, D.C. (2004) Compact Operators on Bergman Spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, **48**, 61-79. https://doi.org/10.1007/s00020-002-1176-x

[7] Zhu, K.H. (1990) Operator Theory in Function Spaces.

[8] Zhu, K.H. (2005) Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. Springer Verlag, New York.

[9] Zorboska, N. (2003) Toeplitz Operators with BMO Symbols and the Berezin Transform. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **46**, 2926-2945. https://doi.org/10.1155/S0161171203212035