Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 647-653
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114078

Hans汉斯

强泛Gorenstein FC-投射模

袁　倩[*]，张文汇[#]

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: queenayq@yeah.net, [#]zhangwh@nwnu.edu.cn

收稿日期：2021年3月19日；录用日期：2021年4月21日；发布日期：2021年4月30日

摘　要

引入弱Gorenstein FC-投射模和强泛Gorenstein FC-投射模，讨论了这两类模的同调性质，证明了在右余凝聚环R上，若r.FC.gl.dim(R)<∞，则FC-投射模类、Gorenstein FC-投射模类、弱Gorenstein FC-投射模类、强Gorenstein FC-投射模类和强泛Gorenstein FC-投射模类是同一个类。

关键词

弱Gorenstein FC-投射模，Gorenstein FC-半单环，强泛Gorenstein FC-投射模

Strongly Universal Gorenstein FC-Projective Modules

Qian Yuan[*], Wenhui Zhang[#]

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: queenayq@yeah.net, [#]zhangwh@nwnu.edu.cn

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 21st, 2021; published: Apr. 30th, 2021

Abstract

Weak Gorenstein FC-projective and Strongly universal Gorenstein FC-projective modules are introduced, the homological properties of the two types of modules are investigated. It is proved that on the right cocoherent ring R, if r.FC.gl.dim(R)<∞, then the class of FC-projective modules, the class of Gorenstein FC-projective modules, the class of weak Gorenstein FC-projective modules, the class of strongly Gorenstein FC-projective modules and the class of strongly universal Gorenstein FC-projective modules are the same class.

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 袁倩, 张文汇. 强泛 Gorenstein FC-投射模[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 647-653.
DOI: 10.12677/pm.2021.114078

Keywords

Weak Gorenstein FC-Projective Module, Gorenstein FC-Semisimple Ring, Strongly Universal Gorenstein FC-Projective Module

1. 引言

1995 年，Enochs 等人在一般环上引入 Gorenstein 投(内)射模的概念[1]。称投射右 R-模的正合列 $\mathbf{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots$ 是完全投射分解，如果对任意投射右 R-模 Q，序列 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},Q)$ 正合。称右 R-模 M 是 Gorenstein 投射模，如果存在一个完全投射分解 $\mathbf{P}$ 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P_{-1}\to P_{-2})$。Gorenstein 内射模的定义可对偶给出。2007 年，Bennis 等人引入强 Gorenstein 投(内)射模的概念，证明了一个模是 Gorenstein 投(内)射模当且仅当它是一个强 Gorenstein 投(内)射模的直和项[2]。称投射右 R-模的正合列 $\mathbf{P}=\cdots\to P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\to\cdots$ 是强完全投射分解，如果对任意投射右 R-模 Q，序列 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},Q)$ 正合。称右 R-模 M 是强 Gorenstein 投射模，如果存在一个强完全投射分解 $\mathbf{P}$ 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(f)$。强 Gorenstein 内射模的定义可对偶给出。2013 年，高增辉引入弱 Gorenstein 投(内)射模的概念[3]。称右 R-模 M 是弱 Gorenstein 投射模，如果存在投射右 R-模的正合列 $\mathbf{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$。此时，称序列 $\mathbf{P}$ 是 M 的弱完全投射分解。弱 Gorenstein 内射模的定义可对偶给出。2014 年，陈文静等人引入弱 Gorenstein FP-内射模和强泛 Gorenstein FP-内射模的概念，讨论了凝聚环上 FP-内射模类、Gorenstein FP-内射模类和弱 Gorenstein FP-内射模类三者之间的联系([4] [5])。2020 年，王玉等人引入 Gorenstein FC-投射模的概念，证明了 Gorenstein FC-投射模和 FC-投射模的等价性，并利用 Gorenstein FC-投射模对右 Gorenstein FC-半单环进行了刻画[6]。

受以上文献的启发，我们引入弱 Gorenstein FC-投射模和强泛 Gorenstein FC-投射模的概念，讨论其同调性质，并研究了在右余凝聚环上这两类模的等价刻画。

本文中所提到的环均指有单位元的结合环。模均指酉模，除非特别说明，R-模指右 R-模。本文中，我们用 $P(R)$ (FC-$P(R)$，GFC-$P(R)$，SGFC-$P(R)$，wG-$P(R)$)表示投射 R-模类(FC-投射 R-模类，Gorenstein FC-投射 R-模类，强 Gorenstein FC-投射 R-模类，弱 Gorenstein 投射 R-模类)；用 $I(R)$ (G-$I(R)$，SG-$I(R)$，SUG-$I(R)$，wG-$I(R)$)表示内射 R-模类(Gorenstein 内射 R-模类，强 Gorenstein 内射 R-模类，强泛 Gorenstein 内射 R-模类，弱 Gorenstein 内射 R-模类)；用 FC-pd(M) 表示 R-模 M 的 FC-投射维数。$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{N}$ 表示自然数集。未交待的概念和符号，参考文献[6]。

2. 弱 Gorenstein FC-投射模

称右 R-模 M 是 FC-投射模，如果对任意有限余表示模 Q，$\mathrm{Ext}_R^1(M,Q)=0$ [6]。称右 R-模 M 是 Gorenstein FC-投射模，如果存在 FC-投射右 R-模的正合列 $\mathbf{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，并且对任意内射维数有限的有限余表示模 Q，序列 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P},Q)$ 正合[6]。

本部分我们引入弱 Gorenstein FC-投射模，将弱 Gorenstein FC-投射 R-模类记为 wGFC-$P(R)$，讨论其同调性质以及在右余凝聚环上，FC-$P(R)$、GFC-$P(R)$ 和 wGFC-$P(R)$ 三者之间的联系。

定义 2.1 称 R-模 M 是弱 Gorenstein FC-投射模，如果存在正合列

$$\mathbf{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots,$$

其中 $P_i,P^i\in\text{FC-}P(R)(i\in\mathbb{Z})$，使得 $M\cong\operatorname{Ker}\left(P^0\to P^1\right)$。此时，称正合列 $\mathbf{P}$ 是 M 的弱完全 FC-投射分解。

关于定义，我们注意到

注记 2.2 1) $\text{FC-}P(R)\subseteq\text{SGFC-}P(R)\subseteq\text{GFC-}P(R)\subseteq w\text{GFC-}P(R)$；

2) $w\text{G-}P(R)\subseteq w\text{GFC-}P(R)$；

3) 由对称性可知，定义 2.1 中的正合列 $\mathbf{P}$ 中所有同态的像、核和余核都是弱 Gorenstein FC-投射 R-模；

4) 由文献([6]，命题 2.2)可知，$w\text{GFC-}P(R)$ 关于直和封闭。

下面首先给出弱 Gorenstein FC-投射模的一些等价刻画。

命题 2.3 设 M 是一 R-模，则以下等价：

1) $M\in w\text{GFC-}P(R)$；

2) 存在正合列 $0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中 $P^i\in\text{FC-}P(R)(i\in\mathbb{N})$；

3) 存在正合列 $0\to M\to P\to N\to 0$，其中 $P\in\text{FC-}P(R)$，$N\in w\text{GFC-}P(R)$。

证明 1) $\Rightarrow$ 2)，1) $\Rightarrow$ 3)由定义 2.1 易得。

3) $\Rightarrow$ 2)因为 $N\in w\text{GFC-}P(R)$，所以存在 N 的弱完全 FC-投射分解

$$\mathbf{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots,$$

其中 $P_i,P^i\in\text{FC-}P(R)(i\in\mathbb{Z})$，使得 $N\cong\operatorname{Ker}\left(P^0\to P^1\right)$，故存在正合列 $0\to M\to P\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中 P 和

$$P^i\in\text{FC-}P(R)(i\in\mathbb{N})。$$

2) $\Rightarrow$ 1) 任取 M 的一个投射分解 $\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$，与条件中序列首尾相接就得到 M 的弱完全 FC-投射分解

$$\mathbf{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\operatorname{Ker}\left(P^0\to P^1\right)$，故 $M\in w\text{GFC-}P(R)$。

称环 R 是右 n-余凝聚环，如果每个 n-余表示模是$(n+1)$-余表示的。特别地，右 1-余凝聚环也称为右余凝聚环[6]。

命题 2.4 设 R 是右余凝聚环，$0\to N\to M\to P\to 0$ 是 R-模的正合列，其中 $P\in\text{FC-}P(R)$。若 $N\in w\text{GFC-}P(R)$，则 $M\in w\text{GFC-}P(R)$。

证明 设 $N\in w\text{GFC-}P(R)$，则由命题 2.3 可知存在正合列 $0\to N\to P^0\to K\to 0$，其中 $P^0\in\text{FC-}P(R)$，$K\in w\text{GFC-}P(R)$。考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & Q^0 \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] & 0 \\
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为 $P^0, P \in \text{FC-}P(R)$，所以由文献([6]，定理 2.5)可知 $Q^0 \in \text{FC-}P(R)$，则对中间列用命题 2.3 可得 $M \in w\text{GFC-}P(R)$。

称环 R 是右 Gorenstein FC-半单环(简称为 rGF-半单环)，如果每个 R-模是 Gorenstein FC-投射 R-模 [6]。下面用弱 Gorenstein FC-模给出 rGF-半单环的等价刻画。

命题 2.5 设 R 是环，M 是一 R-模，则以下等价：

1) R 是 rGF-半单环；

2) $M \in w\text{GFC-}P(R)$；

3) 若 $M \in w\text{G-}I(R)$，则 $M \in w\text{GFC-}P(R)$；

4) 若 $M \in \text{G-}I(R)$，则 $M \in w\text{GFC-}P(R)$；

5) 若 $M \in \text{SG-}I(R)$，则 $M \in w\text{GFC-}P(R)$；

6) 若 $M \in I(R)$，则 $M \in w\text{GFC-}P(R)$。

证明 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6)显然。

6) $\Rightarrow$ 1) 设 $M \in I(R)$，则由条件可知 $M \in w\text{GFC-}P(R)$，于是由命题 2.3 可知存在正合列 $0 \to M \to P \to N \to 0$，其中 $P \in \text{FC-}P(R)$，$N \in w\text{GFC-}P(R)$。因为 $M \in I(R)$，所以正合列 $0 \to M \to P \to N \to 0$ 可裂，故由文献([6]，命题 2.2)可知 $M \in \text{FC-}P(R)$，于是由文献([6]，命题 6.3)可知 R 是 rGF-半单环。

称 R-模类 $X(R)$ 是投射可解类，如果 $P(R) \subseteq X(R)$，且对任意 $X(R)$ 中的正合列 $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$，其中 $X'' \in X(R)$，则 $X' \in X(R) \Leftrightarrow X \in X(R)$ [7]。下面我们证明 $w\text{GFC-}P(R)$ 是投射可解类，并且关于直和项封闭。

命题 2.6 设 R 是右余凝聚环，则 $w\text{GFC-}P(R)$ 关于扩张封闭当且仅当 $w\text{GFC-}P(R)$ 是投射可解类。

证明 $\Leftarrow$) 显然。

$\Rightarrow$) 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是 R-模的正合列，只需证当 $B, C \in w\text{GFC-}P(R)$ 时，$A \in w\text{GFC-}P(R)$ 即可。因为 $B \in w\text{GFC-}P(R)$，所以由命题 2.3 可知存在正合列 $0 \to B \to P \to N \to 0$，其中 $P \in \text{FC-}P(R)$，$N \in w\text{GFC-}P(R)$。考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $C, N \in w\text{GFC-}P(R)$，所以 $Q \in w\text{GFC-}P(R)$。对中间行用命题 2.3 可得 $A \in w\text{GFC-}P(R)$。

推论 2.7 设 R 是右余凝聚环，若 $w\text{GFC-}P(R)$ 关于扩张封闭，则 $w\text{GFC-}P(R)$ 关于直和项封闭。

证明 由文献([7]，命题 1.4)易得。

推论 2.8 设 R 是右余凝聚环，M 是一 R-模，考虑下面 R-模的正合列

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$$

和

$$0 \to H_n \to H_{n-1} \to \cdots \to H_0 \to M \to 0,$$

其中 $G_0,\cdots,G_{n-1} \in w\text{GFC-}P(R)$ 和 $H_0,\cdots,H_{n-1} \in w\text{GFC-}P(R)$。若 $w\text{GFC-}P(R)$ 关于扩张封闭，则 $G_n \in w\text{GFC-}P(R)$ 当且仅当 $H_n \in w\text{GFC-}P(R)$。

证明 类似于文献([8]，引理 2.1])的证明。

下面我们讨论弱 Gorenstein FC-投射 R-模与强 Gorenstein FC-投射 R-模的关系。

命题 2.9 设 R 是右余凝聚环，$M \in w\text{GFC-}P(R)$，若 $N \in \text{SGFC-}P(R)$，则 M 是 N 的直和项。

证明 设 $M \in w\text{GFC-}P(R)$，则存在正合列

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \cdots,$$

其中 $P_i \in \text{FC-}P(R)(i \in \mathbb{Z})$，使得 $M \cong \text{Im}(d_0)$。令 $Q = \oplus_{i=-\infty}^{\infty} P_i$，$f: Q \to Q$，其中对任意的 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Q$，$f\left((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) = \left(d_i(x_i)\right)_{i\in\mathbb{Z}}$。易证 f 是右 R-模同态且 $f^2 = 0$。设 $N = \text{Im}(f) = \oplus_{i=-\infty}^{\infty} \text{Im}(d_i)$，则 $N \subseteq \text{Ker}(f)$。对任意 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \text{Ker}(f)$，$f\left((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) = \left(d_i(x_i)\right)_{i\in\mathbb{Z}} = (0_i)_{i\in\mathbb{Z}}$。则对任意 $i \in \mathbb{Z}$，$d_i(x_i) = 0_i$，即 $x_i \in \text{Ker}(d_i) = \text{Im}(d_{i+1})$ ($i \in \mathbb{Z}$)，故存在 $y_{i+1} \in P_{i+1}$，使得 $d_{i+1}(y_{i+1}) = x_i$。令 $y = [y_{i+1}]$，则 $[x_i] = [d_{i+1}(y_{i+1})] = f(y)$，于是 $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Im}(f)$。因此 $N = \text{Im}(f) = Ker(f)$，由文献([6]，命题 2.2)可知 $Q \in \text{FC-}P(R)$。于是存在 R-模的正合列 $0 \to N \to Q \to N \to 0$，由文献([9]，定理 7)可知 $N \in \text{SGFC-}P(R)$ 且 $N \cong \left(\oplus_{i\neq 0} \text{Im}(d_i)\right) \oplus M$，即 M 是强 Gorenstein FC-投射 R-模的直和项，定理得证。

推论 2.10 设 R 是右余凝聚环，$M \in \text{GFC-}P(R)$，若 $N \in \text{SGFC-}P(R)$，则 M 是 N 的直和项。

定义环 R 的右 FC-投射整体维数为 $\text{r.FC.gl.dim}(R) = \sup\{\text{FC-pd}(M) \mid M是R\text{-}模\}$ [4]。

显然，$\text{FC-}P(R) \subseteq \text{GFC-}P(R) \subseteq w\text{GFC-}P(R)$，由文献([6]，推论 3.9)可知，当 R 是右余凝聚环且 $\text{r.FC.gl.dim}(R) < \infty$ 时，$\text{GFC-}P(R) \subseteq \text{FC-}P(R)$。又由文献([6]，定理 3.4)可知，当 R 是右余凝聚环时，R-模 $M \in \text{GFC-}P(R) \Leftrightarrow M \in w\text{GFC-}P(R)$。于是我们有以下结论。

推论 2.11 设 R 是右余凝聚环，M 是一 R-模，若 $\text{r.FC.gl.dim}(R) < \infty$，则 $M \in \text{FC-}P(R) \Leftrightarrow M \in w\text{GFC-}P(R)$。

3. 强泛 Gorenstein FC-投射模

本部分我们引入强泛 Gorenstein FC-投射模，将强泛 Gorenstein FC-投射 R-模类记为 $\text{SUGFC-}P(R)$，讨论其同调性质以及在右余凝聚环上，$\text{FC-}P(R)$、$\text{GFC-}P(R)$、$w\text{GFC-}P(R)$、$\text{SGFC-}P(R)$ 和 $\text{SUGFC-}P(R)$ 类五者之间的联系。

定义 3.1 称 R-模 M 是强泛 Gorenstein FC-投射模，如果存在正合列

$$\mathbf{P} = \cdots \to P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \to \cdots,$$

其中 $P \in \text{FC-}P(R)$，使得 $M \cong \text{Ker}(f)$。此时，称正合列 $\mathbf{P}$ 是 M 的强泛完全 FC-投射分解。

注记 3.2 1) 由注记 2.2 有包含关系：

$$\text{FC-}P(R) \subseteq \text{SGFC-}P(R) \subseteq \text{SUGFC-}P(R) \subseteq w\text{GFC-}P(R);$$

2) 由对称性可知，定义 3.1 中的正合列 $\mathbf{P}$ 中所有同态的像、核和余核都是强泛 Gorenstein FC-投射 R-模；

3) $\text{SUGFC-}P(R)$ 关于直和封闭；

命题 3.3 设 M 是一 R-模，则以下等价：

1) $M\in\text{SUGFC-}P(R)$；

2) 存在正合列 $0\to M\to P\to P\to\cdots$，其中 $P\in\text{FC-}P(R)$；

3) 存在正合列 $0\to M\to P\to M\to 0$，其中 $P\in\text{FC-}P(R)$；

证明 由定义 3.1 易得。

称环 R 是右强 Gorenstein FC-半单环(简称为 rSGF-半单环)，如果每个 R-模是强 Gorenstein FC-投射 R-模。下面用强泛 Gorenstein FC-模给出 rSGF-半单环的等价刻画。

命题 3.4 设 R 是环，M 是一 R-模，则以下等价：

1) R 是 rSGF-半单环；

2) $M\in\text{SUGFC-}P(R)$；

3) 若 $M\in\text{SUG-}I(R)$，则 $M\in\text{SUGFC-}P(R)$；

4) 若 $M\in\text{SG-}I(R)$，则 $M\in\text{SUGFC-}P(R)$；

5) 若 $M\in I(R)$，则 $M\in\text{SUGFC-}P(R)$。

证明 类似于命题 2.5 的证明。

命题 3.5 设 $M\in w\text{GFC-}P(R)$，若 $N\in\text{SUGFC-}P(R)$，则 M 是 N 的直和项。

证明 设 $M\in w\text{GFC-}P(R)$，则存在 M 的弱完全 FC-投射分解

$$\mathbf{P}=\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1^P}P_0\xrightarrow{d_0^P}P_{-1}\xrightarrow{d_{-1}^P}P_{-2}\to\cdots,$$

其中 $P_i\in\text{FC-}P(R)(i\in\mathbb{Z})$，使得 $M\cong\text{Im}\left(d_0^P\right)$。对 $\forall m\in\mathbb{Z}$，通过增加指数 m，由正合列 $\mathbf{P}$ 得到的正合列记为 $\Sigma^m\mathbf{P}$，对 $\forall i\in\mathbb{Z}$，$\left(\Sigma^m\mathbf{P}\right)_i=P_{i-m}$ 且 $d_i^{\Sigma^m P}=d_{i-m}^P$。由文献([6]，命题 2.2])可知，$\oplus P_i\in\text{FC-}P(R)$。考虑正合列

$$\mathbf{Q}=\oplus\Sigma^m\mathbf{P}=\cdots\to Q=\oplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i^P}Q=\oplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i^P}Q=\oplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i^P}\cdots,$$

显然 $\text{Im}\left(\oplus d_i^P\right)\in\text{SUGFC-}P(R)$。又 $\text{Im}\left(\oplus d_i^P\right)\cong\oplus\text{Im}\left(d_i^P\right)$，故结论成立。

推论 3.6 设 R 是右余凝聚环，M 是一 R-模，则 $M\in\text{SGFC-}P(R)\Leftrightarrow M\in\text{SUGFC-}P(R)$。

证明 由注记 3.2(1)、命题 3.3 和文献([9]，定理 7]易见。

命题 3.7 设 R 是右余凝聚环，M 是一 R-模，$\text{r.FC.gl.dim}(R)<\infty$，则 $M\in\text{FC-}P(R)\Leftrightarrow M\in\text{SUGFC-}P(R)$。

证明 由注记 3.2(1)和推论 2.11 易见。

定理 3.8 设 R 是右余凝聚环，且 $\text{r.FC.gl.dim}(R)<\infty$，则 $\text{FC-}P(R)$、$\text{GFC-}P(R)$、$w\text{GFC-}P(R)$、$\text{SGFC-}P(R)$ 和 $\text{SUGFC-}P(R)$ 是同一个类。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11861055)。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Bennis, D. and Mahdou, N. (2007) Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**, 437-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.10.010

[3] Gao, Z.H. (2013) Weak Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **12**, 3841-3858. https://doi.org/10.1142/S0219498812501654

[4] 陈文静, 杨晓燕. 弱 Gorenstein FP-内射模[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(4): 477-481.

[5] 陈文静, 杨晓燕. 强和强泛 Gorenstein FP-内射模[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(8): 75-78.

[6] Wang, Y. and Zhou, D. (2020) Gorenstein FC-Projective Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **19**, Article ID: 2050066. https://doi.org/10.1142/S0219498820500668

[7] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[8] Zhu, X.S. (2013) Resolving Resolution Dimensions. *Algebras and Representation Theory*, **16**, 1165-1191. https://doi.org/10.1007/s10468-012-9351-5

[9] 王玉, 周德旭. 关于强 Gorenstein FC-投射模[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2018, 34(5): 12-18.