Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 503-515
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114064

带有非局部效应耦合流体模型的局部经典解

胡　烨，佟丽宁

上海大学理学院数学系，上海
Email: ericahuye@163.com, tongln@shu.edu.cn

收稿日期：2021年3月10日；录用日期：2021年4月12日；发布日期：2021年4月19日

摘　要

本文研究了带有非局部速度趋同效应的耦合模型。该系统通过阻尼项对粒子速度和流体速度进行耦合，描述了群集粒子在粘性不可压流体中的相互作用。本文首先构造逼近方程和逼近解，并应用能量估计的方法，得到逼近解的一致先验估计，然后利用低阶范数收敛，证明具有非局部速度趋同效应的欧拉系统局部解的存在唯一性。

关键词

非局部速度趋同，耦合

The Local Classical Solution of Coupled Fluid Model with Nonlocal Effect

Ye Hu, Lining Tong

Department of Mathematics, School of Science, Shanghai University, Shanghai
Email: ericahuye@163.com, tongln@shu.edu.cn

Received: Mar. 10th, 2021; accepted: Apr. 12th, 2021; published: Apr. 19th, 2021

Abstract

This paper studied a coupling model with non-local velocity alignment. In this system, particle velocity and fluid velocity are coupled by damping term, and the interaction of cluster particles in viscous incompressible fluid is described. We first construct the approximation equation and the approximation solution, and the uniform a priori estimate of the approximation solution is ob-

文章引用: 胡烨, 佟丽宁. 带有非局部效应耦合流体模型的局部经典解[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 503-515.
DOI: 10.12677/pm.2021.114064

tained by using the method of energy coupling estimation, and then the existence and uniqueness of the local solution of the Euler system with non-local velocity convergence effect is proved by using the lower-order norm convergence.

Keywords

Nonlocal Velocity Alignment, Coupling

1. 引言

本文研究如下带有非局部速度趋同效应的耦合流体模型：

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho u)=0\\ \partial_t u+(u\cdot\nabla)u=-K_1\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\big(u(x)-u(y)\big)\rho(y)\mathrm{d}y+K_2(v-u), & (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,+\infty)\\ \partial_t v+v\cdot\nabla v+\nabla p=\mu\Delta v+K_2\rho(u-v), \qquad \nabla\cdot v=0, \end{cases} \tag{1}$$

满足初值条件：

$$\begin{cases}(\rho,u,v)(x,0)=(\rho_0,u_0,v_0) & x\in\mathbb{T}^d,\\ \nabla\cdot v_0=0,\end{cases} \tag{2}$$

其中 d 为空间维数，$\mathbb{T}^d=\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d\ (d\geq 1)$ 是 d 维空间中的周期环形区域，ρ,u,v 分别表示粒子的密度、粒子的速度和不可压流体的速度，$K_i\ (i=1,2)$ 分别表示粒子与粒子，流体与流体相互作用的非负耦合强度常数，速度趋同效应中的通信权重函数 $\Gamma(x-y)\in L^1(\mathbb{T}^d)$ 是一个非常数且非正定矩阵，它反映了系统内部的非局部相互作用。

带有非局部效应的欧拉模型，是反应复杂系统运动的微观粒子模型的宏观表达。此类模型的研究在社会学，经济学和自然科学等不同领域都有重要意义，例如鸟、鱼等小动物的聚集现象，物质的运输或行人的流动，半导体或气体动力学中的带电粒子的运动等。本文研究的这类模型通过阻尼项对粒子速度和流体速度进行耦合，描述了多粒子复杂系统在不压缩流体中的运动状态。

为介绍模型的非局部效应，首先从微观粒子模型出发：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i=v_i\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}F\left(t,x_i-x_j,v_i-v_j\right)+G\left(t,x_i,v_i\right)\end{aligned} \tag{3}$$

其中 (x_i,v_i) 是第 i 个粒子在 d 维空间中的位置和速度，$G(t,x_i,v_i)$ 是第 i 个粒子的自加速度或阻尼力。$\frac{1}{N}F\left(t,x_i-x_j,v_i-v_j\right)$ 是第 i 和第 j 个粒子之间的弱相互作用力，$F\left(t,x_i-x_j,v_i-v_j\right)$ 常见有两种类型，一种是导致个体之间的吸引和排斥现象的相互作用力，例如三维库伦力 $F\left(t,x_i-x_j,v_i-v_j\right)=\frac{x_i-x_j}{\left|x_i-x_j\right|^3}$ ([1])；另一种是导致粒子产生速度趋同效应的速度趋同力，例如在描述小动物聚集现象的 Cucker-Smale 模型中

$F\left(t,x_i-x_j,v_i-v_j\right)=-\left(v_i-v_j\right)\phi\left(\left|x_i-x_j\right|\right)$ ([2])，在速度趋同力的作用下，系统中个体受其他个体的影响调整自己的速度，系统中个体在长时间过程中速度趋于一致。更多带有非局部效应的微观模型可以在[3] [4] [5]中找到。

通过取平均场极限，并对系统的密度分布函数作 Mono-Kinetic 拟设，即设 $f(t,x,v)=\rho(t,x)\delta_{u(t,x)}(v)$，可得到宏观无压欧拉系统：

$$\begin{aligned}&\rho_t+\nabla\cdot(\rho u)=0\\&(\rho u)_t+(\rho u\cdot\nabla)u=\rho\int F\left(t,x-y,u(x)-u(y)\right)\rho(t,y)\mathrm{d}y+\rho G(t,x,u)\end{aligned}\tag{4}$$

其中 ρ 是密度，u 是粒子速度，v 是流体速度。

关于带有非局部效应的无压欧拉系统(1)，陈丽教授和 Göttlich ([6])等人研究了二维空间中复杂材料流动的流体力学模型，在模型中非局部效应满足一定的结构条件，光滑解的局部存在性被得到。Carrillo 和 Choi 等人对一维简化模型($G=-u,\ F=\frac{x-y}{|x-y|}-2(x-y)$)解的长时间渐进行为进行分析，并给出了阻尼抑制激波形成时，初值需要满足的临界条件([7])。当模型(4)中不含阻尼项，但非局部排斥力和速度校准力同时存在时，Kiselev 和 Tan 等人通过一系列的工作([8] [9] [10])证明，如果速度校准效应的积分核非负对称且具有一定光滑性，则模型具有全局光滑解，这意味着速度较准项有助于防止激波的形成。

而对含有压力项的欧拉方程组，Feireisl 等人采用凸积分的方法，证明了一维空间中的 Cauchy 问题存在无穷多的弱解，在这里模型带有阻尼和非局部速度趋同效应[11]。最近，Choi 研究了带有线性压力项和非局部速度较准项的欧拉系统，给出了经典解的全局存在性[12]。进一步的，Carrillo 等人针对含有非局部效应的可压粘性流体力学模型，得到了弱解的全局存在性，并对解的长时间渐进行为进行了分析[13]。

对于本文这类欧拉方程与不可压缩 Navier-Stokes 方程相耦合的流体模型，Ha 和他的合作者们在[14]中研究了经典解的适定性。值得一提的是，在他们的模型中，非局部效应的通讯权重函数满足对称性，正则性，且具有恒正的下界，在得到解的能量估计中起到积极地作用。与之相比，我们模型中的 $\Gamma(x-y)\in L^1\left(\mathbb{T}^d\right)$ 是一个非常数且非正定矩阵，这给解的正则性估计带来了一定的阻碍。

我们的主要结果如下：

定理 1 假设 $s>\frac{d}{2}+1$，初值条件满足 $(\rho_0>0,u_0,v_0)\in H^s\left(\mathbb{T}^d\right)\times H^{s+2}\left(\mathbb{T}^d\right)\times H^{s+1}\left(\mathbb{T}^d\right)$，则系统(1)~(2)存在唯一的局部经典解 (ρ,u,v)，满足如下正则性，

$$(\rho,u,v)\in\mathbf{C}\left([0,T_0];L^2\left(\mathbb{T}^d\right)\right)\times\mathbf{C}\left([0,T_0];H^1\left(\mathbb{T}^d\right)\right)\times\mathbf{C}\left([0,T_0];L^2\left(\mathbb{T}^d\right)\right),$$

其中 T_0 与初值有关。

在本文中，我们用 C 表示与 μ,s,d,K_1,K_2 有关的正常数。对于任何非负整数 s，$H^s\left(\mathbb{T}^d\right)$ 表示 $\mathbb{T}^d$ 上的 s 阶 L^2-Sobolev 空间，为表示简洁，记 $H^s:=H^s\left(\mathbb{T}^d\right)$。我们在第 2 节中构造了逼近解，并在第 3 节得到了逼近解的一致能量估计，进一步的在第 4 节证明了逼近解的柯西收敛性，在第 5 节中完成了定理的证明。

2. 逼近解的构造

在这一节中，我们将应用迭代法构造逼近解：

零阶逼近：

$$\left(\rho^0,u^0,v^0\right)(x,t)=(\rho_0,u_0,v_0).\tag{5}$$

$k+1$阶逼近：假设 k 阶逼近解 $\left(\rho^k,u^k,v^k\right)(x,t),k\ge 1$ 已给出，则定义 $k+1$ 阶逼近解 $\left(\rho^{k+1},u^{k+1},v^{k+1}\right)(x,t)$ 为下列线性系统的解：

$$\partial_t\rho^{k+1}+u^k\cdot\nabla\rho^{k+1}+\rho^{k+1}\nabla\cdot u^k=0 \tag{6}$$

$$\partial_t v^{k+1}+v^k\cdot\nabla v^{k+1}+\nabla p^{k+1}=\mu\Delta v^{k+1}+K_2\rho^{k+1}\left(u^k-v^k\right),\quad \nabla\cdot v^{k+1}=0 \tag{7}$$

$$\partial_t u^{k+1}+u^k\cdot\nabla u^{k+1}=-K_1\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\left(u^k(x)-u^k(y)\right)\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}y+K_2\left(v^{k+1}-u^k\right) \tag{8}$$

$$\left(\rho^{k+1},u^{k+1},v^{k+1}\right)(x,0)=\left(\rho_0,u_0,v_0\right), \tag{9}$$

其中 $\Gamma(x-y)\in L^1\left(\mathbb{T}^d\right)$ 为非常数非正定矩阵。应用文献[15]中的多维双曲型方程的线性理论，可以得到逼近问题(6)~(9)存在局部经典解 $\left(\rho^{k+1},u^{k+1},v^{k+1}\right)$。

3. 一致能量估计

为论文中证明部分的表述方便，定义常量 M

$$M=\sqrt{\left\|\rho_0\right\|_{H^s}^2+\left\|u_0\right\|_{H^{s+2}}^2+\left\|v_0\right\|_{H^{s+1}}^2+\delta}\,, \tag{10}$$

其中 $\delta>0$ 为常数。进一步的，选择常数 $T_0>0$，当 T_0 足够小时，可满足

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{e}^{CMT_0}-1\right)\left\|\rho_0\right\|_{H^s}^2+\left(\mathrm{e}^{C\left(M^2+M\right)T_0}-1\right)\left\|v_0\right\|_{H^{s+1}}^2\\&+\left(e^{C\left(M^2+M\right)T_0}-1\right)\left\|u_0\right\|_{H^{s+1}}^2+\mathrm{e}^{C\left(M^2+M\right)T_0}\left(CM^2+CM\right)T_0\le\delta.\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $C>0$ 是引理 1 证明中出现的常数。

引理 1 假设 $\left(\rho^k,u^k,v^k\right)$ 是由线性迭代方程组(6)~(9)构造的一组逼近解序列，则对任意 $k\ge 0$，如下估计成立：

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|\rho^k\right\|_{H^s}+\left\|u^k\right\|_{H^{s+2}}+\left\|v^k\right\|_{H^{s+1}}\right)\le M. \tag{12}$$

证明我们应用[16]中的方法证明引理 1 中的结论，证明分为如下两步。

Step 1. (初始步骤)：由(5)和(10)易知：

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|u^0\right\|_{H^{s+2}}+\left\|v^0\right\|_{H^{s+1}}\right)\le M. \tag{13}$$

Step 2. (归纳步骤)：假设：

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|u^k\right\|_{H^{s+2}}+\left\|v^k\right\|_{H^{s+1}}\right)\le M, \tag{14}$$

其中：T_0 和 M 是(10)和(11)确定的常数，我们将会证明：

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left(\left\|\rho^{k+1}\right\|_{H^s}+\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}+\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}\right)\le M. \tag{15}$$

Step 2.1. (ρ^{k+1} 的估计)：首先用 ρ^{k+1} 乘以方程(6)两端，并在 $\mathbb{T}^d$ 上关于变量 x 积分，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^2}^2&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}u^k\cdot\nabla\left(\rho^{k+1}\right)^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^k\right)\left|\rho^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^k\right)\left|\rho^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\le C\left\|\nabla u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^2}^2\le CM\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{16}$$

接下来，对任意$1\le r\le s$，关于方程(6)作用算子∇^r，然后两端乘以$\nabla^r\rho^{k+1}$，并在$\mathbb{T}^d$上关于变量x积分，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(u^k\cdot\nabla\rho^{k+1}\right)-u^k\cdot\nabla^{r+1}\rho^{k+1}\right]\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_{\mathbb{T}^d}u^k\cdot\nabla^{r+1}\rho^{k+1}\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(\rho^{k+1}\nabla\cdot u^k\right)-\rho^{k+1}\nabla^r\left(\nabla\cdot u^k\right)\right]\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_{\mathbb{T}^d}\rho^{k+1}\nabla^r\left(\nabla\cdot u^k\right)\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &=\sum_{i=1}^4 I_i.\end{aligned}\tag{17}$$

利用 Hölder 不等式，Moser 不等式，我们可以依次估计$I_i, i=1,2,3,4$，

$$\begin{aligned}I_1 &= -\int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(u^k\cdot\nabla\rho^{k+1}\right)-u^k\cdot\nabla^{r+1}\rho^{k+1}\right]\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &\le\left\|\nabla^r\left(u^k\cdot\nabla\rho^{k+1}\right)-u^k\cdot\nabla^{r+1}\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\\ &\le C\left(\left\|\nabla u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r u^k\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\\ &\le CM\left(\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla\rho^{k+1}\right\|_{H^{s-1}}\right)\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2};\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= -\int_{\mathbb{T}^d}u^k\cdot\nabla^{r+1}\rho^{k+1}\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^k\right)\left|\nabla^r\rho^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\ &\le C\left\|\nabla\cdot u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}^2\le CM\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}^2;\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}I_3 &= -\int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(\rho^{k+1}\nabla\cdot u^k\right)-\rho^{k+1}\nabla^r\left(\nabla\cdot u^k\right)\right]\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &\le\left\|\nabla^r\left(\rho^{k+1}\nabla\cdot u^k\right)-\rho^{k+1}\nabla^r\left(\nabla\cdot u^k\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\\ &\le C\left(\left\|\nabla\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r u^k\right\|_{L^2}+\left\|\nabla u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\\ &\le CM\left(\left\|\nabla\rho^{k+1}\right\|_{H^{s-1}}+\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2};\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}I_4 &= -\int_{\mathbb{T}^d}\rho^{k+1}\nabla^r\left(\nabla\cdot u^k\right)\cdot\nabla^r\rho^{k+1}\mathrm{d}x\\ &\le C\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^{r+1}u^k\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\\ &\le CM\left\|\rho^{k+1}\right\|_{H^s}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{21}$$

在这里，我们用到了 Sobolev 不等式：

$$\left\|\nabla u\right\|_{L^\infty}\le\left\|\nabla u\right\|_{H^{\left[\frac{d}{2}\right]+1}}\le\left\|\nabla u\right\|_{H^{s-1}},\text{对}s>\frac{d}{2}+1.\tag{22}$$

联立$I_i, i=1,2,3,4$，我们可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}^2\le CM\left(\left\|\nabla\rho^{k+1}\right\|_{H^{s-1}}+\left\|\rho^{k+1}\right\|_{H^s}+\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}.\tag{23}$$

对(23)关于r从 1 到s求和，并与(16)相加，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\rho^{k+1}\right\|_{H^s}^2\le CM\left\|\rho^{k+1}\right\|_{H^s}^2.\tag{24}$$

应用 Gronwall 不等式，

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\|\rho^{k+1}\right\|_{H^s}^2 \le \mathrm{e}^{CMT_0}\left\|\rho_0\right\|_{H^s}^2 \le M^2. \tag{25}$$

由(10)和(11)中 M 和 T_0 的选取，可得 ρ^{k+1} 的估计：

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\|\rho^{k+1}\right\|_{H^s} \le M. \tag{26}$$

Step 2.2. (v^{k+1} 的估计)：用 v^{k+1} 乘以方程(7)的两端，并在 $\mathbb{T}^d$ 上关于变量 x 积分，利用 Hölder 不等式，Young's 不等式，Sobolev 不等式，以及 $\nabla\cdot v=0$ ，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla v^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\
&=-\int_{\mathbb{T}^d} v^k\cdot\nabla v^{k+1}\cdot v^{k+1}\mathrm{d}x+K_2\int_{\mathbb{T}^d}\rho^{k+1}v^{k+1}\left(u^k-v^k\right)\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left|v^{k+1}\right|^2\left(\nabla\cdot v^k\right)\mathrm{d}x+K_2\left(\left\|u^k\right\|_{L^\infty}+\left\|v^k\right\|_{L^\infty}\right)\int_{\mathbb{T}^d}\rho^{k+1}v^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\le CM\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\left\|v^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|v^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2.
\end{aligned}\tag{27}$$

对方程(7)作用算子 ∇^r $(1\le r\le s+1)$，然后两端乘以 $\nabla^r v^{k+1}$ ，并在 $\mathbb{T}^d$ 上关于变量 x 积分，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla^{r+1}v^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\
&=-\int_{\mathbb{T}^d}v^k\cdot\nabla^r\left(\nabla v^{k+1}\right)\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(v^k\cdot\nabla v^{k+1}\right)-v^k\cdot\nabla^r\left(\nabla v^{k+1}\right)\right]\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\quad+K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla^r\left(\rho^{k+1}u^k\right)\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x-K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla^r\left(\rho^{k+1}v^k\right)\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^4 J_i.
\end{aligned}\tag{28}$$

接下来我们依次估计 $J_i, i=1,2,3,4$

$$J_1=-\int_{\mathbb{T}^d}v^k\cdot\nabla^r\left(\nabla v^{k+1}\right)\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot v^k\right)\left|\nabla^r v^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x=0; \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
J_2&=-\int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(v^k\cdot\nabla v^{k+1}\right)-v^k\cdot\nabla^r\left(\nabla v^{k+1}\right)\right]\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\le C\left\|\nabla^r\left(v^k\cdot\nabla v^{k+1}\right)-v^k\cdot\nabla^r\left(\nabla v^{k+1}\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\\
&\le C\left(\left\|\nabla v^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla v^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r v^k\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\\
&\le CM\left(\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}^2\right);
\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}
J_3&=K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla^r\left(\rho^{k+1}u^k\right)\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x\le C\left\|\nabla^r\left(\rho^{k+1}u^k\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\\
&\le C\left(\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r u^k\right\|_{L^2}+\left\|u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\\
&\le CM^2\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2;
\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}
J_4&=-K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla^r\left(\rho^{k+1}v^k\right)\cdot\nabla^r v^{k+1}\mathrm{d}x\le C\left\|\nabla^r\left(\rho^{k+1}v^k\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\\
&\le C\left(\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r v^k\right\|_{L^2}+\left\|v^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\\
&\le CM^2\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2.
\end{aligned}\tag{32}$$

在这里用到了 Hölder 不等式，Young's 不等式，Sobolev 不等式，Moser 不等式。将 $J_i, i=1,2,3,4,5$，的估计带入(28)式，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\mu\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla^{r+1}v^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\le\left(CM^2+CM\right)\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}^2+CM^2. \tag{33}$$

对(33)的 r 从 0 到 $s+1$ 求和，并与(27)式联立，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}^2+\mu\sum_{r=0}^{s+1}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla^{r+1}v^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\le\left(CM^2+CM\right)\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}^2+CM^2. \tag{34}$$

对(34)关于时间变量 t 从 0 到 T_0 积分，可以得到

$$\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}^2+\int_0^{T_0}\mu\sum_{r=0}^{s+1}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla^{r+1}v^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\left\|v_0\right\|_{H^{s+1}}^2+\int_0^{T_0}\left(\left(CM^2+CM\right)\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}^2+CM^2\right)\mathrm{d}t, \tag{35}$$

应用 Gronwall 不等式，我们得到

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}^2+\int_0^{T_0}\mu\sum_{r=0}^{s+1}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla^{r+1}v^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\mathrm{e}^{C\left(M^2+M\right)T_0}\left(\left\|v_0\right\|_{H^{s+1}}^2+CM^2T_0\right). \tag{36}$$

由(10)和(11)中 M 和 T_0 的选取，可得 v^{k+1} 的估计：

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\|v^{k+1}\right\|_{H^{s+1}}\le M. \tag{37}$$

Step 2.3. (u^{k+1} 的估计)：用 u^{k+1} 乘以方程(8)的两端，并在 $\mathbb{T}^d$ 上关于变量 x 积分，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}^2&=-\int_{\mathbb{T}^d}u^k\cdot\nabla u^{k+1}\cdot u^{k+1}\mathrm{d}x+K_2\int_{\mathbb{T}^d}u^{k+1}\left(v^{k+1}-u^k\right)\mathrm{d}x\\&\quad-K_1\iint_{\mathbb{T}^{2d}}\Gamma(x-y)\left(u^k(x)-u^k(y)\right)u^{k+1}(x)\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sum_{i=1}^{3}I_i.\end{aligned} \tag{38}$$

应用 Hölder 不等式，Young's 不等式，Sobolev 不等式，以及(26)和(37)，我们估计 $I_i, i=1,2,3$，

$$I_1=-\int_{\mathbb{T}^d}u^k\cdot\nabla u^{k+1}\cdot u^{k+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^k\right)\left|u^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x=0; \tag{39}$$

$$\begin{aligned}I_2&=K_1\iint_{\mathbb{T}^{2d}}\Gamma(x-y)\left(u^k(x)-u^k(y)\right)u^{k+1}(x)\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le C\left(\left\|u^k(y)\right\|_{L^\infty}+\left\|u^k(x)\right\|_{L^\infty}\right)\iint_{\mathbb{T}^{2d}}\Gamma(x-y)u^{k+1}(x)\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le CM\left\|\Gamma\right\|_{L^1}\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^2}\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2;\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}I_3&=K_2\int_{\mathbb{T}^d}u^{k+1}\left(v^{k+1}-u^k\right)\mathrm{d}x\le C\left(\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}\left\|v^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}\left\|u^k\right\|_{L^2}\right)\\&\le C\left(\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^k\right\|_{L^2}^2\right)\le C\left(M^2+\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned} \tag{41}$$

联立 $I_i, i=1,2,3$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}^2\le C\left(M^2+1\right)\left\|u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2. \tag{42}$$

对方程(8)作用算子 ∇^r $(1\le r\le s+2)$，然后两端乘以 $\nabla^r u^{k+1}$，并在 $\mathbb{T}^d$ 上关于变量 x 积分，我们可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{T}^d} u^k \nabla\left(\nabla^r u^{k+1}\right)\cdot\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(u^k\cdot\nabla u^{k+1}\right)-u^k\nabla\left(\nabla^r u^{k+1}\right)\right]\cdot\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\quad - K_1\int_{\mathbb{T}^d}\nabla_x^r\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\cdot u^k(x)\cdot\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}y\,\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\quad + K_1\int_{\mathbb{T}^d}\nabla_x^r\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\cdot u^k(y)\cdot\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}y\,\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\quad + K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla^r\left(v^{k+1}-u^k\right)\cdot\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^5 J_i.\end{aligned} \tag{43}$$

由 Hölder 不等式，Young's 不等式，Sobolev 不等式，Moser 不等式，我们可以得到，

$$J_1 = -\int_{\mathbb{T}^d} u^k\nabla\left(\nabla^r u^{k+1}\right)\cdot\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^k\right)\left|\nabla^r u^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x = 0; \tag{44}$$

$$\begin{aligned}J_2 &= -\int_{\mathbb{T}^d}\left[\nabla^r\left(u^k\cdot\nabla u^{k+1}\right)-u^k\nabla\left(\nabla^r u^{k+1}\right)\right]\cdot\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\le C\left\|\nabla^r\left(u^k\cdot\nabla u^{k+1}\right)-u^k\nabla\left(\nabla^r u^{k+1}\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le C\left(\left\|\nabla u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla u^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r u^k\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le CM\left(\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}^2\right);\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}J_3 &= -K_1\int_{\mathbb{T}^d}\nabla_x^r\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\cdot u^k(x)\cdot\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}y\,\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\le C\left\|\nabla_x^r\left(u^k\cdot\Gamma*\rho^{k+1}\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le C\left(\left\|u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla_x^r\left(\Gamma*\rho^{k+1}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\Gamma*\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla_x^r u^k\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le CM\left(\left\|\nabla_x^r\left(\Gamma*\rho^{k+1}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\Gamma*\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\right)\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le CM\left(\left\|\Gamma\right\|_{L^1}\left\|\nabla_y^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|\Gamma\right\|_{L^1}\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\right)\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le CM^2\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2;\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}J_4 &= K_1\int_{\mathbb{T}^d}\nabla_x^r\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\cdot u^k(y)\cdot\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}y\,\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\le C\int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\cdot\nabla_y^r\left(u^k(y)\cdot\rho^{k+1}(y)\right)\mathrm{d}y\,\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\le C\left\|\Gamma\right\|_{L^1}\left\|\nabla^r\left(u^k\cdot\rho^{k+1}\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le C\left\|\Gamma\right\|_{L^1}\left(\left\|u^k\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r\rho^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|\rho^{k+1}\right\|_{L^\infty}\left\|\nabla^r u^k\right\|_{L^2}\right)\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2} \\ &\le CM^2\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}\le CM^2\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2;\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}J_5 &= K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla^r\left(v^{k+1}-u^k\right)\cdot\nabla^r u^{k+1}\mathrm{d}x \\ &\le C\left(\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}+\left\|\nabla^r u^k\right\|_{L^2}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}\right) \\ &\le C\left(\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^r u^k\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2\right) \\ &\le C\left(M^2+\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2\right).\end{aligned} \tag{48}$$

将 $J_i, i=1,2,3,4,5$ 的估计带入(43)，如下不等式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2\le C\left(M^2+M+1\right)\left\|\nabla^r u^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}^2+C\left\|\nabla^r v^{k+1}\right\|_{L^2}^2+CM^2. \tag{49}$$

进一步的，对(49)的 r 从 1 到 $s+2$ 求和，并联立(42)，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}^2 \le C\left(M^2+M+1\right)\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}^2 + C\sum_{r=1}^{s+2}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla^r v^{k+1}\right|^2 \mathrm{d}x + CM^2. \tag{50}$$

对(50)关于时间变量 t 从 0 到 T_0 积分，可以得到

$$\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}^2 \le C\int_0^{T_0}\sum_{r=1}^{s+2}\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla^r v^{k+1}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^{T_0} C\left(M^2+M+1\right)\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}^2 + CM^2\mathrm{d}t, \tag{51}$$

利用 Gronwall 不等式和(36)可得，

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}}^2 \le \mathrm{e}^{C\left(M^2+M+1\right)T_0}\left(\left\|u_0\right\|_{H^{s+2}}^2 + CM^2T_0\right). \tag{52}$$

由(10)和(11)中 M 和 T_0 的选取，我们得到 u^{k+1} 的估计

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\|u^{k+1}\right\|_{H^{s+2}} \le M. \tag{53}$$

至此，我们完成了归纳过程，引理 1 证毕。

4. 低阶范数收敛

在这一节中，我们将证明近似解序列 $\left(\rho^k,u^k,v^k\right)$ 是 $C\left(\left[0,T_0\right];L^2\right)\times C\left(\left[0,T_0\right];H^1\right)\times C\left(\left[0,T_0\right];L^2\right)$ 中的柯西序列。

$$\bar{\rho}^{k+1} = \rho^{k+1}-\rho^k,\ \bar{u}^{k+1} = u^{k+1}-u^k,\ \bar{v}^{k+1} = v^{k+1}-v^k,$$

其中 $\left(\rho^{k+1},u^{k+1},v^{k+1}\right)$ 和 $\left(\rho^k,u^k,v^k\right)$ 分别满足：

$$\begin{cases}\partial_t\rho^{k+1} + u^k\cdot\nabla\rho^{k+1} + \rho^{k+1}\nabla\cdot u^k = 0\\ \partial_t v^{k+1} + v^k\cdot\nabla v^{k+1} + \nabla p^{k+1} = \mu\Delta v^{k+1} + K_2\rho^{k+1}\left(u^k-v^k\right), \qquad \nabla\cdot v^{k+1}=0\\ \partial_t u^{k+1} + u^k\cdot\nabla u^{k+1} = -K_1\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\left(u^k(x)-u^k(y)\right)\rho^{k+1}(y)\mathrm{d}y + K_2\left(v^{k+1}-u^k\right),\end{cases} \tag{54}$$

$$\begin{cases}\partial_t\rho^k + u^{k-1}\cdot\nabla\rho^k + \rho^k\nabla\cdot u^{k-1} = 0\\ \partial_t v^k + v^{k-1}\cdot\nabla v^k + \nabla p^k = \mu\Delta v^k + K_2\rho^k\left(u^{k-1}-v^{k-1}\right), \qquad \nabla\cdot v^k=0\\ \partial_t u^k + u^{k-1}\cdot\nabla u^k = -K_1\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma(x-y)\left(u^{k-1}(x)-u^{k-1}(y)\right)\rho^k(y)\mathrm{d}y + K_2\left(v^k-u^{k-1}\right),\end{cases} \tag{55}$$

且具有相同的初值条件：

$$\left(\rho^{k+1},u^{k+1},v^{k+1}\right)(x,0) = \left(\rho^k,u^k,v^k\right)(x,0) = \left(\rho_0,u_0,v_0\right). \tag{56}$$

应用类似引理 1 中的方法，我们可以得到 $\left(\bar{\rho}^{k+1},\bar{u}^{k+1},\bar{v}^{k+1}\right)$ 的 L^2-模估计。

Step 1. ($\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}$ 的估计)：由 $(54)_1$ 与 $(55)_1$ 相减，

$$\partial_t\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right) = -\left(u^k-u^{k-1}\right)\cdot\nabla\rho^{k+1} - u^{k-1}\cdot\nabla\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right) - \left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)\cdot\nabla u^k - \rho^k\nabla\cdot\left(u^k-u^{k-1}\right). \tag{57}$$

上述方程两端乘以 $\rho^{k+1}-\rho^k$，并关于变量 x 在 $\mathbb{T}^d$ 上积分，应用第 3 节相同的方法，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{T}^d}\left(u^k-u^{k-1}\right)\cdot\nabla\rho^{k+1}\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^{k-1}\right)\left|\rho^{k+1}-\rho^k\right|^2\mathrm{d}x\\ &\quad - \int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^k\right)\left|\rho^{k+1}-\rho^k\right|^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{T}^d}\rho^k\nabla\cdot\left(u^k-u^{k-1}\right)\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)\mathrm{d}x\\ &\le CM\left(\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2 + \left\|u^k-u^{k-1}\right\|_{H^1}^2\right).\end{aligned} \tag{58}$$

对上述方程在$[0,T_0]$上关于变量t进行积分，我们得到$\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}$的估计。

$$\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2 \le CM\int_0^{T_0}\left(\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2+\left\|u^k-u^{k-1}\right\|_{H^1}^2\right)\mathrm{d}\tau. \tag{59}$$

Step 2. ($\left\|v^{k+1}-v^k\right\|_{L^2}$的估计)：由$(54)_2$与$(55)_2$相减，

$$\begin{aligned}
&\partial t\left(v^{k+1}-v^k\right)-\mu\Delta\left(v^{k+1}-v^k\right)\\
&=-\left(v^k-v^{k-1}\right)\cdot\nabla v^{k+1}-v^{k-1}\cdot\nabla\left(v^{k+1}-v^k\right)+K_2\rho^{k+1}\left(u^k-u^{k-1}\right)\\
&\quad -K_2\rho^{k+1}\left(v^k-v^{k-1}\right)+K_2\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)u^{k-1}-K_2\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)v^{k-1}-\nabla\left(p^{k+1}-p^k\right),\\
&\nabla\cdot\left(v^{k+1}-v^k\right)=0.
\end{aligned} \tag{60}$$

对上述方程两端乘以$v^{k+1}-v^k$，并关于变量x在$\mathbb{T}^d$上积分，应用第3节相同的方法，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|v^{k+1}-v^k\right\|_{L^2}^2+\mu\left\|\nabla\left(v^{k+1}-v^k\right)\right\|_{L^2}^2\\
&=-\int_{\mathbb{T}^d}\left(v^k-v^{k-1}\right)\cdot\nabla v^{k+1}\cdot\left(v^{k+1}-v^k\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot v^{k-1}\right)\left|v^{k+1}-v^k\right|^2\mathrm{d}x\\
&\quad +K_2\int_{\mathbb{T}^d}\rho^{k+1}\left[\left(u^k-u^{k-1}\right)-\left(v^k-v^{k-1}\right)\right]\cdot\left(v^{k+1}-v^k\right)\mathrm{d}x\\
&\quad +K_2\int_{\mathbb{T}^d}\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)\left(u^{k-1}-v^{k-1}\right)\cdot\left(v^{k+1}-v^k\right)\mathrm{d}x\\
&\le CM\left(\left\|v^{k+1}-v^k\right\|_{L^2}^2+\left\|v^k-v^{k-1}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^k-u^{k-1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned} \tag{61}$$

对上述方程在$[0,T_0]$上关于变量t进行积分，我们得到$\left\|v^{k+1}-v^k\right\|_{L^2}$的估计。

$$\begin{aligned}
&\left\|v^{k+1}-v^k\right\|_{L^2}^2+\mu\int_0^{T_0}\left\|\nabla\left(v^{k+1}-v^k\right)\right\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\\
&\le CM\int_0^{T_0}\left(\left\|v^{k+1}-v^k\right\|_{L^2}^2+\left\|v^k-v^{k-1}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^k-u^{k-1}\right\|_{L^2}^2+\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{62}$$

Step 3. ($\left\|u^{k+1}-u^k\right\|_{H^1}$的估计)：由$(54)_3$与$(55)_3$相减，

$$\begin{aligned}
\partial t\left(u^{k+1}-u^k\right)&=-\left(u^k-u^{k-1}\right)\cdot\nabla u^{k+1}-u^{k-1}\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^k\right)\\
&\quad +K_1\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)\left(u^k(y)-u^k(x)\right)\mathrm{d}y\\
&\quad +K_1\int_{\mathbb{T}^d}\Gamma\rho^k\left[\left(u^k(y)-u^{k-1}(y)\right)-\left(u^k(x)-u^{k-1}(x)\right)\right]\mathrm{d}y\\
&\quad +K_2\left(v^{k+1}-v^k\right)-K_2\left(u^k-u^{k-1}\right).
\end{aligned} \tag{63}$$

对上述方程两端乘以$u^{k+1}-u^k$，并关于变量x在$\mathbb{T}^d$上积分，应用第3节相同的方法，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u^{k+1}-u^k\right\|_{L^2}^2&=-\int_{\mathbb{T}^d}\left(u^k-u^{k-1}\right)\cdot\nabla u^{k+1}\cdot\left(u^{k+1}-u^k\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^{k-1}\right)\cdot\left|u^{k+1}-u^k\right|^2\mathrm{d}x\\
&\quad +K_1\int_{\mathbb{T}^{2d}}\Gamma\left(\rho^{k+1}-\rho^k\right)\left(u^k(y)-u^k(x)\right)\cdot\left(u^{k+1}-u^k\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad +K_1\int_{\mathbb{T}^{2d}}\Gamma\rho^k\left[\left(u^k(y)-u^{k-1}(y)\right)-\left(u^k(x)-u^{k-1}(x)\right)\right]\cdot\left(u^{k+1}-u^k\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad +K_2\int_{\mathbb{T}^d}\left(v^{k+1}-v^k\right)\cdot\left(u^{k+1}-u^k\right)\mathrm{d}x-K_2\int_{\mathbb{T}^d}\left(u^k-u^{k-1}\right)\cdot\left(u^{k+1}-u^k\right)\mathrm{d}x\\
&\le CM\left(\left\|u^{k+1}-u^k\right\|_{L^2}^2+\left\|u^k-u^{k-1}\right\|_{L^2}^2+\left\|v^{k+1}-v^k\right\|_{L^2}^2+\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned} \tag{64}$$

为了得到$\left\|\rho^{k+1}-\rho^k\right\|_{L^2}^2$的收敛性，还需证明$\left\|u^{k+1}-u^k\right\|_{H^1}^2$收敛，因此，我们还需得到$\left\|\nabla\left(u^{k+1}-u^k\right)\right\|_{L^2}^2$的

估计。对方程(63)作用算子∇，然后方程两端同乘以$\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)$，并在$\mathbb{T}^d$上关于变量$x$积分，应用第3节相同的方法，可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\right\|_{L^2}^2\\
&=-\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\left(u^{k}-u^{k-1}\right)\cdot\nabla u^{k+1}\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{T}^d}\left(u^{k}-u^{k-1}\right)\cdot\nabla^2 u^{k+1}\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^{k-1}\right)\left|\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\nabla\cdot u^{k-1}\right)\left|\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
&\quad-K_1\|\Gamma\|_{L^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}}\left(\rho^{k+1}(y)-\rho^{k}(y)\right)\cdot\nabla u^{k}(x)\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad-K_1\|\Gamma\|_{L^1}\int_{\mathbb{T}^{2d}}\rho^{k}(y)\nabla\left(u^{k}(x)-u^{k-1}(x)\right)\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad+K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\left(v^{k+1}-v^{k}\right)\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\mathrm{d}x-K_2\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\left(u^{k}-u^{k-1}\right)\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\mathrm{d}x\\
&\le CM\left(\left\|\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{k}-u^{k-1}\right\|_{H^1}^2+\left\|\rho^{k+1}-\rho^{k}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla\left(v^{k+1}-v^{k}\right)\right\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}\tag{65}$$

其中上述关系中的最后第二项使用了带有$\varepsilon(>0)$的Young's不等式，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d}\nabla\left(v^{k+1}-v^{k}\right)\cdot\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\mathrm{d}x\\
&\le\left\|\nabla\left(v^{k+1}-v^{k}\right)\right\|_{L^2}\left\|\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\right\|_{L^2}\\
&\le\varepsilon\left\|\nabla\left(v^{k+1}-v^{k}\right)\right\|_{L^2}^2+\frac{1}{4\varepsilon}\left\|\nabla\left(u^{k+1}-u^{k}\right)\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}\tag{66}$$

结合(64)与(65)，并在$[0,T_0]$上进行积分，

$$\begin{aligned}
\left\|u^{k+1}-u^{k}\right\|_{H^1}^2\le CM\int_0^{T_0}&\left(\left\|u^{k+1}-u^{k}\right\|_{H^1}^2+\left\|u^{k}-u^{k-1}\right\|_{H^1}^2+\left\|\rho^{k+1}-\rho^{k}\right\|_{L^2}^2\right.\\
&\left.+\left\|v^{k+1}-v^{k}\right\|_{L^2}^2+\varepsilon\left\|\nabla\left(v^{k+1}-v^{k}\right)\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}\tag{67}$$

结合(59)，(62)，(67)，并选择ε使得$\varepsilon\ll\mu$可得，

$$\begin{aligned}
&\left\|\rho^{k+1}-\rho^{k}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{k+1}-u^{k}\right\|_{H^1}^2+\left\|v^{k+1}-v^{k}\right\|_{L^2}^2\\
&\le CM\int_0^{T_0}\left(\left\|u^{k+1}-u^{k}\right\|_{H^1}^2+\left\|u^{k}-u^{k-1}\right\|_{H^1}^2+\left\|\rho^{k+1}-\rho^{k}\right\|_{L^2}^2+\left\|v^{k+1}-v^{k}\right\|_{L^2}^2+\left\|v^{k}-v^{k+1}\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}\tag{68}$$

对上式的$k=1,2,\cdots$求和，并利用Gronwall不等式，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\rho^{k+1}-\rho^{k}\right\|_{L^2}^2+\left\|u^{k+1}-u^{k}\right\|_{H^1}^2+\left\|v^{k+1}-v^{k}\right\|_{L^2}^2\right)\le C.\tag{69}$$

这就说明$\left(\rho^k,u^k,v^k\right)$是$C\left([0,T_0];L^2\right)\times C\left([0,T_0];H^1\right)\times C\left([0,T_0];L^2\right)$中的柯西序列。

5. 局部解的存在唯一性

在这一节中，我们完成定理1的证明。

存在性证明：对于近似解$\left(\rho^k,u^k,v^k\right)$，我们在第3节中得到了一致有界性，并在第4节中证明了柯西收敛性，结合Gagliardo-Nirenberg不等式，可得到，

$$\begin{aligned}
&\rho^k\to\rho\in C\left([0,T_0];H^{s-1}\right)\\
&u^k\to u\in C\left([0,T_0];H^{s+1}\right)\\
&v^k\to v\in C\left([0,T_0];H^{s}\right).
\end{aligned}\tag{70}$$

由(70)易知极限函数(ρ,u,v)是(1)~(2)在分布意义上的一个解，利用[15]中相似论点，可得到(ρ,u,v)的正则性：

$$\begin{aligned} &\rho^k \to \rho \in C\left(\left[0,T_0\right];H^s\right) \\ &u^k \to u \in C\left(\left[0,T_0\right];H^{s+2}\right) \\ &v^k \to v \in C\left(\left[0,T_0\right];H^{s+1}\right). \end{aligned} \tag{71}$$

利用 Sobolev 嵌入定理，可知$(\rho,u,v)\in C^1\left(\left[0,T_0\right];\mathbb{T}^d\right)$是一个经典解，存在性得证。

唯一性证明：设(ρ,u,v)和$(\tilde{\rho},\tilde{u},\tilde{v})$是(1)~(2)具有相同初值条件$(\rho_0,u_0,v_0)$的两个经典解，令：

$$U(t)=\|\rho-\tilde{\rho}\|_{L^2}^2+\|u-\tilde{u}\|_{H^1}^2+\|v-\tilde{v}\|_{L^2}^2.$$

利用与第 4 节相同的方法，容易证明

$$U(t)\le C\int_0^{T_0}U(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad U(0)=0.$$

应用 Gronwall 不等式，可以证明$U(t)=0$，即：

$$\rho\equiv\tilde{\rho}\in C\left(\left[0,T_0\right];L^2\right),\ u\equiv\tilde{u}\in C\left(\left[0,T_0\right];H^1\right),\ v\equiv\tilde{v}\in C\left(\left[0,T_0\right];L^2\right).$$

于是唯一性得证，定理 1 的证明完成。

致　谢

感谢佟丽宁导师对本文的指导与建议。

参考文献

[1] Hauray, M. and Jabin, P.-E. (2007) N-Particles Approximation of the Vlasov Equations with Singular Potential. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **183**, 489-524.

[2] Cucker, F. and Smale, S. (2007) Emergent Behavior in Flocks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 852-862. https://doi.org/10.1109/TAC.2007.895842

[3] Etikyala, R., Gottlich, S., Klar, A. and Tiwari, S. (2014) Particle Methods for Pedestrian Flow Models: From Microscopic to Nonlocal Continuum Models. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **24**, 2503-2523. https://doi.org/10.1142/S0218202514500274

[4] Carrillo, J.A., Choi, Y.P. and Perez, S.P. (2017) A Review on Attractive-Repulsive Hydrodynamics for Consensus in Collective Behavior. In: Bellomo, N., Degond, P. and Tadmor, E., Eds., *Active Particles*, *Volume* 1, Birkhauser, Cham, 259-298. https://doi.org/10.1007/978-3-319-49996-3_7

[5] Carrillo, J.A., Fornasier, M., Toscani, G. and Vecil, F. (2010) Particle, Kinetic, and Hydrodynamic Models of Swarming. In: Naldi, G., Pareschi, L. and Toscani, G., Eds., *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences*, Birkhauser, Boston, 297-336. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4946-3_12

[6] Che, J., Chen, L., Göttlich, S. and Wang, J. (2016) Existence of a Classical Solution to Complex Material Flow Problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**, 4069-4081. https://doi.org/10.1002/mma.3848

[7] Carrillo, J.A., Choi, Y.P. and Zatorska, E. (2016) On the Pressureless Damped Euler-Poisson Equations with Quadratic Confinement: Critical Thresholds and Large-Time Behavior. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 2311-2340. https://doi.org/10.1142/S0218202516500548

[8] Carrillo, J.A., Choi, Y.P., Tadmor, E. and Tan, C. (2016) Critical Thresholds in 1D Euler Equations with Non-Local Forces. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 185-206. https://doi.org/10.1142/S0218202516500068

[9] Do, T., Kiselev, A., Ryzhik, L. and Tan, C. (2018) Global Regularity for the Fractional Euler Alignment System. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **228**, 1-37. https://doi.org/10.1007/s00205-017-1184-2

[10] Kiselev, A. and Tan, C. (2018) Global Regularity for 1D Eulerian Dynamics with Singular Interaction Forces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **50**, 6208-6229. https://doi.org/10.1137/17M1141515

[11] Carrillo, J.A., Feireisl, E., Gwiazda, P. and Swierczewska-Gwiazda, A. (2017) Weak Solutions for Euler System with

Non-Local Interactions. *Journal of the London Mathematical Society*, **95**, 705-724. https://doi.org/10.1112/jlms.12027

[12] Choi, Y.-P. (2019) The Global Cauchy Problem for Compressible Euler Equations with a Nonlocal Dissipation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **29**, 185-207.

[13] Carrillo, J.A., Wroblewska-Kaminska, A. and Zatorska, E. (2017) On Long-Time Asymptotics for Viscous Hydrodynamic Models of Collective Behavior with Damping and Nonlocal Interactions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **29**, 31-63.

[14] Ha, S.Y., Kang, M.J. and Kwon, B. (2014) A Hydrodynamic Model for the Interaction of Cucker-Smale Particles and Incompressible Fluid. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **24**, 2311-2359. https://doi.org/10.1142/S0218202514500225

[15] Kato, T. (1973) Linear Evolution Equations of "Hyperbolic" Type II. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **25**, 648-666. https://doi.org/10.2969/jmsj/02540648

[16] Majda, A. (1984) Compressible Fluid Flowand Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. Applied Mathematical Sciences, Vol. 53. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1116-7