Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 612-625
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114075

具有跳跃的随机蚊子种群模型的不变测度

潘玉婷，吕　超，黄露秋，李　琦，黄在堂

南宁师范大学数学与统计学院，广西 南宁
Email: zaitanghuang@163.com

收稿日期：2021年3月19日；录用日期：2021年4月21日；发布日期：2021年4月29日

摘　要

本文主要研究具有马尔可夫链的随机蚊子种群模型的不变测度。首先，巧妙构造李雅普诺夫函数，利用伊藤定理、比较定理，证明了随机蚊子种群模型存在唯一的全局连续正解。其次，如果$\lambda \le 0$，不育蚊子种群会灭绝，而野生蚊子种群的分布弱收敛于唯一不变概率测度；如果$\lambda > 0$，则系统具有不变概率测度，解过程的转移概率收敛于不变测度。最后证明了随机过程的转移概率收敛到其不变测度的指数收敛速度。

关键词

随机蚊子种群模型，存在性，马尔可夫性，不变测度，遍历性

Invariant Measure of Random Mosquito Population Model with Jumping

Yuting Pan, Chao Lv, Luqiu Huang, Qi Li, Zaitang Huang

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi
Email: zaitanghuang@163.com

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 21st, 2021; published: Apr. 29th, 2021

Abstract

This paper mainly studies the invariant measures of the random mosquito population model with Markov chains. First, the Lyapunov function is cleverly constructed, and the Itô theorem and the comparison theorem are used to prove that the random mosquito population model has a unique global continuous positive solution. Second, if $\lambda \le 0$, the sterile mosquito population will be extinct, and the distribution of the wild mosquito population weakly converges to the only constant probability measure; if $\lambda > 0$, then the system has an invariant probability measure, and the transition probability of the solution process converges to an invariant measure. Finally, it is

文章引用: 潘玉婷，吕超，黄露秋，李琦，黄在堂. 具有跳跃的随机蚊子种群模型的不变测度[J]. 理论数学，2021, 11(4): 612-625. DOI: 10.12677/pm.2021.114075

proved that the transition probability of a stochastic process converges to the exponential convergence rate of its invariant measure.

Keywords

Random Mosquito Population Model, Existence, Markovian, Invariant Measure, Ergodicity

1. 引言

蚊子是疟疾和登革热等蚊媒疾病的主要传播者之一，在全球范围内的种类有 3600 多种。其中，以吸食血液作为食物的雌蚊是登革热、疟疾、黄热病、丝虫病、日本脑炎和寨卡病毒等其他病原体的中间寄主，且伊蚊是虫媒病毒疾病的主要载体之一[1]。在热带和亚热带地区，蚊媒疾病猖獗，给当地公共卫生的防疫工作带来了极大的影响。目前，已经很多学者对蚊虫传疾病的传播方式和有效控制方法作大量的研究[2] [3] [4] [5]。其中，有些学者考虑使用杀虫剂来消灭蚊子，但可能受到对环境影响或抗药性演变的关切的限制。因此，也有部分学者考虑不使用杀虫剂消灭野生蚊子的方法。例如，Alphey [6] [7]等人研究发现不育昆虫技术是减少或消灭野生蚊子的有效方法。在此研究基础上，McLean [8]等人进一步考虑了一种转基因策略，即释放携带显性致死因子的昆虫，携带显性致死因子的雄蚊同野外雌蚊交配产生的杂合后代在预定条件下死亡，达到减少或消灭野生蚊子的效果。此后，Cai [9]等人提出蚊子种群动力模型，该模型假设野生蚊子和不育蚊子在互不干涉的情况下都遵循 Logistic 增长，不育蚊子的出生率就是它的释放率。当不育蚊子被释放到环境中并且与野生蚊子发生相互作用的情况下，此模型系统可由以下微分方程描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \left[C(N)\dfrac{aw}{w+g} - \left(\mu_1 + \xi_1 (w+g)\right) \right] w, \\ \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = B(\cdot) - \left[\mu_2 + \xi_2 (w+g) \right] g. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 w 表示野生蚊子种群数量，g 表示不育蚊子种群数量，$N = (w+g)$ 表示野生蚊子和不育蚊子的种群数量，$C(N)$ 表示每个个体的单位时间交配次数，$\mu_i > 0$ 表示野生蚊子和不育蚊子与种群密度无关的死亡率，$\xi_i > 0$ 表示野生蚊子和不育蚊子与种群密度相关的死亡率，$a > 0$ 表示每次交配产生的野生后代数量，$B(\cdot)$ 表示不育蚊子的释放率。

假设蚊子种群模型存在 Allee 效应[10]，为简化符号，记 $c_0 a$ 为 a，交配率 $C(N) = c_0 N/(1+N)$，释放率 $B(\cdot) = \dfrac{bw}{1+w}$。其中 c_0 表示最大的交配率，$B(\cdot)$ 是一个线性饱和函数且当野生蚊子数量充分大时趋向于常数 b，$b > 0$ 表示不育蚊子释放率系数。然而，现实世界中不可避免遭受环境噪声的影响，比如湿度、温度、光照等因素。因此，本文考虑环境噪声因素对蚊子种群的影响，即确定性蚊子种群模型相应的随机模型如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}w(t) = \left[\left(\dfrac{aw(t)}{1+w(t)+g(t)} - \left(\mu_1 + \xi_1 \left(w(t) + g(t) \right)\right) \right) w(t) \right] \mathrm{d}t + \sigma_1 w(t) \mathrm{d}B_1(t) \\ \mathrm{d}g(t) = \left[\dfrac{bw(t)}{1+w(t)} - \mu_2 + \xi_2 \left(w(t) + g(t) \right) g(t) \right] \mathrm{d}t + \sigma_2 g(t) \mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $B_1(t)$，$B_2(t)$ 是两个独立的实值布朗运动，σ_i 表示白噪声。由于布朗运动是对环境中连续扰动随机事件的描述，我们进一步考虑系统中存在无法用连续扰动描述的突发事件，并使用有限状态空间的马尔科夫链来模拟环境中离散事件的扰动。假设系数 a,b,μ_i,ξ_i,σ_i 的强度取决于 $\alpha(t)$，方程(1.2)转换为如下随机模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}w(t)=\left[\left(\dfrac{a(\alpha(t))w(t)}{1+w(t)+g(t)}-\mu_1(w(t),\alpha(t))-(w(t)+g(t))\xi_1(w(t),g(t),\alpha(t))\right)w(t)\right]\mathrm{d}t \\ \qquad\quad +\sigma_1(\alpha(t))w(t)\mathrm{d}B_1(t) \\ \mathrm{d}g(t)=\left[\dfrac{b(\alpha(t))w(t)}{1+w(t)}-\tilde{k}(\alpha(t))g(t)\right]\mathrm{d}t+\sigma_2(\alpha(t))g(t)\mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{1.3}$$

其中，$\tilde{k}:=\mu_2+\xi_2(w(t)+g(t))$，$\alpha(t)$ 是右连续有限状态的马尔科夫链，是独立的布朗运动，其状态空间为 $\mathcal{M}=\{1,2,\cdots,N\}$。其生成元设为 $\Gamma=(\gamma_{ij})_{N\times N}$，$\gamma_{ij}$ 如下确定：

$$P\{\alpha(t+\Delta)=j\,|\,\alpha(t)=i,X_t=x\}=\begin{cases}\gamma_{ij}(x)\Delta+o(\Delta),i\neq j\\ 1+\gamma_{ij}(x)\Delta+o(\Delta),i=j\end{cases} \tag{1.4}$$

2. 预备知识

在本文中，使用小写字母 w_0、g_0、i_0 分别表示 $w(t)$、$g(t)$、$\alpha(t)$ 的初始值，为方便起见，我们假设

$$a^*=\max_{i\in\mathcal{M}}a(i),\ b^*=\max_{i\in\mathcal{M}}b(i),\ \sigma_s^*=\max_{i\in\mathcal{M}}\sigma(i),\ \tilde{k}^*=\max_{i\in\mathcal{M}}\tilde{k}(i),$$
$$a_*=\min_{i\in\mathcal{M}}a(i),\ b_*=\min_{i\in\mathcal{M}}b(i),\ \sigma_{s*}=\min_{i\in\mathcal{M}}\sigma(i),\ \tilde{k}_*=\min_{i\in\mathcal{M}}\tilde{k}(i).$$

其中 $s=1,2$。记 $R_+=[0,\infty)$，$R_+^o=(0,\infty)$，$R_+^2=[0,\infty)\times[0,\infty)$ 和 $R_+^{2,o}=(0,\infty)\times(0,\infty)$，系统(1.3)与(1.4)的随机过程 $(w(t),g(t),\alpha(t))$ 的相关算子：

$$\mathcal{L}V(\phi,i)=V_\phi(\phi,i)\tilde{f}(\phi,i)+\frac{1}{2}tr\left[\tilde{g}(\phi,i)\tilde{g}^{\mathrm{T}}(\phi,i)V_{\phi\phi}(\phi,i)\right]+\sum_{j\in M}\gamma_{ij}V(\phi,i). \tag{2.1}$$

定义 A^{T} 表示 A 的转置，特别地 $\phi=(w,g)$，$V_\phi(\phi,i)$ 和 $V_{\phi\phi}(\phi,i)$ 是 $V(\cdot,i)$ 相对于 ϕ 的梯度和宽度，$\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 分别是式(1.3)的漂移系数和扩散系数，定义如下：

$$\tilde{f}(\phi,i)=\left(\frac{a(i)w^2}{1+w+g}-w\mu_1(w,i)-w(w+g)\xi_1(w,g,i),\frac{wb(w,g,i)}{1+w}-g\tilde{k}(i)\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{g}(\phi,i)=diag(\sigma_1(i)w,\sigma_2(i)g)\in R^{2\times2}$$

其中 $diag(a,b)$ 表示包含项 a 和 b 的对角矩阵。特别地，$\tilde{g}$ 的特殊结构意味着 $\tilde{g}\tilde{g}^{\mathrm{T}}=\tilde{g}^2$，$V(\phi,i)$ 和 $V(w,g,i)$ 可以相互表示。

假设 2.1 假设

1) $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 是独立于马尔科夫链 $\alpha(t)$ 的实值标准布朗运动。

2) 对任意 $i\in\mathcal{M}$，$a(i),b(i),\tilde{k}(i),\sigma_1(i),\sigma_2(i)$ 是非负的。

3) $\mu_1(w,i),\xi_1(w,g,i),b(w,g,i)$ 满足局部利普希茨条件；$\mu(0,i)=\xi_1(0,g,i)=0$ 意味着对于 $k_0>1$，$\lim_{w\to\infty}\mu_1(w,i)=\infty$；$0\le b(w,g,i)\le\kappa_0(\mu_1(w,i)\wedge\xi_1(w,g,i))$，$\xi_1(w,g,i)\le\kappa_0(1+w)$。此外，对每个 $i\in\mathcal{M}$，

$b(w,g,i)$ 在 $g=0$ 时是一致连续的，即 $\lim_{g\to0}\sup\left|b(w,g,i)-b(w,0,i)\right|=0$。

4) 马尔科夫链或它的生成元 $\Gamma=(\gamma_{ij})_{N\times N}$ 是不可约的，即对任意的 $i,j\in\mathcal{M}$，存在 $i=i_0,i_1,\cdots,i_n=j$ 使 $\gamma_{i_{k-1}},i_k>0,k=1,2,\cdots,n$。

假设 2.2 用 π_α 表示 $\alpha(t)$ 的不变测度，假设下列条件之一成立：

1) 对于每个 $i\in\mathcal{M}$，任意的 $(w,g)\in[0,\infty)\times(0,\infty)$，$b(w,g,i)$ 在 w 上是非减的，在 g 上是非增的；

2) $$\sum_{i\in\mathcal{M}}\left(\limsup_{s\to\infty}b(w,0,i)-\tilde{k}(i)-\frac{\sigma_2^2(i)}{2}\right)\pi_\alpha(i)<0; \tag{2.2}$$

3) $$\sum_{i\in\mathcal{M}}\left(\liminf_{s\to\infty}b(w,0,i)-\tilde{k}(i)-\frac{\sigma_2^2(i)}{2}\right)\pi_\alpha(i)>0. \tag{2.3}$$

3. 存在性与不变测度

本节主要证明随机蚊子种群模型的正解存在性与不变测度。

定理 3.1 对任意 $(w,g,i)\in R_+^2\times\mathcal{M}$，具有马尔可夫链的随机蚊子种群模型(1.3)存在初始值为 $(w_0,g_0,i_0)\in R_+^2\times\mathcal{M}$ 的唯一全局正解，且随机过程 $(w(t),g(t),\alpha(t))$ 是一个马尔科夫费勒过程。此外，如果 $g=0$，则 $P_{w,g,i}\{w(t)>0,t>0\}=1$ 和 $P_{w,g,i}\{g(t)=0,t>0\}=1$，如果 $g>0$，则 $P_{w,g,i}\{g(t)>0,t>0\}=1$。

证明：容易知道，在 $(w,g,i)\in R_+^2\times\mathcal{M}$ 中，具有马尔可夫链的随机蚊子种群模型(1.3)的系数满足局部利普西兹条件，故系统(1.3)在时间 $[0,\tau_e]$ 内具有唯一连续解，其中

$\tau_e=\inf\{t\ge0:w(t)\vee g(t)=\infty\}$，$\inf\phi=\infty$，且解是一个强马尔科夫过程[11]。定义

$\tau_k=\inf\{t\ge0:w(t)\vee g(t)>k\}$,

故 $\tau_e=\lim_{k\to\infty}\tau_k$。

考虑 $\hat{V}_1(w,g,i)=\kappa_0 w+g$，利用伊藤公式，获得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{V}_1(w,g,i)&=\frac{\kappa_0 a(i)w^2}{1+w+g}-\kappa_0 w\mu_1(w,i)-\tilde{k}(i)g\\&\quad+w\left[\frac{b(w,g,i)}{1+w}-\kappa_0(w+g)\xi_1(w,g,i)\right]\\&\le\frac{\kappa_0 a(i)w^2}{1+w+g}+\frac{b(w,g,i)w}{1+w}\end{aligned}$$

因此，$E_{w,g,i}\hat{V}_1(w(\tau_k\wedge t),g(\tau_k\wedge t),\alpha(\tau_k\wedge t))\le\hat{V}_1(w,g,i)+\frac{\kappa_0 a(i)w^2}{1+w+g}+\frac{b(w,g,i)w}{1+w}$，这意味着

$$P_{w,g,i}\{\tau_k<t\}\le P_{w,g,i}\left\{\hat{V}_1(w(\tau_k\wedge t),g(\tau_k\wedge t),\alpha(v))\ge k\right\}\le\frac{\hat{V}_1(w,g,i)+\frac{\kappa_0 a(i)w^2}{1+w+g}+\frac{b(w,g,i)w}{1+w}}{k}\to0,k\to\infty.$$

故有 $P_{w,g,i}\{\tau_e\le t\}=0$ 或 $P_{w,g,i}\{\tau_e>t\}=1,\forall t>0$，从而，有 $P_{w,g,i}\{\tau_e=\infty\}=1$。因此，具有马尔可夫链的随机蚊子种群模型(1.3)存在唯一的全局连续解。

下面，关注正解的情况。首先，假设 $w,g>0$，对任意 $n\in Z_+$，我们定义以下截断函数：

$\mu_1^{(n)}(w,i)=\mu_1(w\wedge n,i)$；$\xi_1^{(n)}(w,g,i)=\xi_1(w\wedge n,g\wedge n,i)$；$b^{(n)}(w,g,i)=b(w\wedge n,g\wedge n,i)$。特别地，让 $\mu_1^{(n)},\xi_1^{(n)},b^{(n)}$ 替代 μ_1,ξ_1,b。$(w^{(n)}(t),g^{(n)}(t))$ 成为系统(1.3)与(1.4)的解。注意

$$\eta^{(n)}=\inf\left\{t\ge0:w^{(n)}(t)\wedge g^{(n)}(t)\le0\right\}$$

$$\eta_k^{(n)} = \inf\left\{t \ge 0 : w^{(n)}(t) \wedge g^{(n)}(t) < \frac{1}{k}\right\}$$

并且有 $\eta^{(n)} = \lim_{k\to\infty} \eta_k^{(n)}$。考虑

$$\hat{V}_2^{(n)}(w,g,i) = w - c_1^{(n)} - c_1^{(n)} \ln \frac{w}{c_1^{(n)}} + c_2(g - \ln g - 1),$$

其中 $c_2 = \frac{1}{\kappa_0}$， $c_1^{(n)} = \max_{i\in\mathcal{M}} \sup_{w>0} \frac{g\mu_1^{(n)}(w,i)}{(w+g)\xi_1^{(n)}(w,g,i)}$。令 $c_2^{(n)} := \max_{i\in\mathcal{M}} \sup_{w>0} \frac{w\mu_1^{(n)}(w,i)}{g}, w > \frac{\sqrt{5+4g}}{2}, g > 0,$。

由于 $\xi_1^{(n)}(w,g,i)$ 满足局部利普西兹条件， $\xi_1^{(n)}(0,g,i) = 0$， 所以 $\sup_{w>0} \frac{\xi_1^{(n)}(w,g,i)}{w} < \infty$。类似地， $\sup_{w>0} \frac{\mu_1^{(n)}(w,i)}{w} < \infty$。根据伊藤公式，有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\hat{V}_2^{(n)}(w,g,i) \\
&= \left(1 - \frac{c_1^{(n)}}{g}\right)\left(\frac{a(i)w^2}{1+w+g} - w\mu_1^{(n)}(w,i) - w(w+g)\xi_1^{(n)}(w,g,i)\right) + \frac{c_1^{(n)}\sigma_1^2(i)}{2} \\
&\quad + \left(c_2 - \frac{c_2}{g}\right)\left(\frac{wb^{(n)}(w,g,i)}{1+w+g} - g\tilde{k}(i)\right) + \frac{c_2\sigma_2^2(i)}{2} \\
&\le \frac{a(i)w^2}{1+w+g} + c_1^{(n)}c_2^{(n)} + c_2\tilde{k}(i)(g+i) + \frac{c_1^{(n)}\hat{\sigma}_1^2 + c_2\hat{\sigma}_2^2}{2} + c_2\hat{k} \\
&\quad + w\left[\frac{c_1^{(n)}(w+g)\xi_1^{(n)}(w,g,i)}{g} - \mu_1^{(n)}(w,i)\right] \\
&\quad + w\left[\frac{c_2 b^{(n)}(w,g,i)}{1+w} - \frac{c_2 b^{(n)}(w,g,i)}{g(1+w)}\right] \\
&\le a(i) + c_1^{(n)}c_2^{(n)} + \frac{c_1^{(n)}\hat{\sigma}_1^2 + c_2\hat{\sigma}_2^2}{2} := K^{(n)};\ w,g > 0.
\end{aligned}$$

其中算子 $\mathcal{L}^{(n)}$ 定义作 $\mathcal{L}$， ξ_1, μ_1, b 替换为 $\xi_1^{(n)}, \mu_1^{(n)}, b^{(n)}$。再次运用伊藤公式，获得

$$\begin{aligned}
&E_{w,g,i}\hat{V}_2^{(n)}\left(w^{(n)}\left(\eta_k^{(n)} \wedge t\right), g^{(n)}\left(\eta_k^{(n)} \wedge t\right), \alpha^{(n)}\left(\eta_k^{(n)} \wedge t\right)\right) \\
&= \hat{V}_2^{(n)}(w,g,i) + E_{w,g,i}\int_0^{\eta_k^{(n)}\wedge t} \mathcal{L}\hat{V}_2^{(n)}\left(w^{(n)}(u), g^{(n)}(u), \alpha^{(n)}(u)\right)\mathrm{d}u \\
&\le \hat{V}_2^{(n)}(w,g,i) + K^{(n)}t.
\end{aligned}$$

因此，由 $\hat{V}_2^{(n)}$ 的定义，如果 $\eta_k^{(n)} < t$，则

$$\hat{V}_2^{(n)}\left(w^{(n)}\left(\eta_k^{(n)} \wedge t\right), g^{(n)}\left(\eta_k^{(n)} \wedge t\right), \alpha^{(n)}\left(\eta_k^{(n)} \wedge t\right)\right) \ge \left(c_1^{(n)} \ln kc_1^{(n)} - c_1^{(n)}\right) \wedge \left(c_2 \ln k - c_2\right).$$

从而，获得

$$P_{w,g,i}\left\{\eta_k^{(n)} < t\right\} \le \frac{\hat{V}_2^{(n)}(w,g,i) + K^{(n)}t}{\left(c_1^{(n)} \ln kc_1^{(n)} - c_1^{(n)}\right) \wedge \left(c_2 \ln k - c_2\right)} \to 0;\ \text{as } k \to \infty$$

且对任意 $n \in Z_+$， $P_{w,g,i}\left\{\eta_\infty^{(n)} = \infty\right\} = 1$， 即

$$P_{w,g,i}\left\{w^{(n)}(t),g^{(n)}(t)>0:\forall t>0\right\}=1.$$

对任意的$t>0$和$w\in\{\tau_e=\infty\}\cap\left\{w^{(n)}(t),g^{(n)}(t)>0:\forall t>0,n\in Z_+\right\}$，存在$n_0=n_0(\omega,t)$，使得

$$w(y)(\omega)\vee g(y)(\omega)<n_0;\ \forall 0\le y\le t.$$

成立，从而，有

$$w(t)(\omega)=w^{(n_0)}(t)(\omega)>0,$$
$$g(t)(\omega)=g^{(n_0)}(t)(\omega)>0.$$

结合$P_{w,g,i}\{\tau_e=\infty\}=1$，故有

$$P_{w,g,i}\{w(t)>0:t>0\}=P_{w,g,i}\{g(t)>0:t>0\}=1;\forall w,g>0. \tag{3.1}$$

如果$w>0,g=0$，则选择$c_2=0$，证明$P_{w,g,i}\{w(t)>0:t>0\}=1$。显然$P_{w,g,i}\{g(t)=0:t>0\}=1$。考虑初始值$w_0=0$和$g_0\ge 0$的情况，令$\varepsilon>0$满足充分小，即

$$\frac{a(i)\tilde{w}^2}{1+\tilde{w}+g}-\tilde{w}\mu_1(\tilde{w},i)-\tilde{w}(\tilde{w}+g)\xi_1(\tilde{w},g,i)\ge 0. \tag{3.2}$$

对任意$(\tilde{w},\tilde{g},\tilde{i})\in R^2\times\mathcal{M}$，满足$\tilde{w}+|\tilde{g}-g|<\varepsilon$。令

$$\tilde{\tau}_1=\inf\{t>0:w(t)+|g(t)-g|\ge\varepsilon\}.$$

由于随机过程$(w(t),g(t))$具有连续性，故$P_{0,g,i}\{\tilde{\tau}_1>0\}=1$。根据常数变易法公式[12]，将$w(t)$定义成如下形式：

$$w(t)=\Phi(t)\left[\int_0^t\Phi^{-1}(u)\left(\frac{a(\alpha(u))w(u)^2}{1+w(u)+g}-w(u)\mu_1(w(u),\alpha(u))-w(u)(w(u)+g)\xi_1(w(u),g(u),\alpha(u))\right)\mathrm{d}u\right] \tag{3.3}$$

其中$\Phi(t)=\exp\left(-\int_0^t\frac{\sigma_1^2(\alpha(u))}{2}\mathrm{d}u+\int_0^t\sigma_1(\alpha(u))\mathrm{d}B_2(u)\right)$，$t\in[0,\tilde{\tau}_1)$。

根据(3.2)，当$t\in(0,\tilde{\tau}_1]$时，有

$$\frac{a(\alpha(u))w(u)^2}{1+w(u)+g}-w(u)\mu_1(w(u),\alpha(u))-w(u)(w(u)+g)\xi_1(w(u),g(u),\alpha(u))>0.$$

由上式与(3.3)相结合，获得

$$P_{0,g,i}\{w(t)>0,t\in(0,\tilde{\tau}_1]\}=1.$$

由于过程$(w(t),g(t),\alpha(t))$具有强马尔科夫性，结合(3.1)得

$$P_{0,g,i}\{w(t)>0,t\in(0,\infty]\}=1.$$

定理得证。

定理 3.2 如果满足假设 2.1 和 2.2 条件，则下列结论成立

•如果$\lambda<0$，则$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln g(t)}{t}=\lambda$几乎处处成立。且$(w(t),\alpha(t))$分布弱收敛于唯一不变概率测度$\pi$。

•如果$\lambda=0$，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T w(t)\mathrm{d}t=a,\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t=0. \tag{3.4}$$

此外，如果对于 $i\in\mathcal{M}$，$\frac{\partial\mu_1(w,i)}{\partial w}$ 和 $\frac{\partial b(w,0,i)}{\partial w}$ 存在且正连续，则 $\frac{\partial\mu_1(w,i)}{\partial w}$ 的下界是一个正常数。

•如果 $\lambda>0$，则在空间 $R_+^{2,o}\times\mathcal{M}$ 中存在一个不变概率测度 μ^* 与 $\lim_{t\to\infty}\left\|P(t,w,i,\cdot)-\mu^*(\cdot)\right\|_{TV}=0$。此外，对于 $q\in(0,1]$，有 $\lim_{w\to\infty}\frac{\mu_1(w,i)}{w^q}>0, i\in\mathcal{M}$。并且有：

i) 对于 $q<1$ 的情况，对任意 $1\le\beta<\frac{1}{1-q}$

$$\lim_{t\to\infty}t^{\beta-1}\left\|P(t,w,g,i,\cdot)-\mu^*(\cdot)\right\|_{TV}=0,\ (w,g,i)\in R_+\times R_+^o\times\mathcal{M}; \tag{3.5}$$

ii) 对于 $q=1$ 的情况，此时存在一个 $\tilde{r}>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\tilde{r}t}\left\|\hat{P}(t,w,i,\cdot)-\mu^*(\cdot)\right\|_{TV}=0,\ (w,g,i)\in R_+\times R_+^o\times\mathcal{M}.$$

其中 $P(t,w,g,i,\cdot)$ 是 $(w(t),g(t),\alpha(t))$ 的转移概率。

证明：令 $g(t)=0$ 来检查边界，让 $\hat{w}(t)$ 成为(1.3)在 $g(t)=0$ 时的解，即

$$\mathrm{d}\hat{w}(t)=\left[\frac{a(t)\hat{w}(t)}{1+\hat{w}(t)}-\mu_1(\hat{w}(t),\alpha(t))-\xi_1(w(t),0,\alpha(t))\right]\hat{w}(t)\mathrm{d}t+\sigma_1(\alpha(t))\hat{w}(t)\mathrm{d}B_1(t)$$

根据比较定理，当 $w(t)>0$ 时，$\frac{a(t)w(t)}{1+w(t)}\le a(t)$，有

$$\mathrm{d}\hat{w}(t)\le\left[a(t)-\mu_1(\hat{w}(t),\alpha(t))\right]\hat{w}(t)\mathrm{d}t+\sigma_1(\alpha(t))\hat{w}(t)\mathrm{d}B_1(t). \tag{3.6}$$

对于充分小的 $\hat{w}(t)>0$，

$$\left[\hat{\mathcal{L}}\left(w+\ln\frac{w}{1+w}\right)\right](w,i)\le -1\quad\text{if } w<\hat{w}\ \text{ or }\ w>\frac{1}{\hat{w}}$$

$\hat{\mathcal{L}}$ 是方程(3.6)的相关算子。由于它的非退化性，方程(3.6)的扩散系数是正常返的，且系统(3.6)存在唯一不变测度 π。此外，

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\hat{P}(t,w,i,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{TV}=0,\ (w,i)\in(0,\infty)\times\mathcal{M}. \tag{3.7}$$

其中 $\|\cdot\|_{TV}$ 是测度的总变差范数，$\hat{P}(t,w,i,\cdot)$ 是 $(\hat{w}(t),\alpha(t))$ 的转移概率。由于 $P_{0,i}\{\hat{w}(t)>0,t>0\}=1$，当 $w=0$ 时，式(3.7)仍然成立。

当 $g(t)$ 很小时，$w(t)$ 可以用 $\hat{w}(t)$ 近似表示。由伊藤公式和随机过程 $(\hat{w}(t),\alpha(t))$ 的遍历性，当 $g(t)$ 很小时，它的长期增长率 $\frac{\ln g(t)}{t}$ 可以由临界值近似得到

$$\lambda:=\sum_{i\in\mathcal{M}}\int_{R_+^0}\left(b(w,0,i)-\tilde{k}(i)-\frac{\sigma_2^2(i)}{2}\pi(\mathrm{d}w,i)\right) \tag{3.8}$$

所以，符号 λ 决定了 $g(t)$ 是否收敛于 0。

1) $\lambda=0$ 的情况。

运用反证法进行论证。假设 $(w(t),g(t),\alpha(t))$ 在 $R_+^{2,o}\times\mathcal{M}$ 上有一个不变概率测度 μ^*。根据遍历性，

我们进一步得到对于每个初始值(w_0,g_0,i_0)，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T h\big(w(t),g(t),\alpha(t)\big)\mathrm{d}t=\sum_{i\in\mathcal{M}}\int_{R_+^{2,o}} h(w',g',i')\mu^*(\mathrm{d}w',\mathrm{d}g',i') \tag{3.9}$$

对任意的可测函数h来说是μ^*可积的。由于转移概率密度是连续且为正的，不变测度μ^*是唯一的，等价于$\tilde{m}\times\pi_\alpha$，其中$\tilde{m}$是在$R_+^{2,o}$上的勒贝格测度。因此，如果$\mu^*(A)=1$，那么当$t>0$时，对每个$(w,g,i)\in R_+^{2,o}\times\mathcal{M}$有$P_{w,g,i}\big(\big(w(t),g(t),\alpha(t)\big)\in A\big)=1$，这意味着对于任意初始值$(w_0,g_0,i_0)\in R_+^{2,o}\times\mathcal{M}$，式(3.9)成立。根据比较定理，当$\hat{w}(0)=w(0)$时，$P\{\hat{w}(t)\ge w(t)\}=1$。因此，由式(1.3)，(3.6)和$w(t)$，$\hat{w}(t)$是非负的，以及在$\mu_1(\cdot,\cdot)$上$w$是非减的，有

$$\limsup_{T\to\infty}E_{w,g,i}\frac{1}{T}\int_0^T\mu_1\big(w(t),\alpha(t)\big)\mathrm{d}t\le\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{g,i}\int_0^T\mu_1\big(\hat{w}(t),\alpha(t)\big)\mathrm{d}t\le a. \tag{3.10}$$

此外，由于$i\in M$，$\dfrac{\partial\mu_1(w,i)}{\partial w}$的下界是一个正常数，$\mu_1(0,i)=0$，因此存在一个$\overline{g}_1>0$，有

$$\mu_1(w,i)\ge\overline{g}_1,\ \forall i\in\mathcal{M}. \tag{3.11}$$

令$0<\overline{p}<\dfrac{\overline{g}_1}{2\hat{\sigma}_1^2}$和$0<\overline{g}_2<\dfrac{(1+\overline{p})g_1}{4}$通过伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}
&E_{w,i}\mathrm{e}^{\overline{g}_2T}\hat{w}^{1+\overline{p}}(T)\\
&=w^{1+\overline{p}}+E_{w,i}\int_0^T\mathrm{e}^{\overline{g}_2t}(1+\overline{p})\hat{w}^{\overline{p}+1}(t)\left[\big(a-\mu_1\big(\hat{w}(t),\alpha(t)\big)\big)+\frac{\overline{p}\sigma_1^2(\alpha(t))}{2}+\frac{\overline{g}_2}{1+\overline{p}}\right]\mathrm{d}t\\
&\le w^{1+\overline{p}}+E_{w,i}\int_0^T\mathrm{e}^{\overline{g}_2t}(1+\overline{p})\hat{w}^{\overline{p}+1}(t)\left(a-\frac{\overline{g}_1}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&\le w^{1+\overline{p}}+\frac{\overline{g}_3\mathrm{e}^{\overline{g}_2T}}{\overline{g}_2},
\end{aligned}$$

其中$\overline{g}_3:=(1+\overline{p})^2a^{\overline{p}+1}(a-\hat{\sigma}_1^2)\overline{g}_1$。

从而，得到

$$\limsup_{T\to\infty}E_{w,g,i}w^{1+\overline{p}}(T)\le\limsup_{T\to\infty}E_{w,i}\hat{w}^{1+\overline{p}}(T)\le\frac{\overline{g}_3}{g_2}. \tag{3.12}$$

此外，还有

$$E_{w,g,i}\big(w(T)+g(T)\big)^{1+\overline{p}}\text{是在}T\text{中一致有界的}. \tag{3.13}$$

根据伊藤公式，得到

$$\begin{aligned}
\frac{E_{w,i}\hat{w}^{1+\overline{p}}(T)}{T}=&\frac{w^{1+\overline{p}}}{T}+\frac{a(1+\overline{p})}{T}E_{w,i}\int_0^T\hat{w}^{1+\overline{p}}(t)\mathrm{d}t\\
&-\frac{1+\overline{p}}{T}E_{w,i}\int_0^T\hat{w}^{1+\overline{p}}(t)\mu_1\big(\hat{w}(t),\alpha(t)\big)\mathrm{d}t\\
&+\frac{\overline{p}(1+\overline{p})}{2T}E_{w,i}\int_0^T\sigma_1^2\big(\alpha(t)\big)\hat{w}^{1+\overline{p}}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

结合式(3.12)，可以知道，对于$\overline{g}_4<\infty$，有

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,i}\int_0^T\hat{w}^{1+\overline{p}}(t)\mu_1\big(\hat{w}(t),\alpha(t)\big)\mathrm{d}t\le\overline{g}_4. \tag{3.14}$$

根据式(3.6)和(3.12)，获得

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,i}\int_0^T\left(a-\mu_1\left(\hat{w}(t),\alpha(t)\right)\right)\hat{w}(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{E_{w,i}\hat{w}(T)-w_0}{T}=0.$$

因此，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,i}\int_0^T\mu_1\left(\hat{w}(t),\alpha(t)\right)\mathrm{d}t=a. \tag{3.15}$$

根据(1.3)，可知道

$$E_{w,g,i}\int_0^T w(t)\left(w(t)+g(t)\right)\xi_1\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)\mathrm{d}t\le aT+w_0,\ T\ge 0.$$

此外，根据式(3.13)的一致有界性，ξ_1 的线性增长有界性，式(3.10)的几乎肯定收敛以及控制收敛定理，得到

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\left(\frac{a\left(\alpha(t)\right)w^2(t)}{1+w(t)+g(t)}-\mu_1\left(w(t),\alpha(t)\right)w(t)\right)\mathrm{d}t\\&\le\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\left(a-\mu_1\left(w(t),\alpha(t)\right)\right)w(t)\,dt\\&=\sum_{i'\in\mathcal{M}}\int_{R_+^{2,o}}w'\left(a-\mu_1(w',i')\right)\mu^*\left(\mathrm{d}w',\mathrm{d}g',i'\right)\\&=:\hat{g}\end{aligned} \tag{3.16}$$

根据(1.3)和(3.13)，容易知道，极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T w(t)\left(w(t)+g(t)\right)\xi_1\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)\mathrm{d}t$$

存在，且

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\left(\frac{a\left(\alpha(t)\right)w^2(t)}{1+w(t)+g(t)}-w(t)\mu_1\left(w(t),\alpha(t)\right)-w(t)\left(w(t)+g(t)\right)\xi_1\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)\right)\mathrm{d}t\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{E_{w,g,i}w(T)-w_0}{T}=0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

根据法图引理，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T w(t)\left(w(t)+g(t)\right)\xi_1\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)\mathrm{d}t=\hat{g}\ge\sum_{i'\in\mathcal{M}}\int_{R_+^{2,o}}w'\xi_1\left(w',g',i'\right)\mu^*\left(\mathrm{d}w',\mathrm{d}g',i'\right)>0.$$

根据(3.15)和(3.16)，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\left[\mu_1\left(\hat{w}(t),\alpha(t)\right)-\mu_1\left(w(t),\alpha(t)\right)\right]\mathrm{d}t=\hat{g},\ \ w,g\ge 0,i\in\mathcal{M}. \tag{3.18}$$

令 $H>1$ 为一个充分大的常数并且满足 $\frac{\overline{g}_4}{H^p}\le\frac{\hat{g}}{2}$，得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T 1_{\{\hat{w}(t)>H\}}\left(\mu_1\left(\hat{w}(t),\alpha(t)\right)-\mu_1\left(w(t),\alpha(t)\right)\right)\mathrm{d}t\\&\le\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\frac{\hat{w}^p(t)}{H^{\overline{p}}}\mu_1\left(\hat{w}(t),\alpha(t)\right)\mathrm{d}t\le\frac{\overline{g}_4}{H^{\overline{p}}}\le\frac{\hat{g}}{2}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

根据(3.18)和(3.19)，得出

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T 1_{\{\hat{w}(t)\le H\}}\left[\mu_1\left(\hat{w}(t),\alpha(t)\right)-\mu_1\left(w(t),\alpha(t)\right)\right]\mathrm{d}t\ge\frac{\hat{g}}{2}. \tag{3.20}$$

因为$\dfrac{\partial\mu_1(w,0,i)}{\partial w}$是连续和非负的，所以存在一个$\overline{g}_5^H<\infty$，有

$$\mu_1(w_1,i)-\mu_1(w_2,i)\le\overline{g}_5^H(w_1-w_2),\ \forall 0\le w_2\le w_1\le H, i\in\mathcal{M}.$$

因此，式(3.20)可以表示为

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T 1_{\{\hat{w}(t)\le H\}}\left(\hat{w}(t)-w(t)\right)\mathrm{d}t\ge\frac{\theta\hat{g}}{2\overline{g}_5^H}. \tag{3.21}$$

类似地，存在一个$\overline{g}_6^H>0$，对任意的$0\le w_2\le w_1\le H$有

$$b(w_1 0,i)-b(w_2,0,i)\ge\overline{g}_6^H(w_1-w_2),\ i\in\mathcal{M}.$$

因此，结合$b(w,g,i)$在g上是非增的，我们知道，存在$g\ge0$，$0\le w_2\le w_1\le H$，有

$$b(w_1 0,i)-b(w_2,g,i)\ge\overline{g}_6^H(w_1-w_2),\ i\in\mathcal{M}. \tag{3.22}$$

由式(30.21)和(3.22)，得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\left(b\left(\hat{w}(t),0,\alpha(t)\right)-b\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)\right)\mathrm{d}t\\
&\ge\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T 1_{\{\hat{w}(t)\le H\}}\left(b\left(\hat{w}(t),0,\alpha(t)\right)-b\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)\right)\mathrm{d}t\\
&\ge\overline{g}_6^H\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T 1_{\{\hat{w}(t)\le H\}}\left(\hat{w}(t)-w(t)\right)\mathrm{d}t\\
&\ge\frac{\overline{g}_6^H\hat{g}}{2\overline{g}_5 H}.
\end{aligned}$$

因此，获得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i'\in\mathcal{M}}\int_{R_+^{2,o}}\left(b\left(w',g',i'-\tilde{k}(i)-\frac{\sigma_2^2(i)}{2}\right)\right)\mu^*(\mathrm{d}g',\mathrm{d}w',i')\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\left(b\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)-\tilde{k}\left(\alpha(t)\right)-\frac{\sigma_2^2\left(\alpha(t)\right)}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&\le\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T\left(b\left(\hat{w}(t),0,\alpha(t)\right)-\tilde{k}\left(\alpha(t)\right)-\frac{\sigma_2^2\left(\alpha(t)\right)}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&\le\lambda-\frac{\overline{g}_6^H\hat{g}}{2\overline{g}_5^H}=-\frac{\overline{g}_6^H\hat{g}}{2\overline{g}_5^H}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

根据式(1.3)，伊藤公式，遍历性以及(3.23)，得到

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{\ln g(T)}{T}&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(g(0)+\int_0^T\sigma_2\left(\alpha(t)\right)\mathrm{d}B_2(t)\right)\\
&\quad+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(b\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)-\tilde{k}\left(\alpha(t)\right)-\mu_2\left(\alpha(t)\right)\right)\\
&\le-\frac{\overline{g}_6^H\hat{g}}{2\overline{g}_5^H}<0.\ \text{a.s}
\end{aligned}$$

综合上述，得

$$\mathbb{P}_{w,g,i}\left\{\lim_{T\to\infty} g(T)=0\right\}=1.$$

这个结果与随机过程在空间 $R_+^{2,o}\times\mathcal{M}$ 上具有不变概率测度的假设相矛盾。此外，$\pi\times\delta^*$ 是随机过程 $\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)$ 在 $R_+\times\mathcal{M}\times R_+$ 中的唯一不变测度，δ^* 是度量为 0 的狄拉克测度。考虑经验测度

$$\Pi_t^{w,g,i}(\cdot)=\frac{1}{t}\int_0^t P_{w,g,i}\left\{\left(w(s),g(s),\alpha(s)\right)\in\cdot\right\}\mathrm{d}s.$$

回顾式(3.13)，对每一个 $(w,g,i)\in R_+^2\times\mathcal{M}$，函数族 $\left\{\Pi_t^{w,g,i}(\cdot),t\ge 0\right\}$ 是紧集。由[13]，$\Pi_t^{w,g,i}(\cdot)$ 在 $t\to\infty$ 时的任何弱极限都是 $\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)$ 的不变概率测度。由于 $\pi\times\delta^*$ 是唯一不变概率测度，且 $E_{w,g,i}\left(w(t)+g(t)\right)^{1+\bar{p}}$ 在 T 中有界，故 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T w(t)\mathrm{d}t=a$，$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_{w,g,i}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t=0$。

2) $\lambda<0$ 的情况。

令 $\hat{g}_v(t)$ 成为以下方程的解

$$\mathrm{d}\hat{g}(t)=\frac{b(i)\hat{w}(t)}{1+\hat{w}(t)}-\tilde{k}(i)\hat{g}(t)\mathrm{d}t+\sigma_2(i)\hat{g}(t)\mathrm{d}B(t),\ \hat{g}(0)=v,$$

其中 $\hat{w}(t)$ 是(3.6)的解。根据比较定理，给定 $\hat{w}(0)=w(0)=u,\ g(0)=\hat{g}(0)=v$，则

$$g_{u,v}(t)\le\hat{g}_v(t)$$

几乎处处成立。再次利用比较定理，获得

$$\frac{b\hat{w}(t)}{1+\hat{w}(t)}\le b\le b\hat{w}(t),\ \ \hat{w}(t)>0.$$

根据伊藤公式，$\hat{w}_u(t)$ 的遍历性，

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\hat{g}_v(t)&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(\frac{b\hat{w}(\tau)}{1+\hat{w}(\tau)}-\left(\tilde{k}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\right)\mathrm{d}\tau+\frac{\sigma_2B(t)}{t}\\&\le\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left(b\hat{w}(t)-\left(\tilde{k}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\right)\mathrm{d}\tau+\frac{\sigma_2B(t)}{t}\\&=b-\left(\tilde{k}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)=\lambda<0,\quad\text{a.s.}\end{aligned}$$

再由假设 2.2 的条件(2)，类似 $\lambda>0$ 情况的证明，得到

$$E_{g,w,i}V_5^{\frac{\rho_4}{\rho_3}}\left(w\left(n^*T_2\right),g\left(n^*T_2\right),\alpha\left(n^*T_2\right)\right)\le\hat{q}^*V_5^{\frac{\rho_4}{\rho_3}}(w,g,i)+\hat{K}_*;i\in\mathcal{M},w\ge 0,g\le\varepsilon_3,$$

其中 $\beta_3,\beta_4,n^*,T_2,\hat{q}^*\in(0,1),\hat{K}^*,\varepsilon_3$ 是常数，$V_5(w,g,i)=\left(1-\rho_3\gamma_i\right)g^{\rho_3}$。根据([14]，定理 5.1 和 5.2]的证明，获得 $\left(w(t),\alpha(t)\right)$ 分布弱收敛于唯一不变概率测度 π 的结果。

3) $\lambda>0$ 的情况。

这是转移概率的总变差收敛到一个不变测度的证明。由[15] $W(w,g,i)=w+g,V(w,g,i)=\ln\frac{g}{1+g}$，得到 $g(t)$ 的持久性和 $\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)$ 在 $R_+^{2,o}$ 上的不变概率测度的存在性。由于扩散项的非退化性，对任意的 $t_0>0$，随机过程 $\left\{\left(w(nt_0),g(nt_0),\alpha(nt_0),n\in Z_+\right)\right\}$ 具有不可约性和强费勒性质，则随机过程 $\left(w(t),g(t),\alpha(t)\right)$ 在 $R_+^{2,o}$ 上的转移概率到其不变概率测度的总变差具有收敛性[11]。

现在，加以考虑收敛速度。假设 2.2 的条件(3)成立，回顾(3.6)，存在一个 $\hat{H}>0$，有

$$\sum_{i\in\mathcal{M}}\left(\inf_{g\geq\hat{H}} b(w,0,i)-\tilde{k}(i)-\frac{\sigma_2^2(i)}{2}\right)\pi_\alpha(i)>0. \tag{3.24}$$

因此，由于 $b(w,g,i)$ 在 $g=0$ 的一致连续性，存在一个 $\varepsilon_1>0$，有

$$4\tilde{\lambda}:=\sum_{i\in\mathcal{M}}\hat{h}_i\pi_\alpha(i)>0, \tag{3.25}$$

其中

$$\hat{h}_i:=\inf_{(w,g)\in[\hat{H},\infty)\times[0,\varepsilon_1]}\{b(w,g,i)\}-\tilde{k}(i)-\frac{\sigma_2^2(i)}{2}.$$

由于 $\sum_{i\in\mathcal{M}}\left(4\tilde{\lambda}-\hat{h}_i\right)\pi_\alpha(i)=0$，根据佛雷德霍姆替代，存在 $\varphi_i>0, i\in\mathcal{M}$，有

$$\sum_{j\in\mathcal{M}}q_{ij}\varphi_j=4\tilde{\lambda}-\hat{h}_i,\ \forall i\in\mathcal{M}.$$

令 ρ_1 满足充分小，有

$$\rho_1\varphi_i\left(-4\tilde{\lambda}+\hat{h}_i\right)<\tilde{\lambda}(1-\rho_1\varphi_i),\ \rho_1\sigma_2^2(i)<4\tilde{\lambda},\ \rho_1\varphi_1<1,\ \forall i\in\mathcal{M}.$$

定义 $V_3=(w,g,i)=(1-\rho_1\varphi_i)g^{-\rho_1}$，获得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_3(w,g,i)&=\rho_1V_3(w,g,i)\left(-b(w,g,i)+\tilde{k}(i)+\frac{1+\rho_1}{2}\sigma_2^2(i)\right)\\&\quad+\rho_1\left(-4\tilde{\lambda}+\hat{h}_i\right)V_3(w,g,i)+\rho_1^2\varphi_i\left(-4\tilde{\lambda}+\hat{h}_i\right)w^{-\rho_1}\\&\leq-2\rho_1\lambda V_3(w,g,i)+\rho_1^2\varphi_i\left(-4\tilde{\lambda}+\hat{h}_i\right)w^{-\rho_1}\\&\leq-\rho_1\tilde{\lambda}V_3(w,g,i),\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中 $i\in\mathcal{M}$，$w\geq\hat{H}$，$g\leq\varepsilon_1$。由于

$$\left[\mathcal{L}_{\frac{1}{g}}\right](w,g,i)\leq\frac{\tilde{k}(i)+\sigma_2^2(i)}{g}\leq\frac{\hat{k}+\hat{\sigma}_2^2}{g},$$

则，有

$$E_{w,g,i}g^{-1}(t)\leq \mathrm{e}^{\left(\hat{k}+\hat{\sigma}_2^2\right)t}g^{-1},\ t\geq0,(w,g,i)\in R_+^{2,o}\times\mathcal{M}. \tag{3.27}$$

另一方面，由可知式(3.8)，存在一个 $T_1>1$，满足

$$-\ln(1-\rho_1\varphi_1)<\frac{\rho_1\lambda T_1}{4},\ \forall i\in\mathcal{M}. \tag{3.28}$$

因此，

$$\frac{1}{T}E_{w,0,i}\int_0^T\left(b(w(t),0,\alpha(t))-\tilde{k}(\alpha(t))-\frac{\sigma_2^2(\alpha(t))}{2}\right)\mathrm{d}t>\frac{3\lambda}{4},i\in\mathcal{M},T\geq T_1,w\leq\hat{H}. \tag{3.29}$$

令 $n_*\in Z_+$ 和 $n_*>\dfrac{\hat{k}+\hat{\sigma}_2^2}{\tilde{\lambda}}+1$，根据([13]，命题 4.1)，存在一些 $\rho_2\in(0,\rho_1)$ 和 $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$，满足

$$E_{w,g,i}g^{-\rho_2}(t)\le e^{-\frac{\rho_2\lambda t}{2}}g^{-\rho_2}\quad \text{for } i\in\mathcal{M}, t\in[T_1,n_*T_1], w\le\hat{H}, g<\varepsilon_2. \tag{3.30}$$

利用定义的 ρ_2，由式(3.28)和(3.30)，得

$$\begin{aligned}E_{w,g,i}V_3^{\frac{\rho_1}{\rho_2}}(w(t),g(t),\alpha(t))&\le E_{w,g,i}g^{-\rho_2}(t)\le e^{-\frac{\rho_2\lambda t}{2}}g^{-\rho_2}\\&=e^{-\frac{\rho_2\lambda t}{2}}V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i)(1-\rho_1\varphi_i)^{-\frac{\rho_2}{\rho_1}}\\&\le e^{-\frac{\rho_2\lambda t}{2}}V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i)e^{-\frac{\rho_2\lambda t}{4}}\\&\le e^{-\frac{\rho_2\lambda t}{2}}V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i).\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中 $\forall i\in\mathcal{M}$，$t\in[T_1,n_*T_1]$，$w\le\hat{H}$，$g<\varepsilon_2$。

由于 $\rho_2<\rho_1$，应用伊藤公式，由(3.28)，得

$$\mathcal{L}V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i)\le-\rho_2\tilde{\lambda}V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i),\forall i\in\mathcal{M}, w\le\hat{H}, g\le\varepsilon_2. \tag{3.32}$$

当 g 足够小且 $w\ge0$ 时，应用(3.31)和(3.32)，通过 $V_3^{\bar{\rho}_1}(w,g,i)$ 估计 $E_{w,g,i}V_3^{\bar{\rho}_1}(w(t),g(t),\alpha(t))$。同理，使用式(3.31)，(3.32)和(3.27)，根据([13]，定理 4.1)，存在 $q_*\in(0.1)$ 和 $k_*>0$，有

$$E_{w,g,i}V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w(n_*T_1),g(n_*T_1),\alpha(n_*T_1))\le q^*V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i)+k_*. \tag{3.33}$$

此外，如果 $\liminf\limits_{w\to\infty}\frac{\mu_1(w,i)}{w^q}>0$，对 $q\in(0,1]$，$i\in\mathcal{M}$，有 $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2>0$，

$$[\mathcal{L}(\kappa_0w+g)](w,g,i)\le\frac{a(i)wk_0}{1+w+g}-k_0\mu_1(w,i)-\tilde{k}(i)g\le\tilde{c}_1-\tilde{c}_2(k_0w+g)^q. \tag{3.34}$$

利用式(3.33)和(3.34)以及([14]，命题 22)，获得

$$E_{w,g,i}\sum_{k=1}^{\tau^*(\tilde{H})}(k+1)^{\beta-1}\le c_\beta(\tilde{H})\left(V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i)+\kappa_0w+g+1\right), \tag{3.35}$$

其中 $1\le\beta<\frac{1}{1-q}$，$\tilde{H}$ 是 $[0,\infty)\times(0,\infty)$ 上的紧集，$c_\beta(\tilde{H})$ 是正常数，和

$$r^*(\tilde{H})=\inf\{k\in Z_+:(w(kn_*T_1),g(kn_*T_1))\in\tilde{H}\}.$$

由于 $w(t)=0$ 时，$g(t)$ 的漂移项是非负的，完备集 $\tilde{H}$ 在 $[0,\infty)\times(0,\infty)$ 上是紧集[9]。根据(3.35)，参考文献[16]，有

$$\lim_{k\to\infty}(k+1)^{\beta-1}\left\|P(kn_*T_1,w,g,i,\cdot)-\mu^*(\cdot)\right\|_{TV}=0.$$

对任意的 $1\le\beta<\frac{1}{1-q}$，获得

$$\lim_{k\to\infty}t^{\beta-1}\left\|P(t,w,g,i,\cdot)-\mu^*(\cdot)\right\|_{TV}=0.$$

如果 $q=1$，由式(3.33)和(3.34)，得

$$E_{w,g,i}\left[V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w(n_*T_1),g(n_*T_1),\alpha(n_*T_1))+\kappa_0w(n_*T_1)+g(n_*T_1)\right]\le\tilde{q}^*\left(V_3^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(w,g,i)+\kappa_0w+g\right)+\tilde{k}_*,$$

其中 $\tilde{q}^* \in (0,1)$ 和 $\tilde{k}_* > 0$。

对 $\tilde{r} > 0$，有

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{\tilde{r}k} \left\| P\left(kn_* T_1, w, g, i, \cdot\right) - \mu^*\left(\cdot\right) \right\|_{TV} = 0.$$

即随机过程的转移概率 $P(kn_* T_1, w, g, i, \cdot)$ 收敛到不变测度 $\mu^*(\cdot)$，并获得指数收敛速度，证明完成。

基金项目

国家自然科学基金(41665006，11561009)，广西自然科学基金(2018GXNSFAA380240)。

参考文献

[1] Benelli, G. and Mehlhorn, H. (2018) Mosquito Borne Diseases Implications for Public Health. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-319-94075-5

[2] Fernandes, J., Moise, I., *et al*. (2018) Revamping Mosquito-Borne Disease Control to Tackle Future Threats. *Trends in Parasitology*, **34**, 359-368. https://doi.org/10.1016/j.pt.2018.01.005

[3] Benelli, G., Caselli, A. and Canale, A. (2017) Nanoparticles for Mosquito Control: Challenges and Constraints. *Journal of King Saud University—Science*, **29**, 424-435. https://doi.org/10.1016/j.jksus.2016.08.006

[4] Blayneh, K. and Mohammed-Awel, J. (2014) Insecticide-Resistant Mosquitoes and Malaria Control. *Mathematical Biosciences*, **25**, 14-26. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2014.03.007

[5] Iturbe-Ormaetxe, I., *et al*. (2011) Wolbachia and the Biological Control of Mosquito-Borne Disease. *EMBO Reports*, **12**, 508-518. https://doi.org/10.1038/embor.2011.84

[6] Alphey, L. (2014) Genetic Control of Mosquitoes. *Annual Review of Entomology*, **59**, 205-224. https://doi.org/10.1146/annurev-ento-011613-162002

[7] Wilke, A., Bruno, B., *et al*. (2012) Genetic Control of Mosquitoes: Population Suppression Strategies. *Revista do Instituto de Medicina Tropical de Sao Paulo*, **54**, 287-292. https://doi.org/10.1590/S0036-46652012000500009

[8] McLean, K. and Jacobs-Lorena, M. (2016) Genetic Control of Malaria Mosquitoes. *Trends in Parasitology*, **32**, 174-176. https://doi.org/10.1016/j.pt.2016.01.002

[9] Cai, L., Ai, S. and Li, J. (2014) Dynamics of Mosquitoes Populations with Different Strategies for Releasing Sterile Mosquitoes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **74**, 1786-1809. https://doi.org/10.1137/13094102X

[10] Scheuring, I. (1999) Allee Effect Increases the Dynamical Stability of Populations. *Journal of Theoretical Biology*, **198**, 407-414. https://doi.org/10.1006/jtbi.1999.0966

[11] Zhu, C. and Yin, G. (2009) On Strong Feller, Recurrence, and Weak Stabilization of Regime-Switching Diffusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 2003-2031. https://doi.org/10.1137/080712532

[12] Kabouris, J. and Georgakakos, A. (1996) Parameter and State Estimation of the Activated Sludge Process I. Model Development. *Water Research*, **30**, 2853-2865. https://doi.org/10.1016/0043-1354(95)00325-8

[13] Hening, A. and Nguyen, D. (2018) Coexistence and Extinction for Stochastic Kolmogorov Systems. *Annals of Applied Probability*, **28**, 1893-1942. https://doi.org/10.1214/17-AAP1347

[14] Fort, G. and Roberts, G. (2005) Subgeometric Ergodicity of Strong Markov Processes. *Annals of Applied Probability*, **15**, 1565-1589. https://doi.org/10.1214/105051605000000115

[15] Benaim, M. (2018) Stochastic Persistence.

[16] Tuominen, P. and Tweedie, R. (1994) Subgeometric Rates of Convergence of f-Ergodic Markov Chains. *Advances in Applied Probability*, **26**, 775-798. https://doi.org/10.2307/1427820