Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 676-684
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114082

Hans汉斯

海森堡型群上的Q_{r_1,r_2}函数空间

周　珊，黄小青，董建锋

上海大学理学院，上海
Email: zhoushanlxh@163.com, 1195798922@qq.com, silencedjf@163.com

收稿日期：2021年3月21日；录用日期：2021年4月23日；发布日期：2021年4月30日

摘　要

函数空间理论在调和分析中有着十分重要的作用。本文研究海森堡型群N上的双指标Q型函数空间$Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$。在Siegel型上半空间$\mathrm{N}\times\mathrm{R}^+$上利用Carleson测度给出$Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$的等价刻画，并且给出了$Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$与$\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$的嵌入关系。

关键词

海森堡型群，Poisson核，Carleson测度

The Q_{r_1,r_2} Spaces on the H-Type Groups

Shan Zhou, Xiaoqing Huang, Jianfeng Dong

College of Sciences, Shanghai University, Shanghai
Email: zhoushanlxh@163.com, 1195798922@qq.com, silencedjf@163.com

Received: Mar. 21st, 2021; accepted: Apr. 23rd, 2021; published: Apr. 30th, 2021

Abstract

Function spaces play an important role in harmonic analysis. In this paper, we study the Q-type space $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ on the H-type group N. We show the characterization of $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ by the Carleson measure on the Siegel type domain $\mathrm{N}\times\mathrm{R}^+$. Furthermore, the embedding result between $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ and $\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$ is founded.

Keywords

H-Type Group, Poisson Kernel, Carleson Measure

文章引用: 周珊, 黄小青, 董建锋. 海森堡型群上的Q_{r_1,r_2}函数空间[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 676-684.
DOI: 10.12677/pm.2021.114082

1. 引言

本函数空间理论是分析学中的一个经典问题，经典的 $Q_p(\mathbb{D})$ ($0<p<1$)空间可以看成 $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ 空间的一种扩展。早在 1995 年时，由 Aulaskari、肖和赵等人建立了初始的 Q_p 空间[1] [2]。其最初是用来研究复平面 $\mathbb{C}$ 的单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯函数类的共性不变性质。

对任意的 $p>-1$，我们定义 $Q_p(\mathbb{D})$ 是由全纯函数构成的函数空间，这些全纯函数需满足

$$\|f\|_{Q_P}=\left(\sup_{w\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^2 g^p(z,w)\mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty,$$

其中 $g(z,w)=\log|(1-\bar{w}z)/(z-w)|$ 是 $\mathbb{D}$ 上的格林函数，$\mathrm{d}A(z)$ 为 $\mathbb{D}$ 上的 Lebesgue 测度。

文献[2] [3] [4] [5]证明了在复平面上，$p>1$ 时，Q_p 是 Bloch 空间 B。$-1<p<0$ 时，Q_p 仅包含常数函数。特别地，Q_0 为 Dirichlet 空间 D；$Q_1=\mathrm{BMOA}$。随后，Essen、彭与肖等人研究了 $\mathbb{R}^n$ 上的 Q_α 空间[6]。肖根据 Q 空间理论考虑了 Navier-Stokes 方程解的适定性问题[7]。在文献[8] [9] [10]中有更多关于 $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ 的实际应用问题。Q 型函数空间的结构与 BMO 的结构极其相似。对于非欧几里得空间，刘、彭和王将 $Q_p(\mathbb{D})$ 空间推广到海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 上[11]。此外，Q 型空间也被广泛地应用到偏微分方程中。在[9]中，李和翟研究了有初值的 quasi-geostrophic 方程的适定性与正则性问题。在研究某些极大算子的性质时，Carleson 测度和帐篷空间是有效的工具。Carleson 和 Luecking 利用 Carleson 测度分别刻画了 Hardy 空间及 Bergman 空间[12] [13]。在[14]中，董利用 Carleson 测度证明了 $Q_p(\mathrm{N})$ 的等价刻画。

本文主要研究海森堡型群 N 上的双指标 Q 型空间 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$。关于海森堡型群，1980 年在文献[15]中 Kaplan 首次引入海森堡型群，并研究了海森堡型群上次 Laplace 算子基本解的表达式及其性质。本文结构如下，第一节介绍了海森堡型群及 Poisson 核的相关知识。第二节中给出 $\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$ 和 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 的定义，并给出了 $\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$ 和 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 的嵌入关系。最后，在第三节中利用 Carleson 测度及 Poisson 积分证明了 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 的等价刻画。

下面是本文的主要结果

定理 1. i) 若 $r_1+r_2=r_1'+r_2'$，且 $r_1<r_1'$，则 $Q_{r_1',r_2'}(\mathrm{N})\subset Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$；

ii) 若有 $r_2<0$ 或 $r_1>\dfrac{d+2}{d}$，则 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 仅包含常数函数；

iii) 若任意的 $\beta>0$，有 $r_1<1$ 且 $\beta+1=r_1+r_2$，那么 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})=\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$。

定理 2. 假设 $f\in L^2_{loc}(\mathrm{N})$ 满足 $\int_{\mathrm{N}}\dfrac{f(n)}{1+|n|^{2d}}\mathrm{d}n<\infty$。则对任意的 r_1、r_2 满足 $1<r_1\le\dfrac{d+2}{d}$ 及 $r_1+r_2\in\left(1,\dfrac{d+2}{d}\right)$，我们说 $f\in Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 当且仅当存在一常数 C 使得

$$\int_{S(I)}|\nabla F(z)|^2 a^{d(1-r_1)+1}\mathrm{d}z\le C|I|^{r_2}$$

对所有的方体 $I\subset\mathrm{N}$，也就是，$|\nabla F(z)|^2 a^{d(1-r_1)+1}\mathrm{d}z$ 是 r_2-Carleson 测度。

2. 预备知识

2.1. 海森堡型群 N

令 $\mathfrak{g}$ 为二阶幂零李代数，其上有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，中心表示为 $\mathfrak{z}$。我们称 $\mathfrak{g}$ 为海森堡型李代数，若 $\left[\mathfrak{z}^{\perp},\mathfrak{z}^{\perp}\right]=\mathfrak{z}$ 且对任意的 $t\in\mathfrak{z}$，映射 $J_t:\mathfrak{z}^{\perp}\to\mathfrak{z}^{\perp}$ 表示为

$$\langle \mathrm{J_t u, w}\rangle := \langle t,[u,w]\rangle,\quad u,w\in\mathfrak{z},$$

且 $|t|=1$ 时，J_t 为正交映射。海森堡型群为单连通的二阶幂零李群，其李代数是海森堡型李代数。

给定 $\rho\neq 0$，且属于 $\mathfrak{z}$ 的对偶，在 $\mathfrak{z}^{\perp}$ 上定义一斜对称矩阵 $A(\rho)$ 为 $\langle A(\rho)u,w\rangle=\rho([u,w])$，$u,w\in\mathfrak{z}$。$\mathfrak{z}$ 中的元素 Z_ρ 定义为

$$\langle A(\rho)u,w\rangle=\rho([u,w])=\langle J_{Z_\rho}u,w\rangle。$$

选择 $\mathfrak{z}^{\perp}$ 的一组标准正交基 $\left\{E_1(\rho),\cdots,E_n(\rho),\bar{E}_1(\rho)\cdots,\bar{E}_n(\rho)\right\}$ 使得

$$A(\rho)E_i(\rho)=\left|Z_\rho\right|J_{\frac{Z_\rho}{|Z_\rho|}}E_i(\rho)=|\rho|\bar{E}_i(\rho),A(\rho)\bar{E}_i(\rho)=-|\rho|E_i(\rho)。$$

若 $\dim\mathfrak{z}=m$，$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m\}$ 为 $\mathfrak{z}$ 的一组标准正交基，满足 $\rho(\varepsilon_1)=|\rho|$，$\rho(\varepsilon_j)=0(1\le j\le m)$，则

$$(z,t)=(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_iE_i+y_i\bar{E}_i\right)+\sum_{j=1}^{m}t_j\varepsilon_j。$$

这样的坐标称为海森堡坐标。一般海森堡型群的运算为

$$(z,t)(z',t')=\left(z+z',t+t'+\frac{1}{2}[z,z']\right),$$

其中 $[z,z']_j=\langle z,U^jz'\rangle$，$U^j(j=1,\cdots,m)$ 为合适的斜对称矩阵。特别地，$\langle z,U^1z'\rangle=\sum_{j=1}^{n}\left(x_j'y_j-y_j'x_j\right)$ [16]。

本文中的海森堡型群 N 由集合 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\left\{(x',u'):x'\in\mathbb{R}^p,u'\in\mathbb{R}^q\right\}$ 构成，其中 $x'=\left(x_1,x_2,\cdots,x_p\right)\in\mathbb{R}^p$，$u'=\left(u_1,u_2,\cdots,u_q\right)\in\mathbb{R}^q$，且元素满足运算 $(x',u')\cdot(y',v')=\left(x'+y',u'+v'+\frac{1}{2}[x',y']\right)$，其中 $[x',y']_j=\langle x',U^jy'\rangle$，$U^j(j=1,\cdots,q)$ 为合适的斜对称矩阵。显然这里的 p 为偶数。对 $a\in\mathbb{R}^+$，定义 Siegel 型上半空间 $\mathrm{N}\times\mathbb{R}^+$ 为 $\mathrm{S}=\left\{(w,a):w\in\mathrm{N},a\in\mathbb{R}^+\right\}$，其中 $w=(x',u')\in\mathrm{N}$，S 中的元素也可记为 (x',u',a)。且定义 N 为 S 的边界，a 则称为点 (w,a) 到 S 边界的高度。N 在 S 上有保高度的作用。贯穿下面的文章，对 $z=(x',u',a)$、$s=(y',v',a_0)\in\mathrm{S}$，我们写作 $z=(w,a)$、$s=(n,a_0)$，其中 $a,a_0\in\mathbb{R}^+$，、$w=(x',u')$、$n=(y',v')\in\mathrm{N}$。海森堡型群上的伸缩 $\delta_t(w)$ 定义为 $t\cdot w=\left(tx',t^2u'\right)$。

N 上可以定义一组等价的范数

$$|w|=\left(\frac{1}{16}|x'|^4+|u'|^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

和

$$|w|_\infty=\max\left\{\frac{1}{2}|x_1|,\cdots,\frac{1}{2}|x_p|,\sqrt{|u_1|},\cdots,\sqrt{|u_q|}\right\}。$$

我们在 N 和 S 上分别使用 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}w=\mathrm{d}x'\mathrm{d}u'$ 和 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}w\mathrm{d}a$，在极坐标下 $\mathrm{d}w=\mathrm{d}x'\mathrm{d}u'=r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma_w$，

$\mathrm{d}\sigma_w$ 为单位球面的面积元。在 $\mathbb{N}$ 中以 $n=(y',v')$ 为心半径为 r 的球体我们定义为 $\left\{w=(x',u'):\left|n^{-1}w\right|<r\right\}$。而 $\mathbb{N}$ 中以 $n=(y',v')$ 为心 $l(I)$ 为边长的方体 I 则定义为

$$I=\left\{w:\left|n^{-1}w\right|_\infty\le\frac{l(I)}{2}\right\}。$$

这里 I 的体积我们用 $|I|$ 表示，易知 $|I|=2^{p-q}\left[l(I)\right]^d$，其中 $d=p+2q$。以 $2^k l(I)$ 为边长且与 I 同心的方体我们用 $I_k\,(k\in\mathbb{N})$ 表示。$tI\,(t>0)$ 是与 I 同心边长为 $tl(I)$ 的方体。

2.2. Carleson 测度与 Poisson 积分

对任意以 $n=(y',v')$ 为心的方体 $I\subset\mathbb{N}$，定义 Carleson 盒子 $S(I)\subset\mathbb{S}$ 为

$$S(I)=\left\{z=(x',u',a)=(w,a)\in\mathbb{S}:\left|n^{-1}w\right|_\infty\le\frac{l(I)}{2},a\le l(I)\right\}。$$

$\mathbb{S}$ 上的一正 Borel 测度 μ 称为 p-Carleson 测度，如果对 $p>0$，存在常数 $M>0$，使得

$$\mu(S(I))\le M|I|^p$$

这里 $I\subset\mathbb{N}$。

容易得到

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{2}x_jC_{ji}^l\frac{\partial}{\partial u_l},1\le j,i\le p,1\le l\le q;$$

$$T_k=\frac{\partial}{\partial u_k},1\le k\le q$$

为原点处 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 的左不变向量场，T_k 为 $\mathbb{N}$ 的中心，其中 C_{ji}^l 为结构常数[17]。另外它们满足交换关系 $\left[x_j,y_j\right]=-\frac{1}{2}\left(x_i+x_j\right)C_{ji}^lT_l$，除此之外的交换子是 0。$\mathbb{N}$ 的李代数等同于 $\mathbb{R}^{p+q}$。

对 $\mathbb{N}$ 上任意的光滑函数 f，f 的梯度定义为

$$\nabla f(w)=\left(X_1f(w),\cdots,X_pf(w),T_1f(w),\cdots,T_qf(w)\right),$$

根据[18]，估计 $\left|\nabla f(w)\right|^2$ 时，我们仅考虑

$$\nabla f(w)=\left(X_1f(w),\cdots,X_pf(w)\right)。$$

令 $R=\frac{\partial}{\partial a}$，类似地，对 $z\in\mathbb{S}$，$\mathbb{S}$ 上函数的梯度及它的度量定义为

$$\tilde{\nabla}F(z)=\left(X_1F(z),\cdots,X_pF(z),T_1F(z),\cdots,T_qF(z),RF(z)\right)。$$

在估计 $\left|\tilde{\nabla}F(z)\right|^2$ 时，仅考虑

$$\left|\tilde{\nabla}F(z)\right|^2=\sum_{k=1}^p\left|X_kF(z)\right|^2+\left|RF(z)\right|^2。$$

方便起见，下文中 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{S}$ 中的梯度都用 ∇ 表示。

$\mathbb{S}$ 上的 Poisson 核[19]，由 $P_a(\cdot)$ 表示，定义为

$$P(z)=P(w,a)=P_a(w)=\frac{ca^d}{\left[\left(a^2+\frac{1}{4}|x'|^2\right)^2+|u'|^2\right]^{\frac{d}{2}}},$$

其中 $z=(w,a)\in\mathrm{S}$，c 为常数。

假设 f 为 N 上的可测函数，且满足 $\int_{\mathrm{N}}\frac{|f(w)|}{1+|w|^{2d}}\mathrm{d}w<+\infty$，那么 S 上 f 的 Poisson 积分定义为

$$F(z)=f*P(z)=\int_{\mathrm{N}}f(n)P_a\left(n^{-1}w\right)\mathrm{d}n\text{。}$$

关于 Poisson 核。我们有下面的引理

引理 1. i) $\int_{\mathrm{N}}P_a(w)\mathrm{d}w=1$；

ii) 记 Z 为 $X_j\,(j=1,\cdots,p)$ 中的任意一个，则

$$|ZP_a(w)|\le\begin{cases}Ca^{-d-1}, a\ge|w|\\ C|w|^{-d-1}, a<|w|\end{cases},|RP(z)|\le\begin{cases}Ca^{-d-1}, a\ge|w|\\ C|w|^{-d-1}, a<|w|\end{cases}\text{。}$$

3. Q_{r_1,r_2} 空间结构

本节中，我们先给出 $\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$ 的空间结构，然后，给出 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 的定义。

定义 3.1. 对任意的 $f\in L_{loc}(\mathrm{N})$，我们称 $f\in\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$ 若 f 满足

$$\|f(w)\|_{\mathrm{BMO}^\beta}^2=\sup_I\frac{1}{|I|^\beta}\int_I|f(w)-f(I)|^2\,\mathrm{d}w<+\infty,$$

这里 $f(I)=\frac{1}{|I|}\int_I f(w)\mathrm{d}w$，sup 取遍 N 上所有方体。

注意到由 $\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$ 的定义，容易得出 BMO^β 在 N 上是一个 Banach 空间。

引理 2. 对任意方体 I 和 J，若 $I\subset J\subset\mathrm{N}$ 则有

i) $\frac{1}{|I|^\beta}\int_I|f(w)-c|^2\,\mathrm{d}w=\frac{1}{|I|^\beta}\int_I|f(w)-f(I)|^2\,\mathrm{d}w+|f(I)-c|^2\cdot|I|^{1-\beta}, c\in\mathbb{C}$；

ii) $\int_I|f(w)-f(I)|^2\,\mathrm{d}w=\inf_c\int_I|f(w)-c|^2\,\mathrm{d}w$；

iii) $\frac{1}{|I|^{1+\beta}}\int_I\int_I|f(w)-f(n)|^2\,\mathrm{d}w\mathrm{d}n=\frac{2}{|I|^\beta}\int_I|f(w)-f(I)|^2\,\mathrm{d}w$；

iv) $\int_I|f(w)-f(I)|^2\,\mathrm{d}w\le\int_J|f(w)-f(J)|^2\,\mathrm{d}w$。

证明 论证主要根据下面两个结果

$$\begin{aligned}|f(w)-c|^2&=|f(w)-f(I)|^2+[f(w)-f(I)]\overline{[f(I)-c]}\\&\quad+\overline{[f(w)-f(I)]}[f(I)-c]+|f(I)-c|^2\end{aligned}\tag{3.1}$$

和

$$\int_I[f(w)-f(I)]\mathrm{d}w=\int_I\overline{f(w)-f(I)}\mathrm{d}w=0\tag{3.2}$$

由(3.2)，对(3.1)的等式两边同时在方体 I 上积分即得到(i)。(ii)是(i)的直接结论。(iii)是根据

$$\frac{1}{|I|^{1+\beta}}\int_I\int_I\left|f(w)-f(n)\right|^2\mathrm{d}w\mathrm{d}n=\frac{1}{|I|^{\beta}}\int_I\mathrm{d}n\left(\frac{1}{|I|}\int_I\left|f(w)-f(n)\right|^2\mathrm{d}w\right)=\frac{2}{|I|^{\beta}}\int_I\left|f(w)-f(I)\right|^2\mathrm{d}w$$

最后，(iv)是利用(ii)，从而，

$$\int_I\left|f(w)-f(I)\right|^2\mathrm{d}w\le\int_I\left|f(w)-f(J)\right|^2\mathrm{d}w\le\int_J\left|f(w)-f(J)\right|^2\mathrm{d}w\text{。}$$

定义 3.1. 任意的 $r_1,r_2\in\mathrm{R}$，我们定义 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 为满足

$$\|f\|_{Q_{r_1,r_2}}^2=\sup_I\frac{1}{|I|^{r_2}}\int_I\int_I\frac{\left|f(w)-f(n)\right|^2}{\left|n^{-1}w\right|^{dr_1}}\mathrm{d}w\mathrm{d}n<+\infty,$$

的可测函数构成的函数空间，其中 sup 取遍 N 中所有方体。

注 1. i) $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 为一线性空间；

ii) $Q_{0,2}(\mathrm{N})=\mathrm{BMO}^1(\mathrm{N})$；

iii) $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 在 N 伸缩、平移、旋转下不变。

命题 3.1. 一可测函数 f 属于 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 等价于

$$\sup_I\frac{1}{|I|^{r_2}}\int_{|n|_\infty<l(I)}\int_I\left|f(wn)-f(w)\right|^2\mathrm{d}w\frac{\mathrm{d}n}{|n|^{dr_1}}<+\infty\text{。}$$

定理 1 的证明. i) 若 $r_1+r_2=r_1'+r_2'$，$r_1<r_1'$。令 $f\in Q_{r_1',r_2'}(\mathrm{N})$，则对方体 $I\subset\mathrm{N}$，有

$$\begin{aligned}\int_I\int_I\frac{\left|f(w)-f(n)\right|^2}{\left|n^{-1}w\right|^{dr_1}}\mathrm{d}w\mathrm{d}n&=\int_I\int_I\frac{\left|f(w)-f(n)\right|^2}{\left|n^{-1}w\right|^{dr_1'}}\cdot\left|n^{-1}w\right|^{d(r_1'-r_1)}\mathrm{d}w\mathrm{d}n\\&\le C|I|^{r_1}\|f\|_{Q_{r_1'+r_2'}}^2\end{aligned}$$

所以 $Q_{r_1',r_2'}(\mathrm{N})\subset Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$。

ii) 考虑 $f\in Q_{r_1,r_2}$，显然当 $r_2<0$ 时有 $f\equiv C$。对于 $r_1>\dfrac{d+2}{d}$，我们利用反证法。假设 $f\in Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})\cap C^1(\mathrm{N})$ 是实值函数且不恒为常数。那么，存在一个包含 X_0 的锥体 $V\subset\mathrm{g}$，使得 $\left|n^{-1}w\right|<\varepsilon$ 时，任意的单位向量 $X\in V$，$Xf(w)\ge\delta>0$。记 $D=\{\eta=\exp X:|\eta|<\varepsilon,X\in V\}$。若 $w,n\in I$，且 $n^{-1}w\in D$，则有 $f(w)-f(n)\ge\delta\left|n^{-1}w\right|$，以及有

$$\int_{|n|_\infty<l(I)}\int_I\left|f(wn)-f(w)\right|^2\mathrm{d}w\frac{\mathrm{d}n}{|n|^{dr_1}}\ge\delta^2|I|\int_{n\in D}\frac{\mathrm{d}n}{|n|^{dr_1-2}}=+\infty$$

矛盾。由恒同逼近，即得证。

iii) 由于 $\beta>0$ 且 $\beta+1=r_1+r_2$，根据(i)，若 $0\le r_1<1$，从而 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})\subset Q_{0,\beta+1}(\mathrm{N})=\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$。反过来，若 $f\in\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})$，对任意的方体 $I\subset\mathrm{N}$，$n\in\mathrm{N}$ 且有 $|n|_\infty<l(I)$，我们可以得到

$$\frac{1}{|I|^{r_2}}\int_{|n|_\infty<l(I)}\int_I\left|f(wn)-f(w)\right|^2\mathrm{d}w\frac{\mathrm{d}n}{|n|^{dr_1}}\le C|I|^{\beta-r_2}\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta}^2\int_0^{l(I)}r^{d(1-r_1)-1}\mathrm{d}r\le C\|f\|_{\mathrm{BMO}^\beta}^2$$

当 $r_1<0$ 时，同样地由(i)，得到 $\mathrm{BMO}^\beta(\mathrm{N})=Q_{0,\beta+1}(\mathrm{N})\subset Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$。那么，反过来，若 $f\in Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$，对任意方体 $I\subset\mathrm{N}$，令 $E=\left\{\xi\in I\,\middle|\,\min\left\{\left|\xi^{-1}w\right|,\left|\xi^{-1}n\right|\right\}>\frac{1}{8}l(I)\right\}$ 以及 $K(w,n,\xi)=\min\left\{\left|\xi^{-1}w\right|,\left|\xi^{-1}n\right|\right\}^{-dr_1}$，此时

我们得到

$$
\begin{aligned}
|I|^{-\beta}\int_I\left|f(w)-f(I)\right|^2\mathrm{d}w &\le C|I|^{-1-\beta}\int_I\int_I\left|f(w)-f(n)\right|^2\mathrm{d}w\mathrm{d}n\\
&\le C|I|^{-2-\beta+r_1}\int_I\int_I\int_I K(w,n,\xi)\left|f(w)-f(n)\right|^2\mathrm{d}w\mathrm{d}n\mathrm{d}\xi\\
&\le C|I|^{-r_2}\int_I\int_I\frac{\left|f(w)-f(\xi)\right|^2}{\left|\xi^{-1}w\right|^{dr_1}}\mathrm{d}w\mathrm{d}\xi\\
&\le C\|f\|_{Q_{r_1,r_2}}^2
\end{aligned}
$$

从而证明了 $f\in \mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$。

定理 3. $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 是一个 Banach 空间。

证明. 显然 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 是一个赋范空间。就完备性而言，我们令 $\{f_k\}$ 为 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 中一 Cauchy 序列。由定理 1，可以知道 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})\subset \mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$，那么 $\{f_k\}$ 也是 $\mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$ 中的一 Cauchy 序列。若 $f_k\to f\in \mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$，根据 Fatou 引理，对 $k\ge 1$，

$$
\|f_k\to f\|_{Q_{r_1,r_2}}\le \lim_{j\to+\infty}\sup\|f_j\to f_k\|_{Q_{r_1,r_2}},
$$

故 $f_k\to f\in Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$。

4. $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$ 的刻画

在这一节中，我们将证明文章中的重要结果。基于这一目标，我们引入下面的引理([6] [11] [17]及[20])。

引理 3. I，J 是 N 中以 w_0 为心的方体，且方体 J 的边长 $l(I)\ge 3l(I)$。令 $f\in L_{loc}(\mathrm{N})$，对 $1<r_1\le\frac{d+2}{d}$，存在一独立的常数 C 使得

$$
\int_{S(I)}\left|\nabla F(z)\right|^2 a^{d(1-r_1)+1}\mathrm{d}z\le C\int_J\int_J\frac{\left|f(w)-f(n)\right|}{\left|n^{-1}w\right|^{dr_1}}\mathrm{d}w\mathrm{d}n+C\left[l(I)\right]^{2(d+1)-dr_1}\left(\int_{\mathrm{N}\setminus\frac{2}{3}J}\frac{\left|f(w)-f(J)\right|}{\left|w_0^{-1}w\right|^{d+1}}\mathrm{d}w\right)^2
$$

根据引理，我们利用 Carleson 测度具体的刻画海森堡型群上的双指标 Q 空间，即定理 2。

定理 2 的证明. 必要性，给定 $f\in Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$，由定理 1，有 $Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})\subset \mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$，从而 $f\in \mathrm{BMO}^{\beta}(\mathrm{N})$ 且 $\|f\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}\le\|f\|_{Q_{r_1,r_2}}$，这里 $r_1+r_2=\beta+1(\beta>0)$。令 I 为 N 中以原点为心的方体。易知若 J = 3I，有 $l(J)=3l(I)$，则

$$
\int_{\mathrm{N}\setminus\frac{2}{3}J}\frac{f(w)-f(J)}{|w|^{d+1}}\mathrm{d}w\le\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{3^kJ\setminus 3^{k-1}J}\frac{f(w)-f(3^kJ)}{|w|^{d+1}}\mathrm{d}w+\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{3^kJ\setminus 3^{k-1}J}\frac{f(3^kJ)-f(J)}{|w|^{d+1}}\mathrm{d}w\le C\left[l(I)\right]^{-1+\frac{\beta-1}{2}d}\|f\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}
$$

根据引理 3 得到

$$
\int_{S(I)}\left|\nabla F(z)\right|^2 a^{d(1-r_1)+1}\mathrm{d}z\le C\|f\|_{Q_{r_1,r_2}}^2|J|^{r_2}+C\left[l(I)\right]^{d+\beta d-dr_1}\|f\|_{\mathrm{BMO}^{\beta}}^2\le C\|f\|_{Q_{r_1,r_2}}^2|I|^{r_2}\le C|I|^{r_2}
$$

即可知 $\left|\nabla F(z)\right|^2 a^{d(1-r_1)+1}\mathrm{d}z$ 是一 r_2-Carleson 测度。

现在我们转向证明它的必要性。要证明

$$
\int_{|n|_\infty<l(I)}\int_I\left|f(wn)-f(w)\right|^2\mathrm{d}w\frac{\mathrm{d}n}{|n|^{dr_1}}\le C|I|^{r_2}。
$$

对于被积函数，我们有下面这样的估计：

$$\left|f(wn)-f(w)\right|\le\left|f(wn)-F(wn,|n|)\right|+\left|F(wn,|n|)-F(w,|n|)\right|+\left|F(w,|n|)-f(w)\right|$$
$$=A_1+A_2+A_3$$

由于

$$F(w,|n|)-f(w)=\int_0^{|n|}\frac{\partial f(w,a)}{\partial a}\mathrm{d}a=\int_0^{|n|}(RF)\mathrm{d}a，$$

对于 A_3，由闵可夫斯基不等式及 Hardy 不等式[17]，得

$$\int_{|n|_\infty<l(I)}\frac{1}{|n|^{d r_1}}\left(\int_I|A_3|^2\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}n\le C\int_0^{l(I)}\left[\int_I|\nabla F(w,a)|^2\,\mathrm{d}w\right]a^{d(1-r_1)+1}\mathrm{d}a\le C|I|^{r_2}。$$

任意得 n 满足 $|n|_\infty<l(I)$，由于

$$\int_I|A_1|^2\,\mathrm{d}w=\int_{nI}|A_3|^2\,\mathrm{d}w\le\int_{3I}|A_3|^2\,\mathrm{d}w，$$

所以

$$\int_{|n|_\infty<l(I)}\frac{1}{|n|^{d r_1}}\left(\int_I|A_1|^2\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}n\le C|I|^{r_2}。$$

对于 A_2，我们有下面的估计

$$A_2\le C\int_0^{|n|}\left|\nabla F(wr\sigma_n,|n|)\right|\mathrm{d}r,\sigma_n\in B。$$

这里 B 为 N 上的单位球体。则根据闵可夫斯基不等式

$$\left(\int_I|A_2|^2\,\mathrm{d}w\right)^{\frac{1}{2}}\le C\int_0^{|n|}\left[\int_I\left|\nabla F(wr\sigma_n,|n|)\right|^2\mathrm{d}w\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r$$
$$\le C|n|\left[\int_{3I}\left|\nabla F(w,|n|)\right|^2\mathrm{d}w\right]^{\frac{1}{2}}$$

从而

$$\int_{|n|_\infty<l(I)}\frac{1}{|n|^{d r_1}}\left(\int_I|A_2|^2\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}n\le C|I|^{r_2}，$$

结合 A_1，A_2 和 A_3 的估计，所以证得 $f\in Q_{r_1,r_2}(\mathrm{N})$。

参考文献

[1] John, F. and Nirenberg, L. (1961) On Functions of Bounded Mean Oscillation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **14**, 785-799. https://doi.org/10.1002/cpa.3160140317

[2] Aulaskari, R., Xiao, J. and Zhao, R. (1995) On Subspaces and Subsets of BMOA and UBC. *Analysis*, **15**, 101-121. https://doi.org/10.1524/anly.1995.15.2.101

[3] Aulaskari, R. and Lappan, P. (1994) Criteria for an Analytic Functions to Be Bloch and a Harmonic or Meromorphic Function to Be Normal, Complex Analysis and Its Applications. *Pitman Research Notes in Mathematics*: *Longman Scientific & Technical*, **305**, 136-146.

[4] Aulaskari, R., Stegenga, D.A. and Xiao, J. (1996) Some Subclasses of BMOA and Their Characterization in Terms of Carleson Measure. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **26**, 485-506. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072070

[5] Nicolau, A. and Xiao, J. (1997) Bounded Functions in Möbius Invariant Dirchlet Space. *Journal of Functional Analysis*, **150**, 383-425. https://doi.org/10.1006/jfan.1997.3114

[6] Essen, M., Janson, S., Peng, L. and Xiao, J. (2000) Q Space of Several Real Variables. *Indiana University Mathematics Journal*, **49**, 575-615. https://doi.org/10.1512/iumj.2000.49.1732

[7] Xiao, J. (2007) Homothetic Variant of Fractional Soblev Space with Application to Naiver-Stokes System. *Dynamic of*

PDE, **2**, 227-245. https://doi.org/10.4310/DPDE.2007.v4.n3.a2

[8] Li, P. and Zhai, Z. (2010) Well-Posedness and Regularity of Generalized Naiver-Stokes Equations in Some Critical Q-Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **259**, 2457-2519. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.07.013

[9] Li, P. and Zhai, Z. (2012) Riesz Transforms on Q-Type Spaces with Application to Quasi-Geostrophic Equation. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **16**, 2017-2132. https://doi.org/10.11650/twjm/1500406843

[10] Xiao, Z. and Zhou, Y. (2019) A Reverse Quasiconformal Composition Problem for $Q_\alpha(\mathsf{R}^n)$. *Arkiv för Matematik*, **57**, 451-469. https://doi.org/10.4310/ARKIV.2019.v57.n2.a11

[11] 王春杰. 复区域上的几个问题研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京大学, 2003.

[12] Carlesom, L. (1962) Interpolation of Bounded Analytic Functions and the Corona Problem. *Arkiv för Matematik*, **76**, 547-559. https://doi.org/10.2307/1970375

[13] Luecking, D.H. (1986) Multipliers of Bergman Spaces into Lebesgue Spaces. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **29**, 125-131. https://doi.org/10.1017/S001309150001748X

[14] 董建锋. H 型群上的 Q 空间与 Poisson 积分[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京大学, 2004.

[15] Kaplan, A. (1980) Fundamental Solutions for a Class of Hypoeliptic P.D.E Generated by Composition Quadratic Forms. *Transactions of the American Mathematical Society*, **258**, 147-153. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1980-0554324-X

[16] Liu, H. and Song M. (2017) A Functional Calculus and Restriction theorem on H-Type Groups. *Pacific Journal of Mathmatics*, **286**, 291-305. https://doi.org/10.2140/pjm.2017.286.291

[17] Stein, E.M. (1970) Singular Integrals and Differential Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton.

[18] Folland, G.B. and Stein, E.M. (1982) Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Princeton University Press, Princeton.

[19] Cygan, J. (1981) Subadditivity of Homogeneous Norms on Certain Nilpotent Lie Groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **83**, 69-70. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1981-0619983-8

[20] Stegenga, D. (1980) Multipliers of the Dirichlet Space. III. *Journal of Mathematics*, **24**, 113-139. https://doi.org/10.1215/ijm/1256047800