Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 685-693
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114083

半正二阶三点边值问题正解的存在性

杜高峰

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州
Email: dgf96520@163.com

收稿日期：2021年3月21日；录用日期：2021年4月23日；发布日期：2021年4月30日

摘 要

运用锥上的不动点定理获得了半正二阶三点边值问题

$$\begin{cases} \omega''(t) + a(t)\omega'(t) + b(t)\omega(t) + \lambda f(t,\omega(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ \omega(0) = 0, \ \alpha\omega(\eta) = \omega(1) \end{cases}$$

正解的存在性结果，其中$\lambda > 0$, $0 < \eta < 1$ 且满足 $0 < \alpha\eta < 1$, $f \in C([0,1] \times [0,\infty), (-\infty,\infty))$ 存在正常数 M 使得 $f(t,\omega) \geq -M$ 成立。

关键词

三点边值问题，半正，正解，不动点定理

Existence of Positive Solutions Semi-Positive Second-Order Three-Point Boundary Value Problems

Gaofeng Du

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: dgf96520@163.com

文章引用: 杜高峰. 半正二阶三点边值问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 685-693.
DOI: 10.12677/pm.2021.114083

Received: Mar. 21^{st}, 2021; accepted: Apr. 23^{rd}, 2021; published: Apr. 30^{th}, 2021

Abstract

By using the fixed-point theorem in cones, we obtain the existence of positive solutions for the semi-positive second-order three-point boundary value problems

$$\begin{cases} \omega''(t)+a(t)\omega'(t)+b(t)\omega(t)+\lambda f(t,\omega(t))=0, \quad t\in(0,1), \\ \omega(0)=0,\ \ \alpha\omega(\eta)=\omega(1) \end{cases}$$

where $\lambda>0,\ 0<\eta<1$ **satisfies** $0<\alpha\eta<1$ **and** $f\in C([0,1]\times[0,\infty),(-\infty,\infty))$**, with** $f(t,\omega)\geq -M$ **for some positive constants** M**.**

Keywords

Three-Point Boundary Value Problem, Semi-Positive, Positive Solution, Fixed-Point Theorem

1. 引言

常微分方程边值问题在物理学和工程技术中有着广泛的应用, 在描述许多重要的力学和电学现象的过程中, 一般要给方程 $\omega''(t)=f(t,\omega(t),\omega'(t))$ 附加一定的边界条件, 也就是说方程的定解条件不仅依赖于解在区间端点上的取值, 而且依赖于区间内部的一些点上的值. 而关于边界条件, 常见的有 Dirichlet 边界条件, Robin 边界条件和 Neumann 边界条件等 [1]. 其中, 多点边值问题最早由 Il'in 和 Moiseev 开始研究, 在此基础上, 对于非线性项 $f\geq 0$ 的情况已取得颇多优秀成果 [2–7].

2003 年,马如云 [8] 等应用不动点定理和相关线性问题的积分形式的解, 讨论了三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)u'(t)+b(t)u(t)+h(t)f(u)=0, \quad t\in(0,1), \\ u(0)=0,\ \alpha u(\eta)=u(1) \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 其中 $0<\eta<1$, h, f, a 和 b 满足如下条件:

(H1) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$;

(H2) $h\in C([0,1],[0,+\infty))$ 并且存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $h(x_0)>0$;

(H3) $a\in C[0,1],\ b\in C([0,1],(-\infty,0))$;

(H4) $0<\alpha\phi_1(\eta)<1$,

其中, $\phi_1(t)$ 是边值问题

$$\begin{cases} \phi_1''(t)+a(t)\phi_1'(t)+b(t)\phi_1(t)=0, \quad t\in(0,1), \\ \phi_1(0)=0,\ \phi_1(1)=1 \end{cases} \tag{1.2}$$

的解. 2002 年, 姚庆六 [9] 运用锥上的不动点定理, 得到了超线性半正非线性二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda f(t,u(t))=0, \quad t\in(0,1), \\ u(0)=0,\ u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases} \tag{1.3}$$

的正解. 同时, 讨论了当 $f(t,u)\geq -M$ 且满足超线性条件时, 对充分小的 $\lambda>0$, 边值问题 (1.3) 至少存在一个正解, 其中 $\lambda>0$ 是参数, $0<\eta<1$, $0<\alpha<1$. 基于上述工作, 2007 年, 姚庆六在文献 [10] 中又研究了半正问题 (1.3) 中当 $\lambda\equiv 1$ 时正解的存在性与多解性. 在此基础上, 2019 年, 魏晋滢 [11] 等仍运用不动点定理研究了 Dirichlet 边界条件下半正非线性二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(t)+b(t)y(t)+\lambda f(t,y(t))=0, \quad t\in(0,1), \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $\lambda>0$ 为参数, $b\in C[0,1]$ 且满足 $-\infty<b(t)<\pi^2$.

受上述文献启发, 本文考虑半正非线性二阶三点边值问题

$$\begin{cases} \omega''(t)+a(t)\omega'(t)+b(t)\omega(t)+\lambda f(t,\omega(t))=0, \quad t\in(0,1), \\ \omega(0)=0,\ \alpha\omega(\eta)=\omega(1) \end{cases} \tag{1.4}$$

正解的存在性. 我们注意到, 文献 [8] 中 f 是非负的, 而我们研究 $f>-M$ 的情形,并且将推广文献 [9–12]的工作. 因此, 除条件 (H3)-(H4) 之外, 本文总假定以下条件成立:

(H5) $-\infty<\inf\{f(t,\mu):(t,\mu)\in[0,1]\times[0,+\infty)\}=-M<0$;

(H6) $\lim\limits_{\mu\to\infty}\min\limits_{\delta\le t\le 1-\delta}\dfrac{f(t,\mu)}{\mu}=+\infty.$

注1 根据文献 [8] 无法直接得到问题 (1.1) 的 Green 函数具体表达式, 但是可以讨论对应的线性问题解的性质和 Green 函数的性质, 利用常数变易法, 得到该问题积分形式的解. 因此, 本文的研究基于半正问题 (1.4) 对应的线性问题解的形式和 Green 函数的性质, 应用不动点定理证明问题 (1.4) 正解的存在性.

2. 线性边值问题的 Green 函数

考虑齐次边值问题

$$\begin{cases}\omega''(t)+a(t)\omega'(t)+b(t)\omega(t)=0, & t\in(0,1),\\ \omega(0)=0,\ \omega(1)=\alpha\omega(\eta)\end{cases}\tag{2.1}$$

的 Green 函数. 根据文献 [1] 第五章的内容, 可以得到边值问题 (2.1) 的 Green 函数为

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases}\phi_1(t)\phi_2(s), & 0\le t\le s\le 1,\\ \phi_1(s)\phi_2(t), & 0\le s\le t\le 1,\end{cases}\tag{2.2}$$

其中, $\phi_1(t)$ 是边值问题 (1.2) 的解, $\phi_2(t)$ 是边值问题

$$\begin{cases}\phi_2''(t)+a(t)\phi_2'(t)+b(t)\phi_2(t)=0, & t\in(0,1),\\ \phi_2(0)=1,\ \phi_2(1)=0\end{cases}\tag{2.3}$$

的解; $\rho:=\phi_1'(0)\neq 0$ 为常数. 根据文献 [8], ϕ_1 和 ϕ_2 为问题 (1.2) 和 (2.3) 的唯一正解且有如下性质:

性质2.1 [8]假设 (H3) 成立. ϕ_1 和 ϕ_2 满足:

(i) ϕ_1 在 $t\in[0,1]$ 严格递增;

(ii) ϕ_2 在 $t\in[0,1]$ 严格递减.

接下来将利用问题 (2.1) 的 Green 函数来构造问题 (2.1) 对应的非齐次边值问题的解, 我们给出如下引理.

引理2.2 [8]假设 (H3) 和 (H4) 成立. 设 $y\in C[0,1]$, 那么边值问题

$$\begin{cases}\omega''(t)+a(t)\omega'(t)+b(t)\omega(t)+y(t)=0, & t\in(0,1),\\ \omega(0)=0,\ \alpha\omega(\eta)=\omega(1)\end{cases}\tag{2.4}$$

等价于积分方程

$$\omega(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)y(s)\mathrm{d}s+A\phi_1(t),$$

其中

$$A=\frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)p(s)y(s)\mathrm{d}s,\ \ p(t)=\exp\Big(\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\Big),$$

$G(t,s)$ 为齐次边值问题 (2.1) 的 Green 函数.

注2 特别地, 当 $y=1$ 时,

$$\omega_1(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+A_1\phi_1(t), \tag{2.5}$$

$$A_1=\frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\mathrm{d}s.$$

下面利用这个引理来获得边值问题 (2.1) 的 Green 函数的两个重要性质.

性质2.3 [8] $G(t,s)$ 是问题 (2.1) 的 Green 函数. 对任意的 $t_0\in(0,1]$, 则存在 $q(t)\in C[0,1]$, 使得

$$G(t,s)\geq G(t_0,s)q(t),\quad t\in(0,1),\quad s\in(0,1),$$

其中 $q(t)=\min\left\{\frac{\phi_1(t)}{|\phi_1|_0},\frac{\phi_2(t)}{|\phi_2|_0}\right\}$, $t\in[0,1]$, $|\cdot|_0$ 是上确界范数.

性质2.4 [8] $G(t,s)$ 是问题 (2.1) 的 Green 函数, 对任意 $s,\ t\in[0,1]$, $G(t,s)$ 满足 $G(t,s)\leq G(s,s)$.

3. 主要结果

为证明本文主要结果，需要如下引理:

引理3.1 [13] E 是 Banach 空间, $K\subset E$ 是锥. 假设 Ω_1 及 Ω_2 是 E 中的有界开集, $\theta\in\Omega_1$, 且 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, 令 $T:K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$ 是全连续算子. 若下列条件之一成立:

(i) $\|Tu\|\leq\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_1,\ \|Tu\|\geq\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_2;$

(ii) $\|Tu\|\geq\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_1,\ \|Tu\|\leq\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_2,$

那么 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

引理3.2 [1] 假设 (H3) 和 (H4) 成立. 设 $y\in C[0,1]$ 且 $y\geq0$, 对任意的 $t_0\in(0,1)$, 令 $|\omega|_0=\omega(t_0)$, 那么边值问题 (2.4) 的唯一解 $\omega(t)$ 满足

$$\omega(t)\geq|\omega|_0q(t),\quad t\in[0,1].$$

注3 对任意的 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 存在 $\gamma_\delta>0$, 则引理 3.2 可推广为

$$\omega(t)\geq\gamma_\delta|\omega|_0,\quad t\in[\delta,\ 1-\delta].$$

事实上, 只需令

$$\gamma_\delta=\min\left\{q(t)|t\in[\delta,1-\delta],\ \delta\in(0,\tfrac{1}{2})\right\}.$$

由注 3 易知 $0<\gamma_\delta<1$. 令

$$K=\big\{\omega\in C[0,1]:\omega(t)\geq 0,\ \min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\omega(t)\geq\gamma_\delta|\omega|_0\big\}.$$

则 K 是 $C[0,1]$ 中的非负锥, 且 $T(K)\subset K$. 令

$$\Lambda=\max\{f(t,\mu)+M:(t,\mu)\in[0,1]\times[0,1]\}.$$

定理3.3 假设条件 (H5) 和 (H6) 成立. 则当

$$0<\lambda<\min\left\{\frac{1-\alpha\phi_1(\eta)}{1-\alpha\phi_1(\eta)+\alpha}\left(\int_0^1 G(s,s)p(s)\Lambda\mathrm{d}s\right)^{-1},\ \frac{\gamma_\delta\big(\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+A_1\phi_1(t)\big)^{-1}}{M}\right\}$$

时, 问题 (1.4) 至少存在一个正解 $\omega^*\in C[0,1]$.

证明 构造辅助函数

$$\begin{aligned} g(t,\mu)=&f(t,\mu)+M,\ (t,\mu)\in[0,1]\times[0,+\infty),\\ \overline{g}(t,\mu)=&\begin{cases} g(t,\mu),\ (t,\mu)\in[0,1]\times[0,+\infty),\\ g(t,0),\ (t,\mu)\in[0,1]\times(-\infty,0],\end{cases}\\ =&g(t,\max\{\mu,0\}),\ (t,\mu)\in[0,1]\times(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

显然, $\overline{g}:[0,1]\times(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的.

考虑三点边值问题

$$\begin{cases}\omega''(t)+a(t)\omega'(t)+b(t)\omega(t)+\lambda\overline{g}(t,\omega(t)-m(t))=0, \quad t\in(0,1),\\ \omega(0)=0,\ \alpha\omega(\eta)=\omega(1)\end{cases}\tag{3.1}$$

的解, 其中 $m(t)=\lambda M\omega_1(t)$, $\omega_1(t)$ 如注 2 中 (2.5) 式所示. 不难证明, ω^* 是边值问题 (1.4) 的正解当且仅当 $\varpi:=\omega^*+m$ 是边值问题 (3.1) 的解, 且 $\varpi(t)>m(t),\ 0<t<1$.

定义算子 $T:C[0,1]\to C[0,1]$ 如下:

$$\begin{aligned}(T\omega)(t):=&\int_0^1 G(t,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega(s)-m(s))\mathrm{d}s+A\phi_1(t)\\ =&\int_0^1 G(t,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega(s)-m(s))\mathrm{d}s\\ &+\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega(s)-m(s)\mathrm{d}s\right)\phi_1(t).\end{aligned}$$

容易验证 $T:C[0,1]\to C[0,1]$ 为全连续算子, 且 $\varpi\in C[0,1]$ 是边值问题 (3.1) 的解当且仅当 $\varpi\in C[0,1]$ 是 T 的不动点. 因此, 只需证明 T 在 $C[0,1]$ 中存在不动点 ϖ, 且 $\varpi(t)>m(t),\ 0<t<1$.

取 $\Omega_1 = \{\omega \in K : |\omega|_0 \le 1\}$, 下证对任意的 $\omega \in \partial\Omega_1$, $\omega \ge T\omega$. 若不然, 则存在 $\omega_0 \in \partial\Omega_1$, 使得 $\omega_0 \le T\omega_0$. 因为 $\omega_0(t) - m(t) \le 1$, $0 \le t \le 1$, 故由性质 2.4 可得

$$\begin{aligned}
\omega_0(t) &\le (T\omega_0)(t) \\
&= \int_0^1 G(t,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega_0(s)-m(s))\mathrm{d}s \\
&+ \left(\frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega_0(s)-m(s))\mathrm{d}s\right)\phi_1(t) \\
&\le \int_0^1 G(t,s)p(s)\lambda\max_{0\le s\le 1}\overline{g}(s,\omega_0(s)-m(s))\mathrm{d}s \\
&+ \frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\max_{0\le s\le 1}\overline{g}(s,\omega_0(s)-m(s))\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^1 G(t,s)p(s)\lambda\left(\max_{0\le s\le 1} f(s,\max\{\omega_0(s)-m(s),0\})+M\right)\mathrm{d}s \\
&+ \frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\left(\max_{0\le s\le 1} f(s,\max\{\omega_0(s)-w(s),0\})+M\right)\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^1 G(s,s)p(s)\lambda\Lambda\mathrm{d}s + \frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(s,s)p(s)\lambda\Lambda\mathrm{d}s \\
&\le \lambda\int_0^1 G(s,s)p(s)\Lambda\mathrm{d}s\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\right) \\
&< 1,
\end{aligned}$$

这与 $|\omega_0|_0 = 1$ 矛盾.

另一方面, 令 $S_\lambda = \{\omega \in K : T\omega \le \omega\}$, $m_\lambda = \sup\{|\omega|_0 : \omega \in S_\lambda\}$.

下证 $m_\lambda < +\infty$. 若不然, 则存在序列 $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty \subset K$, 使得 $T\omega_n \le \omega_n$ 且 $|\omega_n|_0 \to \infty (n \to \infty)$. 因为 $\omega_n \in K$, 故 $\min\limits_{\delta\le t\le 1-\delta}\omega_n(t) \ge \gamma_\delta|\omega_n|_0$, 因此

$$\min_{\delta\le t\le 1-\delta}(\omega_n(t)-m(t)) \ge \gamma_\delta|\omega_n|_0 - |m|_0 \to +\infty (n\to\infty).$$

根据条件 (H6), 则有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\min_{\delta\le t\le 1-\delta}\frac{\overline{g}(t,\omega_n(t)-m(t))}{\omega_n(t)-m(t)} &= \lim_{n\to\infty}\min_{\delta\le t\le 1-\delta}\frac{g(t,\omega_n(t)-m(t))}{\omega_n(t)-m(t)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\min_{\delta\le t\le 1-\delta}\frac{f(t,\omega_n(t)-m(t))+M}{\omega_n(t)-m(t)} = +\infty.
\end{aligned}$$

因此, 存在 $N > 0$, 使当 $n > N$ 时,

$$\min_{\delta\le t\le 1-\delta}(\omega_n(t)-m(t)) \ge \frac{\gamma_\delta}{2}|\omega_n|_0,$$

$$\min_{\delta\leq t\leq 1-\delta}\frac{\overline{g}(t,\omega_n(t)-m(t))}{\omega_n(t)-m(t)}\geq\frac{4(\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\mathrm{d}s)^{-1}}{\lambda\gamma_\delta},$$

所以

$$\begin{aligned}
|\omega_n|_0 &= \max_{0\leq t\leq 1}|\omega_n(t)|\geq\max_{0\leq t\leq 1}(T\omega_n)(t)\geq(T\omega_n)(\eta)\\
&=\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega_n(s)-m(s))\mathrm{d}s\\
&+\left(\frac{\alpha}{1-\alpha\phi_1(\eta)}\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega_n(s)-m(s))\mathrm{d}s\right)\phi_1(t)\\
&\geq\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\overline{g}(s,\omega_n(s)-m(s))\mathrm{d}s\\
&\geq\big(\omega_n(s)-m(s)\big)\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\frac{\overline{g}(s,\omega_n(s)-m(s))}{\omega_n(s)-m(s)}\mathrm{d}s\\
&\geq\min_{\delta\leq s\leq 1-\delta}(\omega_n(s)-m(s))\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\lambda\min_{\delta\leq s\leq 1-\delta}\frac{\overline{g}(s,\omega_n(s)-m(s))}{\omega_n(s)-m(s)}\mathrm{d}s\\
&\geq\frac{\gamma_\delta}{2}|\omega_n|_0\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\mathrm{d}s\lambda\frac{4(\int_0^1 G(\eta,s)p(s)\mathrm{d}s)^{-1}}{\lambda\gamma_\delta}\\
&=2|\omega_n|_0,
\end{aligned}$$

这是一个矛盾. 故 $m_\lambda<+\infty$.

令 $\delta=2+m_\lambda$, 那么 $\delta>1$, 并且对任意的 $\omega\in\partial\Omega_\delta$, 有 $T\omega\geq\omega$, 根据引理 3.1, T 有不动点 $\overline{\omega}\in\Omega_\delta\setminus\Omega_1$. 不难发现, $|\overline{\omega}|_0\geq 1$, 则有

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}(t)\geq\gamma_\delta|\omega|_0\geq\gamma_\delta &=\frac{\gamma_\delta(\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+A_1\phi_1(t))}{\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+A_1\phi_1(t)}\\
&>\lambda M(\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+A_1\phi_1(t))\frac{\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+A_1\phi_1(t)}{\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s+A_1\phi_1(t)}\\
&=\lambda M\omega_1(t)=m(t),\quad t\in(0,1),
\end{aligned}$$

故边值问题 (1.4) 有正解 $\omega^*=\overline{\omega}-m$. □

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11961060), 甘肃省自然科学基金资助项目(No. 18JR3RA084).

参考文献

[1] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] Il'in, V.A. and Moiseev, E.I. (1987) Nonlocal Boundary Value Problem of the First Kind for a Sturm-Liouville Operator in Its Differential and Finite Difference Aspects. *Journal of Differential Equations*, **23**, 803-810.

[3] Gupta, C.P. (1992) Solvability of a Three-Point Nonlinear Boundary Value Problem for a Second Order Ordinary Differential Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **168**, 540-551. https://doi.org/10.1016/0022-247X(92)90179-H

[4] Ma, R. (1997) Existence Theorems for a Second Order Three-Point Boundary Value Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **212**, 430-442. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5515

[5] Zhang, Q. and Jiang, D. (2010) Multiple Solutions to Semipositone Dirichlet Boundary Value Problems with Singular Dependent Nonlinearities for Second Order Three-Point Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **59**, 2516-2527. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.12.036

[6] Gao, C., Zhang, F. and Ma, R. (2017) Existence of Positive Solutions of Second-Order Periodic Boundary Value Problems with Sign-Changing Green's Function. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **33**, 263-268. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0657-2

[7] Ma, R., Gao, C. and Chen, R. (2010) Existence of Positive Solutions of Nonlinear Second-Order Periodic Boundary Value Problems. *Boundary Value Problems*, **2010**, Article No. 626054. https://doi.org/10.1155/2010/626054

[8] Ma, R. and Wang, H. (2003) Positive Solutions of Nonlinear Three-Point Boundary-Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **279**, 216-227. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00661-3

[9] Yao, Q. (2002) An Existence Theorem of Positive Solution for a Superlinear Semipositone Second-Order Three-Point BVP. *Journal of Mathematical Study*, **35**, 32-35.

[10] 姚庆六. 半正二阶三点边值问题的解和正解[J]. 应用数学学报, 2007, 30(2): 209-217.

[11] 魏晋滢, 王素云, 李永军. 一类半正二阶常微分方程边值问题正解的存在性[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(10): 7-12.

[12] 任立顺, 安玉坤. 关于半正二阶三点边值问题正解的存在性[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2004, 32(3): 31-33.

[13] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1998) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, San Diego.