Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 562-573
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114069

Hans汉斯

含Φ-Laplace算子的拟线性椭圆型方程解的存在性

孙爱群

上海理工大学理学院，上海
Email: 1091200743@qq.com

收稿日期：2021年3月13日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月22日

摘 要

该文研究了全空间中一类含Φ-Laplace算子和位势项的拟线性椭圆型方程解的存在性，利用Nehari流形方法和纤维映射等技巧，得到方程至少有两个非平凡解。

关键词

拟线性椭圆型方程，Nehari流形方法，纤维映射，极小化方法

Existence of Solutions for Quasilinear Elliptic Equation with Φ-Laplacian Operator

Aiqun Sun

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 1091200743@qq.com

Received: Mar. 13th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 22nd, 2021

Abstract

The paper deals with the existence results of solutions to a quasilinear elliptic problem with Φ-Laplacian operator and potential well on $\mathbb{R}^N$. Nehari manifold and fibering maps are used to obtain the existence two nontrivial solutions.

Keywords

Quasilinear Elliptic Equation, Nehari Manifold Method, Fibering Maps, Minimizing Method

文章引用: 孙爱群. 含 Φ-Laplace 算子的拟线性椭圆型方程解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 562-573.
DOI: 10.12677/pm.2021.114069

1. 引言

我们将研究 $\mathbb{R}^N$ 中的拟线性椭圆型方程

$$-\Delta_\Phi u + V(x)\phi(|u|)u = f(x,u),\quad u \in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \tag{1}$$

非平凡解的存在性，其中 $\Delta_\Phi u = \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u)$ 是 Φ -Laplace 算子，并且 $\Phi(t) = \int_0^t s\phi(s)\mathrm{d}s$， $t \in \mathbb{R}$，$f:\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Carathéodory 函数。

拟线性椭圆型方程具有较强的物理背景，是非牛顿流体、等离子物理、图像处理等领域研究相关物理现象的重要模型，见[1]和[2]。近些年来，在有界区域上讨论拟线性椭圆型方程的文章已有很多，如文献[3]和[4]，研究了非线性项在不满足(AR)条件下，方程解的存在性和多重性问题。在文献[5]中，Carvalho 等利用 Nehari 方法和形变引理研究了下列问题的正负解和变号解的存在性。

$$\begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

本文的结果是对前人研究成果的推广和完善。

对函数 $\phi(x)$、$V(x)$ 和 $f(x,t)$ 做如下假设。函数 $\phi \in C^2([0,+\infty),[0,+\infty))$，并且满足下列条件：

(ϕ_1) $t \mapsto t\phi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数；

(ϕ_2) $\lim\limits_{t\to 0} t\phi(t) = 0$， $\lim\limits_{t\to\infty} t\phi(t) = \infty$；

(ϕ_3) 对任意 $t>0$，存在常数 $l,m \in (1,N)$，使得

$$-1 < l-2 := \inf_{t>0}\frac{(t\phi(t))'' t}{(t\phi(t))'} \le \sup_{t>0}\frac{(t\phi(t))'' t}{(t\phi(t))'} =: m-2 < N-2\,;$$

(ϕ_4) 存在 N-函数

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\,,$$

其中 $\psi:[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续函数，且满足

(a_1) $1 < l \le m < l_\Psi := \inf\limits_{t>0}\dfrac{\psi(t)t}{\Psi(t)} \le \sup\limits_{t>0}\dfrac{\psi(t)t}{\Psi(t)} =: m_\Psi < l^* = \dfrac{lN}{N-l}$；

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^N)$， $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} V > 0$；

(V_2) 对所有的 $M>0$， $\mu(V^{-1}(-\infty,M]) < \infty$，其中 μ 为 $\mathbb{R}^N$ 中的 Lebesgue 测度。

假设 $f:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 Carathéodory 函数， $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$， $t\in\mathbb{R}$，此外，f 还满足以下条件：

(f_1) 存在常数 $C>0$，使得

$$|f(x,t)| \le C(1+\psi(t)),\quad t \in \mathbb{R},\quad x \in \mathbb{R}^N\,;$$

(f_2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,t)}{\psi(t)} < \lambda$ 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立；

(f_3) $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{|t|^{m-2}t}$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上单调递增；

(f_4) $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{f(x,t)}{|t|^{m-2}t}=+\infty$ 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立。

注 1.1 在条件 (ϕ_3) 下，可以推出下面的不等式：

$$l-2\le\inf_{t>0}\frac{\phi'(t)t}{\phi(t)}\le\sup_{t>0}\frac{\phi'(t)t}{\phi(t)}\le m-2，\quad 1<l:=\inf_{t>0}\frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)}\le\sup_{t>0}\frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)}=:m<N。$$

注 1.2 经验证，下列函数满足条件 (ϕ_1)-(ϕ_4) 和 (f_1)-(f_4)：

$$\Phi(t)=|t|^a\log(1+|t|)，\quad \psi_1(t)=qt^{q-1}\log(1+t)+\frac{t^q}{t+1}，\quad f(x,t)=\begin{cases}\psi_2(t),0<t<1,\\ d\psi_1(t),1<t<\infty.\end{cases}$$

与文献[5]相比，本文是在全空间中进行研究的，不满足 Orlicz-Sobolev 空间中的 Poincaré 不等式，另外，本文中的非线性项不满足(AR)条件(见文献[6])，为了克服这些困难，采用 Nehari 方法，需要证明 Nehari 流形是 C^1 的，再利用极小化方法得到解的存在性。

本文的主要结果如下：

定理 1.1 假设 (ϕ_1)-(ϕ_3)、(V_1)-(V_2) 和 (f_1)-(f_4) 成立，则问题(1)在 $W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 中存在非零基态解。

定理 1.2 设 (ϕ_1)-(ϕ_4)、(V_1)-(V_2) 和 (f_1)-(f_4) 成立，则问题(1)至少有两个非平凡解 u_1 和 u_2，且 $u_1\ge0$，$u_2\le0$。

2. 预备知识和基本引理

记 $L^\Phi(\Omega)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}\text{是可测的},\int_\Omega\Phi(|u(x)|)\mathrm{d}x<\infty\right\}$，在 Luxemburg 范数

$$\|u\|_\Phi=\inf\left\{k>0\mid\int_\Omega\Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\mathrm{d}x\le1\right\}$$

的意义下，$L^\Phi(\Omega)$ 是一个 Banach 空间，通常称为 Orlicz 空间。Orlicz-Sobolev 空间 $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在范数 $\|u\|_1=\|\nabla u\|_\Phi+\|u\|_\Phi$ 下的完备化。

为了研究问题(1)，在假设 (V_1)，(ϕ_1) 和 (ϕ_3) 成立的前提下，记 $W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 为 $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 的子空间：

$$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)=\left\{u\in W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\mid\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\Phi(|u(x)|)<\infty\right\},$$

在 $W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 上定义范数 $\|u\|=\|\nabla u\|_\Phi+\|u\|_{\Phi,V}$，其中

$$\|u\|_{\Phi,V}=\inf\left\{k>0\mid\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\mathrm{d}x\le1\right\}。$$

易知 $\left(W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\|\cdot\|\right)$ 是可分的、自反的 Banach 空间(见[7])。

首先给出本文需要的几个基本引理。

引理 2.1 [8]假设 ϕ 满足 (ϕ_1)-(ϕ_3)，对 $t\ge0$，令

$$\xi_1(t)=\min\{t^\ell,t^m\}，\quad \xi_2(t)=\max\{t^\ell,t^m\},$$

则对于任意 $\rho,t>0$，$u\in L^\Phi(\mathbb{R}^N)$，成立

$$\xi_1(t)\Phi(\rho)\le\Phi(\rho t)\le\xi_2(t)\Phi(\rho),\quad \xi_1(\|u\|_\Phi)\le\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(|u(x)|)\mathrm{d}x\le\xi_2(\|u\|_\Phi)。$$

引理 2.2 [9]假设 (ϕ_1)-(ϕ_3) 和 (V_1) 条件成立，则对任意 $u\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$，有

$$\xi_1(\|u\|_{\Phi,V})\le\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\Phi(|u(x)|)\mathrm{d}x\le\xi_2(\|u\|_{\Phi,V}),$$

其中 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 由引理 2.1 中给出。

引理 2.3 [8]假设 (ϕ_1)-(ϕ_3) 条件成立，对任意 $\rho,t>0$， $u\in L^\Psi(\mathbb{R}^N)$，

$$\xi_1(t)\Psi(\rho)\le\Psi(\rho t)\le\xi_2(t)\Psi(\rho),\quad \xi_1(\|u\|_\Psi)\le\int_{\mathbb{R}^N}\Psi(|u(x)|)\mathrm{d}x\le\xi_2(\|u\|_\Psi),$$

其中 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 由引理 2.1 中给出。

引理 2.4 [9]假设 (ϕ_1)-(ϕ_2)、(V_1) 和 (V_2) 条件成立，Ψ 满足

$$\overline{\lim_{t\to0}}\frac{\Psi(t)}{\Phi(t)}<+\infty,\quad \overline{\lim_{|t|\to+\infty}}\frac{\Psi(t)}{\Phi_*(t)}=0,$$

那么 $W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow\hookrightarrow L^\Psi(\mathbb{R}^N)$，其中 $\Phi_*(t)$ 满足：当 $t\ge0$ 时，$\Phi_*^{-1}(t)=\int_0^t\frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{(N+1)/N}}\mathrm{d}s$， $t<0$ 时，$\Phi_*(t)=\Phi_*(-t)$。特别地，$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow\hookrightarrow L^\Phi(\mathbb{R}^N)$。

问题(1)所对应的能量泛函为

$$I(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|)+V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x,\quad u\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N),\tag{3}$$

其中 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$， $s\in\mathbb{R}$。易知 $I(u)\in C^1$，且对任意 $\varphi\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$，成立

$$\langle I'(u),\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi+V(x)\phi(|u|)u\varphi\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)\varphi\mathrm{d}x。$$

因此，寻找问题(1)的弱解等价于找泛函 I 的临界点。

如果问题(1)的弱解存在，那么它一定属于 Nehari 流形 $\mathcal{M}$：

$$\mathcal{M}=\left\{u\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}:\langle I'(u),u\rangle=0\right\}。$$

为探索泛函 I 在 Nehari 流形上的行为，我们将借助纤维映射进行分析。对 $u\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$，定义纤维映射 $h_u(t):t\to I(tu)\,(t>0)$：

$$h_u(t)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(t|\nabla u|)+V(x)\Phi(t|u|)\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,tu)\mathrm{d}x。$$

由 (ϕ_1)-(ϕ_3) 条件可得纤维映射 $h_u(t)\in C^2$，且

$$h_u'(t)=\int_{\mathbb{R}^N}t\left(\phi(t|\nabla u|)|\nabla u|^2+V(x)\phi(t|u|)u^2\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,tu)u\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}h_u''(t)=&\int_{\mathbb{R}^N}\left(t\phi'(t|\nabla u|)|\nabla u|^3+\phi(t|\nabla u|)|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\\&+\int_{\mathbb{R}^N}\left(tV(x)\phi'(t|u|)|u|^3+V(x)\phi(t|u|)u^2\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f'(x,tu)u^2\mathrm{d}x\end{aligned}。$$

容易看出，$\mathcal{M}=\left\{u\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}:h_u'(1)=0\right\}$；若 u 是泛函 I 的局部极小(大)值，则 $h_u(t)$ 在 $t=1$ 处取得局部极小(大)值；对 $t>0$， $tu\in\mathcal{M}$ 当且仅当 $h_u'(t)=0$。

3. 定理 1.1 的证明

本节的主要工作是证明定理 1.1。

引理 3.1 假设(f_1)和(f_2)成立，若在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中有$u_n \rightharpoonup u$，则下列结论成立：
(1) $\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)u\mathrm{d}x$；(2) $\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\mathrm{d}x$。

证首先证明(1)。假设$\{u_n\}$是$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中的序列，满足

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{在 } W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \text{ 中})。$$

根据引理 2.4，存在$\{u_n\}$的一个子列(仍记为其本身)，使得

$$u_n \to u \quad (\text{在 } L^\Psi(\mathbb{R}^N) \text{ 中})。$$

那么存在$\{u_n\}$的一个子列(仍记为其本身)，以及函数$h \in L^\Psi(\mathbb{R}^N)$，使得

$$u_n \to u \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad |u_n| \le h \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^N。$$

由(f_1)和(a_1)可得

$$|f(x,u_n)u_n| \le C|u_n| + C\psi(u_n)|u_n| \le Ch + C\psi(h)h \le Ch + Cm_\Psi \Psi(h) \in L^1(\mathbb{R}^N)。$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)u\mathrm{d}x。$$

下面证明(2)。由(f_2)可得

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x,t)}{\Psi(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{\psi(t)} < \lambda。$$

对任意$\varepsilon > 0$充分小，存在$\delta > 0$，成立

$$\frac{|F(x,t)|}{\Psi(t)} < \lambda - \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad |t| < \delta。$$

因此

$$|F(x,u_n)| < (\lambda - \varepsilon)|\Psi(u_n)| \le (\lambda - \varepsilon)\Psi(h) \in L^1(\mathbb{R}^N)。$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，有$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\mathrm{d}x$。证毕。

注 3.1 给定$\varepsilon > 0$充分小，由(f_1)和(f_2)可知，存在常数$C_\varepsilon > 0$，使得

$$|f(x,t)| \le (\lambda - \varepsilon)|\psi(t)| + C_\varepsilon \psi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

从而

$$|F(x,t)| \le (\lambda - \varepsilon)\Psi(t) + C_\varepsilon \Psi(t), \quad t \in \mathbb{R}。 \tag{4}$$

由(f_2)和(a_1)，可得

$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(x,t)t}{\Psi(t)} < \lambda m_\Psi。 \tag{5}$$

再根据(f_1)和(5)可得

$$|f(x,t)t| \le (\lambda m_\Psi - \varepsilon)\Psi(t) + C_\varepsilon \Psi(t), \quad t \in \mathbb{R}。 \tag{6}$$

分别对(4)和(6)关于x在$\mathbb{R}^N$上积分，对$\varepsilon > 0$充分小，存在$C_\varepsilon > 0$，使得对任意$u \in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$有

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)u\mathrm{d}x \le (\lambda m_\Psi - \varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} \Psi(u)\mathrm{d}x + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(u)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\mathrm{d}x \le (\lambda - \varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N} \Psi(u)\mathrm{d}x + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(u)\mathrm{d}x。$$

利用引理 2.1 和引理 2.4，对 $u \in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)u\mathrm{d}x \le (\lambda m_\Psi - \varepsilon)\max\left\{\|u\|^{l_\Psi},\|u\|^{m_\Psi}\right\} + C_\varepsilon \max\left\{\|u\|^{l_\Psi},\|u\|^{m_\Psi}\right\}, \tag{7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)\mathrm{d}x \le (\lambda - \varepsilon)\max\left\{\|u\|^{l_\Psi},\|u\|^{m_\Psi}\right\} + C_\varepsilon \max\left\{\|u\|^{l_\Psi},\|u\|^{m_\Psi}\right\}。 \tag{8}$$

下面将研究纤维映射在无穷远处和原点附近的行为。

引理 3.2 设(ϕ_1)-(ϕ_3)、(V_1)-(V_2)和(f_1)-(f_4)成立，对 $u \in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，则成立：

(1) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h_u'(t)}{t^{m-1}} > 0$，$\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{h_u'(t)}{t^{m-1}} = -\infty$；(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h_u(t)}{t^{m}} > 0$，$\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{h_u(t)}{t^{m}} = -\infty$。

证 先证(1)。因为

$$h_u'(t) = \int_{\mathbb{R}^N} t\left(\phi(t|\nabla u|)|\nabla u|^2 + V(x)\phi(t|u|)u^2\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tu)u\mathrm{d}x,$$

由注 1.1，引理 2.1 以及(7)可得

$$\begin{aligned} th_u'(t) &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi(t|\nabla u|)|t\nabla u|^2 + V(x)\phi(t|u|)|tu|^2\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tu)tu\mathrm{d}x \\ &\ge l\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(t|\nabla u|) + V(x)\Phi(t|u|)\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tu)tu\mathrm{d}x \\ &\ge lt^m\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|) + V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x - (\lambda m_\Psi - \varepsilon + C_\varepsilon)\max\left\{\|tu\|^{l_\Psi},\|tu\|^{m_\Psi}\right\} \end{aligned}。$$

对任意 $u \in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$，当 $0<t<1$ 时，有

$$\frac{h_u'(t)}{t^{m-1}} \ge l\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|) + V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x - (\lambda m_\Psi - \varepsilon + C_\varepsilon)\frac{\max\left\{\|tu\|^{l_\Psi},\|tu\|^{m_\Psi}\right\}}{t^m}。$$

由于 $m<l_\Psi$，于是 $\dfrac{h_u'(t)}{t^{m-1}} \ge l\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|) + V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x + o(1)$，故 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h_u'(t)}{t^{m-1}} > 0$。

进一步，根据引理 2.1，当 $t>1$ 时，有

$$\begin{aligned} th_u'(t) &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi(t|\nabla u|)|t\nabla u|^2 + V(x)\phi(|tu|)|tu|^2\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tu)tu\mathrm{d}x \\ &\le mt^m\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|) + V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,tu)tu\mathrm{d}x \end{aligned}。$$

所以 $\dfrac{h_u'(t)}{t^{m-1}} \le m\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|) + V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x - \dfrac{1}{t^m}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,tu)tu\mathrm{d}x$。利用$(f_4)$可得

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(x,tu)tu}{t^m}\mathrm{d}x = \liminf_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(x,tu)}{|tu|^{m-2}tu}|u|^m\mathrm{d}x = +\infty。$$

由 Fatou 引理，结合上式，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h_u'(t)}{t^{m-1}} \le m\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|) + V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x - \liminf_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(x,tu)tu}{t^m}\mathrm{d}x = -\infty。$$

结论(2)可以根据 L'Hospital 法则得到。证毕。

引理 3.3 设(ϕ_1)-(ϕ_3)和(V_1)成立，则

$$u \in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2 + V(x)\phi(|u|)u^2\right)\mathrm{d}x$$

和

$$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N}\left(m\Phi\left(|\nabla u|\right)-\phi\left(|\nabla u|\right)|\nabla u|^2+V(x)\left(m\Phi\left(|u|\right)-\phi\left(|u|\right)u^2\right)\right)\mathrm{d}x$$

都是弱下半连续的。

证 此引理的证明是初等的，此处从略。

引理 3.4 假设(ϕ_1)-(ϕ_3)、(V_2)和(f_1)-(f_4)成立，那么对$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，存在唯一的$t_{\max}(u)>0$，使得$t_{\max}(u)u \in \mathcal{M}$，并且对任意$u \in \mathcal{M}$，有$I(u)>0$。

证设$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，根据引理 3.2 知，当 t 足够小，$h_u'(t)>0$；当 t 足够大，$h_u'(t)<0$，则$h_u'(t)$至少存在$t_{\max}(u)\in(0,\infty)$，使得$h_u'\left(t_{\max}(u)\right)=0$，从而$t_{\max}(u)u \in \mathcal{M}$。

下面证明$t_{\max}(u)$是唯一的。事实上，由注 1.1，对任意$x \in \mathbb{R}^N$，$t>0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\phi\left(t|\nabla u|\right)\nabla(tu)\nabla u}{t^{m-1}}\right)=\frac{|\nabla u|^2\left(\phi'\left(t|\nabla u|\right)|\nabla(tu)|-(m-2)\phi\left(t|\nabla u|\right)\right)}{t^{m-1}}\le 0。 \tag{9}$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V(x)\phi\left(t|u|\right)tu^2}{t^{m-1}}\right)=\frac{u^2\left(\phi'\left(t|u|\right)|tu|-(m-2)V(x)\phi\left(t|u|\right)\right)}{t^{m-1}}\le 0。 \tag{10}$$

由$h_u'(t)=\left\langle I'(tu),u\right\rangle$，结合(3.6)、(3.7)和$(f_3)$，对任意$t>0$，$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_u'(t)}{t^{m-1}}\right)\le -\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f(x,tu)}{|tu|^{m-2}tu}\right)|u|^m\,\mathrm{d}x<0。 \tag{11}$$

因此，$t \mapsto \dfrac{h_u'(t)}{t^{m-1}}$在$(0,\infty)$上是递减函数，从而$h_u'(t)$有唯一的极大值点$t_{\max}(u)>0$，并且$t_{\max}(u)u \in \mathcal{M}$，由(11)式可知，对任意$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，$t>0$，有$h_u''(t)<0$。根据引理 3.2(1)知$h\left(t_{\max}(u)\right)>0$，故$I\left(t_{\max}(u)u\right)>0$。因为$u \in \mathcal{M}$当且仅当$t_{\max}(u)=1$，故对任意$u \in \mathcal{M}$，有$I(u)>0$。证毕。

引理 3.5 设(ϕ_1)-(ϕ_3)和(V_2)成立，定义$J: W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\to\mathbb{R}$：

$$J(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi\left(|\nabla u|\right)|\nabla u|^2+V(x)\phi\left(|u|\right)u^2\right)\mathrm{d}x，$$

则$J(u)$是C^1的，且

$$\left\langle J'(u),v\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\left(2\phi\left(|\nabla u|\right)+\phi'\left(|\nabla u|\right)|\nabla u|\right)\nabla u\nabla v\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\left(2\phi\left(|u|\right)+\phi'\left(|u|\right)|u|\right)uv\mathrm{d}x，\quad u,v \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)。$$

证 此证明是基本的，这里略去。

引理 3.6 设(ϕ_1)-(ϕ_3)、(V_2)和(f_1)-(f_4)成立，那么$\mathcal{M}$是$W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$的$C^1$子流形，并且泛函$I$在$\mathcal{M}$的临界点是$I$在$W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$上的临界点。

证 由$h_u(t)$的定义知，对$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，$h_u'(t)=\left\langle I'(tu),u\right\rangle$。定义函数$G(u):=\left\langle I'(u),u\right\rangle$，根据引理 3.5，对任意$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，知$G \in C^1$。由引理 3.4 的证明过程可得，$h_u(t)$在$t=1$处取得全局极大值，且当$t>0$时，对任意$u \in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，有$h_u''(t)<0$，因此

$$G'(u)=I''(u)\cdot(u,u)+\left\langle I'(u),u\right\rangle=h_u''(1)<0，\quad \forall u \in \mathcal{M}。$$

因为$\mathcal{M}=G^{-1}(0)$，且 0 是$G(u)$的正则值，所以$\mathcal{M}$是$W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$的$C^1$子流形。

不失一般性，假设u_0是I在$\mathcal{M}$中的局部极小值点，那么u_0也是下列极小化问题的解

$$\begin{cases} \min I(u) \\ h(u)=0 \end{cases}。$$

因此，由 Lagrange 乘数定理，存在 Lagrange 乘子 $\mu_1 \in \mathbb{R}$，使得

$$I'(u_0)=\mu_1 G'(u_0)。$$

于是

$$\langle I'(u_0),u_0\rangle=\mu_1\langle G'(u_0),u_0\rangle=0。$$

由于

$$\langle G'(u_0),u_0\rangle=h_u''(1)<0，\quad \forall u_0\in M。$$

所以 $\mu=0$，从而 $I'(u_0)=0$，故 u_0 是 I 的极小值点。证毕。

引理 3.7 设 (ϕ_1)-(ϕ_3)、(V_2) 和 (f_1)-(f_4) 成立，那么存在常数 $C>0$，使得对任意 $u\in\mathcal{M}$，有 $\|u\|>C$。

证 反证。假设存在 $\{u_n\}\subset\mathcal{M}$，对任意整数 $n\ge 1$，有 $\|u_n\|\le\frac{1}{n}$。给定 $\varepsilon>0$，由(3.4)知，存在 $C_\varepsilon>0$，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u_n|)+V(x)\Phi(|u_n|)\right)\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n^2+V(x)\phi(|u_n|)u_n^2\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{l}(\lambda m_\Psi-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^N}\Psi(|u_n|)\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{l}\int_{\mathbb{R}^N}\Psi(|u_n|)\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{l}(\lambda m_\Psi-\varepsilon)\max\left\{\|u_n\|^{l_\Psi},\|u_n\|^{m_\Psi}\right\}+\frac{C_\varepsilon}{l}\max\left\{\|u_n\|^{l_\Psi},\|u_n\|^{m_\Psi}\right\}\\
&=C_1\max\left\{\|u_n\|^{l_\Psi},\|u_n\|^{m_\Psi}\right\}+C_2\max\left\{\|u_n\|^{l_\Psi},\|u_n\|^{m_\Psi}\right\}
\end{aligned}$$

不妨假设 $\|\nabla u_n\|_\Phi\ge\|u_n\|_{\Phi,V}$，则有 $\|\nabla u_n\|_\Phi\ge\frac{1}{2}\|u_n\|$，$n=1,2,\cdots$，因此

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u_n|)+V(x)\Phi(|u_n|)\right)\mathrm{d}x\\
&\ge\min\left\{\|\nabla u_n\|_\Phi^l,\|\nabla u_n\|_\Phi^m\right\}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^m\min\left\{\|u_n\|^l,\|u_n\|^m\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^m\|u_n\|^m
\end{aligned}$$

所以

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m\|u_n\|^m\le\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u_n|)+V(x)\Phi(|u_n|)\right)\mathrm{d}x\le C\|u_n\|^{l_\Psi}+C_2\|u_n\|^{l_\Psi}\le C_3\|u_n\|^{l_\Psi}，$$

其中 C_1、C_2 和 C_3 是大于 0 的常数，进一步有 $1<C_3\|u_n\|^{l_\Psi-m}$。由于 $l_\Psi>m$。两边取极限，当 $n\to\infty$ 时，上式与 $\|u_n\|\le\frac{1}{n}$ 相矛盾，所以 Nehari 流形中元素的范数有正下界。证毕。

令 $C_{\mathcal{M}}=\inf\limits_{u\in\mathcal{M}}I(u)$，首先证明 I 的任何极小化序列在 $W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 上是有界的。

引理 3.8 假设 (ϕ_1)-(ϕ_3)、(V_1)-(V_2) 和 (f_1)-(f_4) 成立，设 $\{u_n\}$ 是泛函 I 在 Nehari 流形 $\mathcal{M}$ 中的极小化序列，那么 $\{u_n\}$ 在 $W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$ 中有界。

证反证。如果$\{u_n\}$在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中无界，则存在子序列(仍记为其本身)，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|=\infty，且\|u_n\|>1，\quad\forall n\in N。$$

因为$\{u_n\}\subset\mathcal{M}$是$I(u)$的极小化序列，故$\lim_{n\to\infty}I(u_n)=\inf_{u\in\mathcal{M}}I(u)$，且

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^m}=o_n(1)。$$

令$v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$，$n=1,2,\cdots$，则$\{v_n\}\subset W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$，且$\|v_n\|=1$，$\forall n\in N$。因此存在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中的元素$v$，使得$v_n\rightharpoonup v$（在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中)。

我们断言$v\neq 0$。事实上，假设$v\equiv 0$，因为$\{u_n\}\subset\mathcal{M}$，则

$$I(u_n)=\max_{t>0}I(tu_n)，\quad\forall n\in N。$$

设常数$z>0$，则

$$C_M+o_n(1)\ge I(zv_n)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(z|\nabla v_n|)+V(x)\Phi(z|v_n|)\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,zv_n)\mathrm{d}x。$$

由于在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中有$v_n\rightharpoonup 0$，根据引理 3.1(2)知$\int_{\mathbb{R}^N}F(x,zv_n)\mathrm{d}x\to 0$。不妨假设$\|\nabla v_n\|_\Phi\ge\|v_n\|_{\Phi,V}$，则有$\|\nabla v_n\|_\Phi\ge\frac{1}{2}\|v_n\|$，$n=1,2,\cdots$。由引理 2.1 和引理 2.2，得到

$$\begin{aligned}C_M+o_n(1)=I(u_n)&\ge\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(z|\nabla v_n|)+V(x)\Phi(z|v_n|)\right)\mathrm{d}x+o_n(1)\\&\ge\min\left\{\|z\nabla v_n\|_\Phi^l,\|z\nabla v_n\|_\Phi^m\right\}+\min\left\{\|zv_n\|_{\Phi,V}^l,\|zv_n\|_{\Phi,V}^m\right\}+o_n(1)\\&\ge\min\left\{\|z\nabla v_n\|_\Phi^l,\|z\nabla v_n\|_\Phi^m\right\}+o_n(1)\\&\ge\min\left\{\left\|\frac{1}{2}zv_n\right\|^l,\left\|\frac{1}{2}zv_n\right\|^m\right\}+o_n(1)\end{aligned}$$

对上述不等式两边取极限，则$C_{\mathcal{M}}\ge\min\left\{\left(\frac{1}{2}z\right)^l,\left(\frac{1}{2}z\right)^m\right\}$，$z>0$。得到矛盾，故$v\neq 0$。

令$n\to\infty$，由引理 2.1，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x&=\frac{1}{\|u_n\|^m}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u_n|)+V(x)\Phi(|u_n|)\right)\mathrm{d}x+o_n(1)\\&\le\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla v_n|)+V(x)\Phi(|v_n|)\right)\mathrm{d}x+o_n(1)\\&\le\max\left\{\|\nabla v_n\|_\Phi^l,\|\nabla v_n\|_\Phi^m\right\}+\max\left\{\|v_n\|_{\Phi,V}^l,\|v_n\|_{\Phi,V}^m\right\}+o_n(1)\\&=\|\nabla v_n\|_\Phi^l+\|v_n\|_{\Phi,V}^l+o_n(1)\\&\le\|v_n\|+o_n(1)=1+o_n(1)\end{aligned}$$

得到

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x\le 1。$$

另一方面，根据 Fatou 引理和(f_4)，注意到$v\neq 0$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x\ge\int_{\mathbb{R}^N}\liminf_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\liminf_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^m}|v_n|^m\,\mathrm{d}x=+\infty,$$

矛盾，因此$\{u_n\}$在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中有界。证毕。

引理 3.9 设(ϕ_1)-(ϕ_3)、(V_1)-(V_2)和(f_1)-(f_4)成立，则存在$u\in\mathcal{M}$，使得$C_{\mathcal{M}}=I(u)>0$。

证 设$\{u_n\}$是泛函 I 在 $\mathcal{M}$ 中的极小化序列，由引理 3.8，$\{u_n\}$在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中有界，从而存在$u\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$，使得$u_n\rightharpoonup u$ （在$W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)$中）。

易见$u\not\equiv0$。事实上，假设$u\equiv0$，对$\{u_n\}\subset\mathcal{M}$，有

$$\begin{aligned}0&\le\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u_n|)+V(x)\Phi(|u_n|)\right)\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2+V(x)\phi(|u_n|)u_n^2\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{12}$$

根据引理 3.1(1)可得$\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x=o_n(1)$，结合 12(3.9)式，则有$\|u_n\|\to0$ （$n\to\infty$），这与引理 3.7 中的结论$\|u\|>C$相矛盾，故$u\not\equiv0$。

由引理 3.3(1)和引理 3.1(2)知，$u\in W_V^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N)\mapsto\langle I'(u),u\rangle$是弱下半连续的，故

$$\langle I'(u),u\rangle\le\liminf_{n\to\infty}\langle I'(u_n),u_n\rangle=0。$$

从而$h_u'(1)=\langle I'(u),u\rangle\le0$，根据引理 3.4 及其证明过程知，存在$t\in(0,1]$使得$h_u'(tu)=0$，故$tu\in\mathcal{M}$。我们断言当$t=1$时，$u\in\mathcal{M}$。反证。假设$t\in(0,1)$，则

$$\begin{aligned}C_{\mathcal{M}}&\le I(tu)=I(tu)-\frac{1}{m}\langle I'(tu),tu\rangle\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(t|\nabla u|)-\frac{1}{m}\phi(t|\nabla u|)t^2|\nabla u|^2+V(x)\Phi(t|u|)-\frac{1}{m}V(x)\phi(t|u|)t^2u^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{m}f(x,tu)tu-F(x,tu)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{13}$$

由(f_1)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{m}f(x,t)t-F(x,t)\right\}=\frac{t^m}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{f(x,t)}{t^{m-1}}\right\}>0,$$

故对任意$x\in\mathbb{R}^N$，$t\mapsto\frac{1}{m}f(x,t)t-F(x,t)$在$(0,\infty)$上递增。利用$(\phi_3)$，通过简单计算可以得到

$$t\mapsto\Phi(t|\nabla u|)-\frac{1}{m}\phi(t|\nabla u|)t^2|\nabla u|^2+V(x)\Phi(t|u|)-\frac{1}{m}V(x)\phi(t|u|)t^2u^2$$

在$(0,\infty)$上递增。由(12)和(13)可得

$$\begin{aligned}C_M&<\int_{R^N}\left(\Phi(|\nabla u|)-\frac{1}{m}\phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{R^N}\left(V(x)\Phi(|u|)-\frac{1}{m}V(x)\phi(|u|)u^2\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{m}f(x,u)u-F(x,u)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

根据引理 3.3(2)和引理 3.1，

$$
\begin{aligned}
C_M &< \lim_{n\to\infty}\int_{R^N}\left(\Phi\left(\left|\nabla u_n\right|\right)-\frac{1}{m}\phi\left(\left|\nabla u_n\right|\right)\left|\nabla u_n\right|^2\right)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_{R^N}\left(V(x)\Phi\left(\left|u_n\right|\right)-\frac{1}{m}V(x)\phi\left(\left|u_n\right|\right)u_n^2\right)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{m}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x \\
&=\lim_{n\to\infty}\left(I(u_n)-\frac{1}{m}I'(u_n)u_n\right)=C_M
\end{aligned}
$$

上式是一个矛盾的结论，故 $t=1$，且 $u\in\mathcal{M}$。证毕。

定理 1.1 的证明 设 $\{u_n\}$ 是泛函在流形 $\mathcal{M}$ 中的极小化序列，由引理 3.8 知，存在流形 $\mathcal{M}$ 中的元素 u，使得 $u_n \rightharpoonup u$。由引理 2.4 可得在 $L^\Phi\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有 $u_n\to u$。

下面的证明分为两步：第一步证明在 $W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有 $u_n\to u$；第二步证明 u 是泛函 I 在 $W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中的临界点。

第一步：反证。存在 $\delta_1>0$，使得

$$
\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi\left(\left|\nabla u_n-\nabla u\right|\right)+V(x)\Phi\left(\left|u_n-u\right|\right)\right)\mathrm{d}x\ge\delta_1>0\text{。} \tag{14}
$$

根据 Brezis-Lieb 引理(见文献[10])有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left(\Phi\left(\left|\nabla u_n\right|\right)-\Phi\left(\left|\nabla u_n-\nabla u\right|\right)\right)+V(x)\left(\Phi\left(\left|u_n\right|\right)-\Phi\left(\left|u_n-u\right|\right)\right)\right)\mathrm{d}x \\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi\left(|u|\right)+V(x)\Phi\left(|u|\right)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}\text{。} \tag{15}
$$

由(14)和(15)可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi\left(|\nabla u|\right)+V(x)\Phi\left(|u|\right)\right)\mathrm{d}x &\le \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi\left(\left|\nabla u_n\right|\right)+V(x)\Phi\left(\left|u_n\right|\right)\right)\mathrm{d}x-\delta_1 \\
&< \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi\left(\left|\nabla u_n\right|\right)+V(x)\Phi\left(\left|u_n\right|\right)\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}\text{。}
$$

再根据 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$
C_{\mathcal{M}}=\lim_{n\to\infty}I(u_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi\left(\left|\nabla u_n\right|\right)+V(x)\Phi\left(\left|u_n\right|\right)\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n)\mathrm{d}x\right\}>I(u)\text{。}
$$

上式是一个矛盾结论，故在 $W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中有 $u_n\to u$。

第二步：因为 $I(u)\in C^1$，故 $I'(u_n)\to I'(u)$。根据引理 3.9 知，$u\in\mathcal{M}$，且

$$
C_{\mathcal{M}}=I(u)=\min_{u\in\mathcal{M}}I(u)>0\text{。}
$$

由引理 3.6 可得 $\mathcal{M}$ 是 $W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 的 C^1 的子流形，故 u 是泛函 I 在流形 $\mathcal{M}$ 中的临界点，从而 u 是泛函 I 在 $W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中的临界点。

4. 定理 1.2 的证明

考虑截断函数 $f_\pm:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，

$$
f_+(x,t)=\begin{cases}f(x,t),t\ge0,\\0,t<0,\end{cases}\quad f_-(x,t)=\begin{cases}f(x,t),t\le0,\\0,t>0,\end{cases}
$$

显然 $f_\pm$ 都是连续的，那么对应的能量泛函为 $I_\pm:W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\to\mathbb{R}$，

$$I_{\pm}(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi(|\nabla u|)+V(x)\Phi(|u|)\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F_{\pm}(x,u)\mathrm{d}x\text{，}\quad u\in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\text{，}$$

其中 $F_{\pm}(x,t)=\int_0^t f_{\pm}(x,s)\mathrm{d}s$， $x\in\mathbb{R}^N$， $t\in\mathbb{R}$。与 f_+ 和 f_- 相对应的 Nehari 流形分别为

$$\mathcal{M}^{+}=\left\{u\in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}:\left\langle I_+'(u),u\right\rangle=0\right\}\text{；}$$

$$\mathcal{M}^{-}=\left\{u\in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}:\left\langle I_-'(u),u\right\rangle=0\right\}\text{。}$$

由引理 3.7 可知，$\mathcal{M}^{\pm}$ 是 C^1 的子流形，并且 $\mathcal{M}^{\pm}$ 中的元素的范数有正下界，此外 $c^{\pm}=\inf\limits_{w\in\mathcal{M}^{\pm}}I_{\pm}(w)$ 是泛函 $I_{\pm}$ 的临界值，故泛函 I 有两个临界点 $u_1,u_2\in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，使得

$$I_+(u_1)=c^+>0\text{，}\quad I_-(u_2)=c^->0\text{。}$$

给定 $u\in W_V^{1,\Phi}\left(\mathbb{R}^N\right)\setminus\{0\}$，令 $u^+=\max\{u,0\}$， $u^-=\min\{u,0\}$，因此 $u=u^++u^-$。取 u_1^- 作为测试函数，则有

$$\begin{aligned}0&\le\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Phi\left(\left|\nabla u_1^-\right|\right)+V(x)\Phi\left(\left|u_1^-\right|\right)\right)\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\phi\left(\left|\nabla u_1^-\right|\right)\left|\nabla u_1^-\right|^2+V(x)\phi\left(\left|u_1^-\right|\right)u_1^{-2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{l}\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_1)u_1^-\mathrm{d}x=0\end{aligned}\tag{16}$$

由(16)知 $u_1^-\equiv0$，故 $u_1\ge0$ 且 $u_1\not\equiv0$，同理可得 $u_2\le0$ 且 $u_2\not\equiv0$。证毕。

参考文献

[1] Benci, V., Fortunato, D. and Pisani, L. (1998) Solitons Like Solutions of a Lorentz Invariant Equation in Dimension 3. *Reviews in Mathematical Physics*, **10**, 315-344. https://doi.org/10.1142/S0129055X98000100

[2] Huentutripay, J. and Manásevich, R. (2006) Nonlinear Eigenvalues for a Quasilinear Elliptic System in Orlicz-Sobolev Spaces. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **18**, 901-929. https://doi.org/10.1007/s10884-006-9049-7

[3] Carvalho, M.L., Goncalves, J.V. and Silva, E.D. (2015) On Quasilinear Elliptic Problems without the Ambrosetti-Rabinowitz Condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **426**, 466-483. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.01.023

[4] Silva, E.D., Carvalho, M.L., Gonçalves, J.V. and Goulart, C. (2019) Critical Quasilinear Elliptic Problems Using Concave-Convex Nonlinearities. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **198**, 693-726. https://doi.org/10.1007/s10231-018-0794-0

[5] Carvalho, M.L., Corrêa, F.J., Goncalves, J.V. and Silva, E.D. (2017) Sign Changing Solutions for Quasilinear Superlinear Elliptic Problems. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **68**, 391-420. https://doi.org/10.1093/qmath/haw047

[6] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual Variational Methods in Critical Points Theory and Application. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[7] Adams, R.A. and Fournier, J.F. (2003) Sobolev Space. Academic Press, New York.

[8] Fukagai, N. and Narukawa, K. (2007) On the Existence of Multiple Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Eigenvalue Problems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **186**, 539-564. https://doi.org/10.1007/s10231-006-0018-x

[9] Liu, S. (1909) On Quasilinear Elliptic Problems with Finite or Infinite Potential Wells.

[10] Brezis, H. and Lieb, E. (1983) A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **88**, 486-490. https://doi.org/10.2307/2044999