Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 640-646
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114077

三维不可压磁流体力学方程弱解正则准则

李天理[1]，王　力[2]

[1]安徽职业技术学院基础教学部，安徽 合肥
[2]安徽职业技术学院铁道学院，安徽 合肥
Email: litianli87423@163.com

收稿日期：2021年3月19日；录用日期：2021年4月21日；发布日期：2021年4月29日

摘　要

文章考虑在三维情况下不可压的磁流体力学(MHD)方程解的正则性。使用Young不等式，Hölder不等式及Sobolev嵌入技术等，扩大了弱解正则的函数空间，证明了当$\partial_3 u,\partial_3 b\in L^p\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)$，$2/p+3/q=46/25+3/25q,31/8\le q\le\infty$时，或者当$\partial_3 u,\partial_3 b\in L^p\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)$，$2/p+3/q=22/13+3/13q$，$19/8\le q\le\infty$时，且都有$b_1,b_2\in L^{\frac{2s}{s-3}}\left(0,T;L^s\left(R^3\right)\right),s>3$，则三维不可压MHD方程弱解(u, b)在$\left(0,T\right]$上是正则的。

关键词

MHD方程，正则准则，Sobolev嵌入不等式，Young不等式

Regularity Criterion of the Weak Solution for the 3D Incompressible MHD Equations

Tianli Li[1], Li Wang[2]

[1]Department of Basic Education, Anhui Vocational and Technical College, Hefei Anhui
[2]Railway College, Anhui Vocational and Technical College, Hefei Anhui
Email: litianli87423@163.com

Received: Mar. 19th, 2021; accepted: Apr. 21st, 2021; published: Apr. 29th, 2021

Abstract

This paper considers the regularity of weak solutions for incompressible MHD equations in 3D cases. Here, Yuong inequalities, Hölder inequalities and Sobolev embedding techniques are used

文章引用: 李天理, 王力. 三维不可压磁流体力学方程弱解正则准则[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 640-646.
DOI: 10.12677/pm.2021.114077

to expand the integral space to which the weak solution belongs. Here, it is proved that the weak solution (*u*, *b*) is regular on (0,*T*], if $\partial_3 u,\partial_3 b\in L^p\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)$ and $2/p+3/q=46/25+3/25q$, $31/8\le q\le\infty$, or $\partial_3 u,\partial_3 b\in L^p\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)$, $2/p+3/q=22/13+3/13q, 19/8\le q\le\infty$, together with $b_1,b_2\in L^{\frac{2s}{s-3}}\left(0,T;L^s\left(R^3\right)\right), s>3$.

Keywords

MHD Equation, Regularity Criterion, Sobolev Embedding Inequality, Young Inequality

1. 引言及主要结论

本文主要考虑下列三维不可压 MHD 方程弱解的正则性

$$\begin{cases}\partial_t \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p=\Delta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b},\\ \partial_t \boldsymbol{b}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=\Delta\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0,\\ \boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x),\boldsymbol{b}(x,0)=\boldsymbol{b}_0(x),\end{cases}\quad (x,t)\in R^3\times(0,T] \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 和 $p=p(x,t)$ 分别表示未知流体速度向量场，磁流体速度向量场和标量压力场，$\boldsymbol{u}_0(x)$，$\boldsymbol{b}_0(x)$ 是初始条件，且满足在广义下有 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=\nabla\cdot\boldsymbol{b}_0=0$。

众所周知在文献[1]中，指出满足初始条件时，方程(1)存在弱解是局部正则解。然而，是否存在全局正则性的弱解仍然是一个充满挑战的公开问题。但是，文献中有大量结果表明，如果对弱解施加一些附加条件，则对这个问题的回答是肯定的(参见[2]-[14])。对压力 p 附加一些条件同样也可得到弱解具有正则性(参见[15] [16])。在这些结果中，我们对仅涉及速度 u，磁场 b 更感兴趣。

最近，Sadek Gala，Maria Alessandra Ragusa 在[7]中证明了

$$\partial_3(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{b})\in L^p\left((0,T);L^q\left(R^3\right)\right),\ \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=\frac{8}{5}+\frac{3}{5q},4\le q\le\infty,$$

$$\text{或者 }\partial_3(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{b})\in L^p\left((0,T);L^q\left(R^3\right)\right),\ \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=\frac{4}{11}+\frac{9}{11q},\frac{5}{2}\le q\le\infty,$$

则弱解在 $(0,T]$ 上是正则的。

重要结论之一是著名的 Ni-Guo-Zhou 准则(参见[8]定理 1.3，类似的结果也可参考[17]定理 1.2)。如下

$$\begin{cases}\boldsymbol{b},u_3\in L^{p_1}\left(0,T;L^{q_1}\left(R^3\right)\right), & 2/p_1+3/q_1\le 1, 3<q_1\le\infty,\\ \partial\boldsymbol{b},\partial_3\boldsymbol{u}\in L^{p_2}\left(0,T;L^{q_2}\left(R^3\right)\right), & 2/p_2+3/q_2\le 2, 3/2<q_2\le\infty.\end{cases} \tag{2}$$

受文献[7]和[8]的启发，我们得到比文献[7]如下更优的结果如下定理 1。

这里 $\boldsymbol{w}^\pm=\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}_0^\pm=\boldsymbol{u}_0\pm\boldsymbol{b}_0$.

定理 1 假设 $\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{b}_0 \in L^2\left(R^3\right)$，且在广义积分条件下有 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=\nabla\cdot\boldsymbol{b}_0=0,T>0$，设 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{b})$ 是 MHD 方程的 1 在 $(0,T]$ 上满足初始条件的弱解，且 $b_1,b_2\in L^{\frac{2s}{s-3}}\left(0,T;L^s\left(R^3\right)\right),s>3$，如果有

$$\partial_3\boldsymbol{w}\in L^p\left((0,T);L^q\left(R^3\right)\right),\ \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=\frac{46}{25}+\frac{3}{25q},\frac{31}{8}\le q\le\infty \tag{3}$$

或者

$$\partial_3\boldsymbol{w}\in L^p\left((0,T);L^q\left(R^3\right)\right),\ \frac{2}{p}+\frac{3}{q}=\frac{22}{13}+\frac{3}{13q},\frac{19}{8}\le q\le\infty \tag{4}$$

则弱解在 $(0,T]$ 上是正则的，

注：上式的 q 值比文献[7]的值相应减小，等式值相应增大，所以此结果比文献[7]结果更优。

2. 主要结果的证明

我们把方程(1)的第一个方程和第二个方程加减运算，把方程 1 转化为如下方程

$$\begin{cases}\partial_t\boldsymbol{w}^+ +\boldsymbol{w}^-\cdot\nabla\boldsymbol{w}^+ +\nabla p=\Delta\boldsymbol{w}^+,\\ \partial_t\boldsymbol{w}^- +\boldsymbol{w}^+\cdot\nabla\boldsymbol{w}^- +\nabla p=\Delta\boldsymbol{w}^-,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{w}^+=\nabla\cdot\boldsymbol{w}^-=0,\\ \boldsymbol{w}^+(x,0)=\boldsymbol{w}_0^+(x),\boldsymbol{w}^-(x,0)=\boldsymbol{w}_0^-(x),\end{cases}\quad (x,t)\in R^3\times(0,T] \tag{5}$$

为了证明定理 1，让我们介绍一些辅助结论。我们给出三维乘法的 Sobolev 不等式及压力估计如下：

引理 1 存在一个常数 $C>0$，使得下式成立

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^{3q}}\le C\|\partial_1\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}\|\partial_2\boldsymbol{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}\|\partial_3\boldsymbol{u}\|_{L^q}^{\frac{1}{3}},\quad 1\le q\le\infty. \tag{6}$$

引理 2 假设 $\left(w^+,w^-,P\right)$ 是方程 2.1 组的光滑解，那么有下式成立

i) $\|P\|_{L^r}\le C\left\|\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^{2r}}\left\|\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^{2r}}$， (7)

ii) $\|\partial_3 P\|_{L^r}\le C\left\|\boldsymbol{w}^-\cdot\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^r}$， (8)

iii) $\|\partial_3 P\|_{L^r}\le C\left\|\boldsymbol{w}^+\cdot\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^r}$. (9)

注：这里 $1<r<\infty$，引理 1 的详细证明参见 Wu 和 Cao 文献[3]，引理 2 的证明可参见文献[16]。

定理 1 的证明：

因为 当 $\frac{31}{8}\le q\le\infty$ 时，$L^{\frac{25q}{23q-36}}\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)\subset L^{\frac{2q}{2q-3}}\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)$，

当 $\frac{19}{8}\le q\le\infty$ 时，$L^{\frac{13q}{11q-18}}\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)\subset L^{\frac{2q}{2q-3}}\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)$。

根据定理 1 和(2)式的假设，定理 1 的证明只要证明下式成立

$$u_3,b_3\in L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right).$$

在方程(5)的第一个和第二个方程两边分别用 $\boldsymbol{w}^+,\boldsymbol{w}^-$ 作内积，利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{w}^+=\nabla\cdot\boldsymbol{w}^-=0$，分部积分相加得：

$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{w}^+(\cdot,t)\right\|_{L^2}^2+\left\|\boldsymbol{w}^-(\cdot,t)\right\|_{L^2}^2+2\int_0^t\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+(\cdot,\tau)\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{w}^-(\cdot,\tau)\right\|_{L^2}^2\right)\mathrm{d}\tau\\ &\le\left\|\boldsymbol{w}^+(\cdot,0)\right\|_{L^2}^2+\left\|\boldsymbol{w}^-(\cdot,0)\right\|_{L^2}^2\le C\end{aligned}. \tag{10}$$

用$\left|\boldsymbol{w}_3^+\right|\boldsymbol{w}_3^+,\left|\boldsymbol{w}_3^-\right|\boldsymbol{w}_3^-$分别与方程(5)的第一个和第二个方程作内积，利用$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^+=\nabla\cdot\boldsymbol{w}^-=0$，然后相加得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^3+\left\|w_3^-\right\|_{L^3}^3\right)+\frac{4}{9}\int_{R^3}\left(\left|\nabla\left|w_3^+\right|^{3/2}\right|^2+\left|\nabla\left|w_3^-\right|^{3/2}\right|^2\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_{R^3}\partial_3 p\cdot w_3^+\left|w_3^+\right|\mathrm{d}x-\int_{R^3}\partial_3 p\cdot w_3^-\left|w_3^-\right|\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2\end{aligned}\qquad(11)$$

针对定理1第一种情况的证明，利用Hölder不等式，Yuong不等式和式(8)，对式(11)右边第一项进行估计得

$$\begin{aligned}&\left|I_1\right|\le C\left\|\partial_3 p\right\|_{L^3}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\quad(\text{由 Hölder 不等式})\\&\le C\left\|\boldsymbol{w}^+\cdot\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^3}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\quad(\text{由式(8)})\\&\le C\left\|\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^{3q/(q-3)}}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\\&\le C\left\|\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{(8q-31)/3(4q-3)}\left\|\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^{3q}}^{(q+18)/2(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\\&\le C\left\|\partial_1\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{(q+18)/6(4q-3)}\left\|\partial_2\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{(q+18)/6(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{(q+18)/6(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\\&\le C\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{(q+18)/3(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{(q+18)/6(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\\&\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{(q+18)/(23q-36)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{6(4q-3)/(23q-36)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\\&\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2\end{aligned}\qquad(12)$$

类似$\left|I_1\right|$的估计方法，得到式(11)右边第二项$\left|I_2\right|$的估计如下：

$$\left|I_2\right|\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2.\qquad(13)$$

由$\left|I_1\right|$和$\left|I_2\right|$的估计式(12)和(13)代入式(11)得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^3+\left\|w_3^-\right\|_{L^3}^3\right)\\&\le\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^3+\left\|w_3^-\right\|_{L^3}^3\right)+\frac{4}{9}\left(\left\|\nabla\left|w_3^+\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left|w_3^-\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2}^2\right)\\&\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}\right)\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2+\left\|w_3^-\right\|_{L^3}^2\right)\end{aligned}.\qquad(14)$$

在上式两边同时除以$\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2+\left\|w_3^-\right\|_{L^3}^2\right)$，在时间空间上积分，利用能量不等式(10)和式(3)得到

$$\left\|w_3^+\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^3\left(R^3\right)\right)}+\left\|w_3^-\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^3\left(R^3\right)\right)}\le C.$$

由式(14)，上式和能量不等式(10)可得

$$\begin{aligned}&\frac{4}{9}\left(\left\|\nabla\left|w_3^+\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\left|w_3^-\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2}^2\right)\\&\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{25q/(23q-36)}\right)\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^2+\left\|w_3^-\right\|_{L^3}^2\right)\le C\end{aligned}.$$

所以由嵌入不等式得

$$\begin{aligned}\left\|w_3^+\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}+\left\|w_3^-\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}&=\left\|\left|w_3^+\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2\left(0,T;L^6\left(R^3\right)\right)}^{\frac{2}{3}}+\left\|\left|w_3^-\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2\left(0,T;L^6\left(R^3\right)\right)}^{\frac{2}{3}}\\&\le\left\|\nabla\left|w_3^+\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2\left(0,T;L^2\left(R^3\right)\right)}^{\frac{2}{3}}+\left\|\nabla\left|w_3^-\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2\left(0,T;L^2\left(R^3\right)\right)}^{\frac{2}{3}}\le C\end{aligned}.$$

所以得

$$\begin{aligned}\left\|u_3\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}&=\frac{1}{2}\left\|\left(u_3+b_3\right)+\left(u_3-b_3\right)\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}\\&\le\frac{1}{2}\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}+\left\|w_3^-\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}\right)\le C\end{aligned}.$$

同理可证

$$\left\|b_3\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}=\frac{1}{2}\left\|\left(u_3+b_3\right)-\left(u_3-b_3\right)\right\|_{L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)}\le C.$$

所以定理 1 第一种情况证明完成。

定理 1 第二种情况的证明。利用 Hölder 不等式，Yuong 不等式和式(7)，对式(11)右边第一项进行另一种估计得

$$\begin{aligned}\left|I_1\right|&=\left|\int_{R^3}\partial_3 p\cdot w_3^+\left|w_3^+\right|\mathrm{d}x\right|\\&\le C\int_{R^3}|p|\left|\partial_3 w_3^+\right|\left|w_3^+\right|\mathrm{d}x\\&\le C\|p\|_{L^{3q/(2q-3)}}\left\|\partial_3 w_3^+\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\le C\left(\left\|\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^{6q/(2q-3)}}^2+\left\|\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^{6q/(2q-3)}}^2\right)\left\|\partial_3 w_3^+\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\le C\left\|\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{2(8q-19)/3(4q-3)}\left\|\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^{3q}}^{2(q+9)/2(4q-3)}\left\|\partial_3 w_3^+\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\quad+C\left\|\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^{2(8q-19)/3(4q-3)}\left\|\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^{3q}}^{2(q+9)/2(4q-3)}\left\|\partial_3 w_3^+\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\le C\left\|\partial_1\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_2\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_3 w_3^+\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\quad+C\left\|\partial_1\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^{(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_2\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^{(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_3 w_3^+\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\le C\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^{2(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{13q/3(4q-3)}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\quad+C\left\|\nabla\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^{2(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{(q+9)/3(4q-3)}\left\|\partial_3 w^+\right\|_{L^q}\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\quad+C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{(q+9)/(11q-18)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{3(4q-3)/(11q-18)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\quad+C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{(q+9)/(11q-18)}\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{3(4q-3)/(11q-18)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\\&\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)}+\left\|\partial_3\boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}\end{aligned}\qquad(15)$$

同理可证

$$\left|I_2\right| \le C\left(\left\|\nabla \boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla \boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_3 \boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)} + \left\|\partial_3 \boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)}\right)\left\|w_3^+\right\|_{L^3}. \quad (16)$$

由$\left|I_1\right|$和$\left|I_2\right|$的估计式(15)和(16)代入式(11)得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^3 + \left\|w_3^-\right\|_{L^3}^3\right) \\
&\le \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3}^3 + \left\|w_3^-\right\|_{L^3}^3\right) + \frac{4}{9}\left(\left\|\nabla\left|w_3^+\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\left|w_3^-\right|^{\frac{3}{2}}\right\|_{L^2}^2\right) \\
&\le C\left(\left\|\nabla \boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla \boldsymbol{w}^+\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_3 \boldsymbol{w}^+\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)} + \left\|\partial_3 \boldsymbol{w}^-\right\|_{L^q}^{13q/(11q-18)}\right)\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3} + \left\|w_3^-\right\|_{L^3}\right)
\end{aligned}$$

由上式两边同时除以$\left(\left\|w_3^+\right\|_{L^3} + \left\|w_3^-\right\|_{L^3}\right)$，并利用能量不等式(10)和式(4)得

$$\left\|w_3^+\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^3\left(R^3\right)\right)} + \left\|w_3^-\right\|_{L^\infty\left(0,T;L^3\left(R^3\right)\right)} \le C.$$

同理定理1第一种情况的证明，可证得$u_3, b_3 \in L^3\left(0,T;L^9\left(R^3\right)\right)$，所以定理第二种情况得证。

基金项目

安徽省省级自然科学基金(KJ20180002)。

参考文献

[1] Sermange, M. and Temam, R. (1983) Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 635-664. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360506

[2] Chen, X.-C., Gala, S. and Guo, Z.-G. (2011) A New Regularity Criterion in Terms of the Direction of the Velocity for the MHD Equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, **113**, 207-213. https://doi.org/10.1007/s10440-010-9594-2

[3] Cao, C. and Wu, J. (2010) Two Regularity Criteria for the 3D MHD Equations. *Differential Equations*, **248**, 2263-2274. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.09.020

[4] Gala, S. and Ragusa, M.A. (2016) A Logarithmic Regularity Criterion for the Two Dimensional MHD Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**, 1752-1758. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.07.001

[5] Jia, X. and Zhou, Y. (2012) Regularity Criteria for the 3D MHD Equations via Partial Derivatives. *Kinetic & Related Models*, **5**, 505-516. https://doi.org/10.3934/krm.2012.5.505

[6] Dong, B.Q., Jia, Y. and Zhang, W. (2012) An Improved Regularity Criterion of Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **13**, 1159-1169. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.09.010

[7] Gala, S. and Ragusa, M.A. (2020) New Regularity Criterion for the 3D Incompressible MHD Equations via Partial Derivatives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **481**, 1-7. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123497

[8] Ni, L.-D., Guo, Z.-G. and Zhou, Y. (2012) Some New Regularity Criteria for the 3D MHD Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **396**, 108-118. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.05.076

[9] Jiang, Z.-H., Cao, L. and Zou, R. (2020) Global Regularity of N Dimensional Generalized MHD Equations without Magnetic Diffusion. *Applied Mathematics Letters*, **101**, Article ID: 106065. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106065

[10] Luo, Y.W. (2010) On the Regularity of Generalized MHD Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 806-808. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.052

[11] Zhou, Y. (2005) Remarks on Regularities for the 3D MHD Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **12**, 881-886. https://doi.org/10.3934/dcds.2005.12.881

[12] Zhang, Z.-J. (2011) Remarks on the Regularity Criteria for Generalized MHD Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 799-802. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.017

[13] Zhou, Y. (2007) Regularity Criteria for the Generalized Viscous MHD Equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **24**, 491-505. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2006.03.014

[14] Zhang, Z.J. (2014) Remarks on the Global Regularity Criteria for the 3D MHD Equations via Two Components. *Zeitschrift fur Angewandte mathematik und Physik*, **55**, Article ID: 031505. https://doi.org/10.1007/s00033-014-0461-2

[15] Zhang, Z.J., Li, P. and Yu, G.-H. (2013) Regularity Criteria for the 3D MHD Equations via One Directional Derivative of the Pressure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **401**, 66-71. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.11.022

[16] Jia, X.J. and Zhou, Y. (2012) A New Regularity Criterion for the 3D Incompressible MHD Equations in Terms of One Component of the Gradient of Pressure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **396**, 345-350. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.06.016

[17] Jia, X.-J. and Zhou, Y. (2012) Regularity Criteria for the 3D MHD Equations Involving Partial Components. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **13**, 410-418. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.07.055