

完全图去除路 P_{10} 的图谱特征

林智浩

广东技术师范大学, 数学与系统科学学院, 广东 广州
Email: zhihaolin623@163.com

收稿日期: 2021年4月17日; 录用日期: 2021年5月20日; 发布日期: 2021年5月27日

摘要

如果与图 G 同谱的所有图同构于图 G , 则称图 G 是由其图谱所决定的。设 $K_n \setminus P_l$ 是由完全图 K_n 去除图 P_l 的边所得到的子图, 其中图 P_l 是长为 $l-1$ 的路。Cámara和Haemers给出猜想1: 对于任意的整数 $l(2 \leq l \leq n)$, $K_n \setminus P_l$ 可由其邻接谱所决定。本文证明在 $l=10$ 的情况下猜想1是正确的。

关键词

图谱, 同谱图, 谱特征, 路

Spectral Characterization of the Complete Graph by Deleting P_{10}

Zhihao Lin

School of Mathematics and System Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou Guangdong
Email: zhihaolin623@163.com

Received: Apr. 17th, 2021; accepted: May 20th, 2021; published: May 27th, 2021

Abstract

A graph G is said to be determined by its spectrum if any graph having the same spectrum as G is isomorphic to G . Let $K_n \setminus P_l$ be the graph obtained from K_n by deleting edges of P_l , where P_l is a path of length $l-1$. Cámara and Haemers conjectured that $K_n \setminus P_l$ is determined by its adjacency spectrum for every $2 \leq l \leq n$. In this paper, we show that the conjecture is true for $l=10$.

Keywords

Graph Spectrum, Cospectral Graphs, Spectral Characterization, Path

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文所考虑的图都是无向、有限的简单图，即是不包含环和多重边的图。图谱中的一些符号和定义，请参阅文献[1]。

设 $G=(V,E)$ ，其点集和边集分别记为 $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ 和 $E(G)=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ 。设 $A(G)$ 是图 G 的 $(0,1)$ 邻接矩阵，图 G 的特征多项式记为 $P_G(\lambda)=\det(\lambda I-A(G))$ 。图 G 的图谱包含了图 G 的所有特征值(包含重数)。如果两个图有一样的邻接谱，那么称这两个图同谱。如果任何与图 G 具有相同谱的图与图 G 同构，则称图 G 是由其谱所决定的(简称 DS)。

图谱能够反映出图的一些有用的组合信息。图谱理论中的一个基本问题是“哪些图是 DS?”。这个问题起源于化学，可以追溯到 60 多年前。而在近些年来，它受到了研究者的广泛关注。

然而，证明一个图是 DS 通常是一个非常困难的问题。到目前为止，很少有一类具有特殊结构的图被证明是 DS。通常情况下，DS 的图只包含有很少数的边，如 T 形树图[2]、 ∞ 图[3]、棒棒糖图[4]和 θ 图[5] 等等。对于含有大量边的稠密图，这通常很难证明他们是 DS。比如在文献[6]中，一条路的补图 \bar{P}_n 被证明是 DS，但是这个证明远比证明路 P_n 是 DS 涉及的多。关于这一问题的更多背景可以参阅文献[7][8]。

在文献[9]中，Cámara 和 Haemers 等人研究了在完全图下删除了其中的一些边后所得到的图是 DS。 P_l 为一条长为 $l-1$ 的路， K_n 为 n 阶的完全图。在 K_n 中删除掉路 P_l 的边所得到的图记为 $K_n \setminus P_l$ 。他们给出了以下的猜想：

猜想 1 (Cámara 和 Haemers [9]) 对于任意的整数 l 满足 $0 < l \leq n$ ， $K_n \setminus P_l$ 是 DS。

在文献[9]中，作者已经证明了在 $l \leq 6$ 时猜想 1 是正确的。当 $n=l$ 时，也被证明了猜想 1 是正确的，这也是文献[3]中的主要结果。Mao, Cioabă 和 Wang 在文献[10]中证明了当 $7 \leq l \leq 9$ 时，猜想 1 是正确的。本文证明了在 $l=10$ 时，猜想 1 是正确，即：

定理 1.1 当 $l=10$ 时，图 $K_n \setminus P_l$ 是 DS。

在第二部分中，将给出一些重要的引理及其证明。在第三部分中给出了定理 1.1 的证明。本文总结和进一步的研究问题将会在第四部分给出。

2. 一些引理的介绍和证明

在这一部分中，将给出证明定理 1.1 所需要的一些引理。

引理 2.1 (van Dam 和 Haemers [7]) 图 G 的下列性质可以从邻接谱推导出来：

- 1) 顶点的数量；
- 2) 边的数量；
- 3) 固定长度的闭途径数量。

引理 2.2 (Mao, Cioabă 和 Wang [11]) 设 $N_G(H)$ 为在图 G 中与图 H 同构的子图(不一定是诱导)的数目，

$N_G(i)$ 为图 G 中长为 i 的闭途径数目。设 $N'_H(i)$ 为经过图 H 所有边且长为 i 的闭途径数目, $S_i(G)$ 为图 G 中所有连通子图 H 的集合, 其中 $N'_H(i) \neq 0$ 。这可以得出 $N_G(i)$ 为

$$N_G(i) = \sum_{H \in S_i(G)} N_G(H) N'_H(i)。$$

引理 2.3 (Omid [\[11\]](#)) 以下给出的是图 G 中长为 2、3、4、5 的闭途径的数目:

$$1) N_G(2) = 2m, \quad N_G(3) = 6N_G(K_3)。$$

$$2) N_G(4) = 2m + 4N_G(P_3) + 8N_G(C_4); \quad N_G(5) = 30N_G(K_3) + 10N_G(C_5) + 10N_G(G_a)。$$

其中 m 为 G 的边数, 图 G_a 为圈图 C_3 上任一个顶点加上一条边得到的图(见图 2(a))。

引理 2.4 (Cvetković, Doob 和 Sachs [\[1\]](#)) 设图 G 中 k -闭途径的数量为 c , 那么该数量可以由其邻接谱决定, 即

$$c = \sum \lambda_i^k。$$

设 n 阶图 G 的邻接谱为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, n 阶图 G' 的邻接谱为 $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n$ 。众所周知, 若 $\lambda_i = \lambda'_i$, $i=1, 2, \dots, n$, 那么有

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i'^k。$$

也就是两个图的邻接谱相同, 那么它们的各特征值的 k 次方和也相等, 所以可以得到当

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i'^k,$$

则有 λ_i 与 λ'_i 不全相等, $i=1, 2, \dots, n$ 。因此结合引理 2.4, 可以得到这么一个结论: 当两个阶数相同的图的 k -闭途径数量(k 为正整数)不相同, 则它们的邻接谱不相同, 即这两个图不同谱。引理 2.5~2.7 分别给出了当 $k=3, 4, 5$ 时, 图 G 补图中 k -闭途径数量的计算方法。

引理 2.5 (Doob 和 Haemers [\[6\]](#)) 设图 G 有 n 个顶点, m 条边, t 个子图 C_3 和其度序列为 d_1, d_2, \dots, d_n 。设 \bar{t} 为图 G 补图的子图 C_3 数量。则有

$$\bar{t} = \binom{n}{3} - (n-1)m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 - t。$$

引理 2.6 (Cámara 和 Haemers [\[9\]](#)) 设图 G 有 n 个顶点, m 条边, 其补图 4-闭途径的数量由图 G 的顶点和边的数量以及图 G 中同构于 P_3 , $K_2 \cup K_2$, P_4 和 C_4 的子图(不一定是诱导)数量所决定, 分别用 m_1 , m_2 , m_3 和 m_4 表示, 以及将图 K_n 中 4-闭途径的数量表示为 $W_n = (n-1)^4 + n - 1$, 则图 G 补图中的 4-闭途径数量等于

$$W_n - (8n^2 - 32n + 34)m + (8n - 20)m_1 + 16m_2 - 8m_3 + 8m_4,$$

其中

$$\begin{aligned} n &:= |V(G)|, \quad m := |E(G)|, \quad m_1 := N_G(P_3), \\ m_2 &:= N_G(K_2 \cup K_2), \quad m_3 := N_G(P_4), \quad m_4 := N_G(C_4). \end{aligned}$$

研究长为 5 的闭途径的情况会更加困难, 将由以下引理提出。

引理 2.7 (Mao, Cioabă 和 Wang [\[10\]](#)) 设图 G 有 n 个顶点、 m 条边, 其补图 5-闭途径的数量由图 G 的顶点和边的数量, 以及图 G 中同构于 P_3 , $K_2 \cup K_2$, P_4 , K_3 , $P_3 \cup K_2$, $K_{1,3}$, P_5 , G_a 和 C_5 的子图(不一定是诱导)数量所决定, 分别用 m_1 , m_2 , m_3 , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 和 s_6 表示, 以及将图 K_n 中 5-闭

途径的数量表示为 $W_n = 30 \binom{n}{3} + 120 \binom{n}{5} + 30(n-3) \binom{n}{3}$, 则图 G 补图中的 5-闭途径数量等于

$$W_n - (10n^3 - 50n^2 + 90n - 60)m + (10n^2 - 20n)m_1 + (40n - 120)m_2 - (10n - 20)m_3 - (30n - 60)s_1 - 20s_2 - 30s_3 + 10s_4 + 10s_5 - 10s_6.$$

其中

$$s_1 := N_G(K_3), s_2 := N_G(P_3 \cup K_2), s_3 := N_G(K_{1,3}), s_4 := N_G(P_5), s_5 := N_G(G_a), s_6 := N_G(C_5).$$

设 H 为有 $l-1$ 条边的简单图, 下文将用 $m_1, m_2, m_3, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ 和 s_6 表示图 P_l 中同构于 $P_3, K_2 \cup K_2, P_4, C_4, K_3, P_3 \cup K_2, K_{1,3}, P_5, G_a$ 和 C_5 的子图数量, 用 $m'_1, m'_2, m'_3, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5$ 和 s'_6 表示图 H 中同构于 $K_2 \cup K_2, P_4, C_4, K_3, P_3 \cup K_2, K_{1,3}, P_5, G_a$ 和 C_5 的子图数量.

在给出和证明以下引理之前, 先对几类特殊图进行符号的规定. 符号 $T_{a,b,c}$ 表示为图 1(a) 所示的图例, 其中 a, b, c 代表三条支路对应边的数量, 且满足 $c \geq b \geq a \geq 1$, 如图 1(d) 表示为 $T_{1,2,2}$. 符号 $T_{a,b,c,d}$ 表示为图 1(b) 所示的图例, 其中 a, b, c, d 代表四条支路对应边的数量, 且满足 $d \geq c \geq b \geq a \geq 1$, 如图 1(e) 表示为 $T_{1,2,2,3}$. 符号 $Y_{a,b,c,d}$ 表示为图 1(c) 所示图例, 其中 a, b, c, d 代表四个位置对应边的数量, 且满足 $b \geq a \geq 1, d \geq c \geq 1$, 如图 1(f) 表示为 $Y_{1,2,2,3}$.

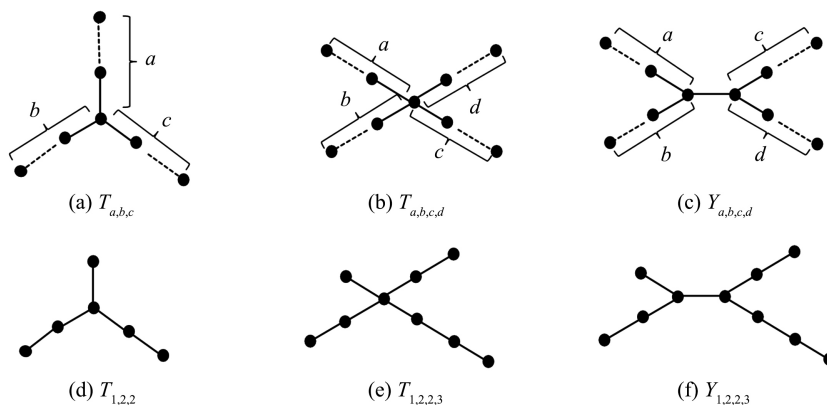


Figure 1. Special graphs of several types
图 1. 几类特殊图

引理 2.8 (Mao, Cioabă 和 Wang [10]) 以下的三类图均与图 $K_n \setminus P_l$ 不同谱

- 1) 对于任意的整数 $l \geq 7$ 时, 图 $K_n \setminus P_l$ 和 $K_n \setminus (C_4 \cup P_{l-4})$ 不同谱.
- 2) 对于任意的整数 $a \geq 1, b \geq 2$ 且满足 $3a+b=l$ 时, 图 $K_n \setminus P_l$ 和 $K_n \setminus (aK_3 \cup P_b)$ 不同谱.
- 3) 对于任意的整数 $a \geq 2, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$ 且满足 $a+b+c+d=l (l \geq 6)$ 时, 两类图 $K_n \setminus P_l$ 和 $K_n \setminus (P_a \cup T_{b,c,d})$ 不同谱.

引理 2.9 对于任意的整数 $a \geq 2, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$ 且满足 $a+b+c+d=l-3 (l \geq 10)$ 时, 两类图 $K_n \setminus P_l$ 和 $K_n \setminus (P_a \cup T_{b,c,d} \cup K_{1,3})$ 不同谱.

证明: 图 P_l 可以直接计算得出

$$m_1 = l - 2, m_2 = \frac{(l-2)(l-3)}{2}, m_3 = l - 3, m_4 = 0.$$

对于图 $P_a \cup T_{b,c,d} \cup K_{1,3}$, 有

$$m'_1 = l-2, m'_2 = \frac{(l-2)(l-3)}{2}.$$

由 $a+b+c+d=l-3$ 可得 $b+c+d < l-3$, 又因为 $m'_3 \leq b+c+d$, 则

$$m'_3 < l-3, m'_4 = 0.$$

利用引理 2.6, 可以直接得出, 图 $K_n \setminus P_l$ 和图 $K_n \setminus (P_a \cup T_{b,c,d} \cup K_{1,3})$ 可以通过 4-闭途径的数量来区分. \square

引理 2.10 对于任意的整数 $a \geq 1$, $4 \leq b \leq 7$ 且满足 $2a+b=l-2$ ($l \geq 9$) 时, 两类图 $K_n \setminus P_l$ 和 $K_n \setminus (aP_3 \cup T_b \cup P_2)$ 不同谱, 其中图 T_b 表示为含有 b 条边的树.

证明: 图 P_l 可以直接计算得出

$$m_1 = l-2, m_2 = \frac{(l-2)(l-3)}{2}, m_3 = l-3, m_4 = 0.$$

对于图 $aP_3 \cup T_4 \cup P_2$, $aP_3 \cup T_5 \cup P_2$, $aP_3 \cup T_6 \cup P_2$ 和 $aP_3 \cup T_7 \cup P_2$, 有

$$m'_1 = l-2, m'_2 = \frac{(l-2)(l-3)}{2}, m'_3 \neq l-3, m'_4 = 0.$$

图 P_l 和图 $aP_3 \cup T_b \cup P_2$ 在 n 个顶点下的补图分别为图 $K_n \setminus P_l$ 和图 $K_n \setminus (aP_3 \cup T_b \cup P_2)$, 由引理 2.6 可知, 这两类图可以通过 4-闭途径的数量来区分, 则不同谱. \square

引理 2.11 (Mao, Cioabă 和 Wang [10]) 设图 $K_n \setminus H$ 与图 $K_n \setminus P_l$ 同谱, 则图 H 中子图 C_3 数量 t' 为偶数.

引理 2.12 (Mao, Cioabă 和 Wang [10]) 设图 $K_n \setminus H$ 与图 $K_n \setminus P_l$ 同谱. 那么图 H 有以下三个性质.

- 1) 除了 C_3 和 C_4 , 图 H 的任何部分都不是圈.
- 2) 图 H 不包含两个不相交的圈 $C_k \cup C_s$.
- 3) 除了 P_3 之外, 图 H 包含两条长度不相等的路径.

3. 定理 1.1 的证明

设图 $G = P_l + (n-l)K_1$ 为 $K_n \setminus P_l$ 的补图, 则图 G 有 n 个顶点, $l-1$ 条边, 不含子图 C_3 , 并且其度序列为 $\{0^{n-l}, 1^2, 2^{l-2}\}$. 因此, $K_n \setminus P_l$ 中的子图 C_3 数量 \bar{t} 为

$$\bar{t} = \binom{n}{3} - (n-2)(l-1) + l-2 = \binom{n}{3} - (n-1)(l-1) + \frac{1}{2}(4l-6).$$

设图 $\Gamma = H + (n-|V(H)|)K_1$ 为 $K_n \setminus H$ 的补图, 则其有 n 个顶点, $l-1$ 条边, t' 个子图 C_3 , 度序列为 $\{0^{n-\sum_{i=1}^k x_i}, 1^{x_1}, 2^{x_2}, \dots, k^{x_k}\}$. 那么图 $K_n \setminus H$ 中子图 C_3 数量 \bar{t} 为

$$\bar{t} = \binom{n}{3} - (n-1)(l-1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (i^2 x_i) - t'.$$

设图 $K_n \setminus H$ 和图 $K_n \setminus P_l$ 同谱, 则两图含有相同数量的子图 C_3 . 而且由于删去了相同数量的边, 那么删去的度数也是相等. 因此有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i x_i &= 2l-2, \\ \sum_{i=1}^k i^2 x_i &= 4l-6+2t'. \end{aligned} \tag{1}$$

定理 1.1 的证明: 当 $l=10$ 时, 图 H 含有 9 条边, 其最多含有 7 个子图 C_3 , 则有

$$0 \leq t' \leq 7. \quad (2)$$

当 $l=10$, $t'=7$ 时, 有 $\sum_{i=1}^k i^2 x_i = 4l - 6 + 2t' = 48$, 当 $k=7$ 时不成立, 所以 k 最大取 6, 则有

$$0 \leq k \leq 6. \quad (3)$$

对于 x_i ($i=1, 2, \dots, 6$) 取值范围确定, 当 $l=10$ 时, 由

$$\sum_{i=1}^k i x_i = 2l - 2 = 18$$

和

$$\sum_{i=1}^k i^2 x_i = 4l - 6 + 2t' = 34 + 2t',$$

可以得到

$$0 \leq x_i \leq \min \left\{ \frac{18}{i}, \frac{34 + 2t'}{i^2} \right\}. \quad (4)$$

结合式子(1)-(4), 及 Matlab 计算, 可以得到组合 $\{t', x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ 的所有情况如下:

$$\begin{aligned} & \{0, 2, 8, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 5, 5, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 8, 2, 2, 0, 0, 0\}, \{0, 10, 2, 0, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 9, 0, 0, 0, 0\}, \\ & \{1, 3, 6, 1, 0, 0, 0\}, \{1, 6, 3, 2, 0, 0, 0\}, \{1, 8, 3, 0, 1, 0, 0\}, \{1, 9, 0, 3, 0, 0, 0\}, \{1, 11, 0, 1, 1, 0, 0\}, \\ & \{2, 1, 7, 1, 0, 0, 0\}, \{2, 4, 4, 2, 0, 0, 0\}, \{2, 6, 4, 0, 1, 0, 0\}, \{2, 7, 1, 3, 0, 0, 0\}, \{2, 9, 1, 1, 1, 0, 0\}, \\ & \{2, 13, 0, 0, 0, 1, 0\}, \{3, 2, 5, 2, 0, 0, 0\}, \{3, 4, 5, 0, 1, 0, 0\}, \{3, 5, 2, 3, 0, 0, 0\}, \{3, 7, 2, 1, 1, 0, 0\}, \\ & \{3, 11, 1, 0, 0, 1, 0\}, \{4, 0, 6, 2, 0, 0, 0\}, \{4, 2, 6, 0, 1, 0, 0\}, \{4, 3, 3, 3, 0, 0, 0\}, \{4, 5, 3, 1, 1, 0, 0\}, \\ & \{4, 6, 0, 4, 0, 0, 0\}, \{4, 8, 0, 2, 1, 0, 0\}, \{4, 9, 2, 0, 0, 1, 0\}, \{4, 10, 0, 0, 2, 0, 0\}, \{5, 0, 7, 0, 1, 0, 0\}, \\ & \{5, 1, 4, 3, 0, 0, 0\}, \{5, 3, 4, 1, 1, 0, 0\}, \{5, 4, 1, 4, 0, 0, 0\}, \{5, 6, 1, 2, 1, 0, 0\}, \{5, 7, 3, 0, 0, 1, 0\}, \\ & \{5, 8, 1, 0, 2, 0, 0\}, \{5, 10, 0, 1, 0, 1, 0\}, \{6, 1, 5, 1, 1, 0, 0\}, \{6, 2, 2, 4, 0, 0, 0\}, \{6, 4, 2, 2, 1, 0, 0\}, \\ & \{6, 5, 4, 0, 0, 1, 0\}, \{6, 6, 2, 0, 2, 0, 0\}, \{6, 8, 1, 1, 0, 1, 0\}, \{7, 0, 3, 4, 0, 0, 0\}, \{7, 2, 3, 2, 1, 0, 0\}, \\ & \{7, 3, 0, 5, 0, 0, 0\}, \{7, 3, 5, 0, 0, 1, 0\}, \{7, 4, 3, 0, 2, 0, 0\}, \{7, 5, 0, 3, 1, 0, 0\}, \{7, 6, 2, 1, 0, 1, 0\}, \\ & \{7, 7, 0, 1, 2, 0, 0\}, \{7, 12, 0, 0, 0, 0, 1\}. \end{aligned}$$

有这样一组参数 $\{t', x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, 如果存在一个与该参数相同的图, 那么称这组参数为该图的图解。实际上, 并不是所有的这些参数组合都是图解, 有部分是不符合图条件要求的。并且这些有效的图解中可能存在多个图的表示。如表 1 所示, 这里只给出有效图解的组合和其相对应的图(表 1 中相关的子图见图 2)。

根据引理 2.8~2.12, 除了图 $Y_{1,1,1,1} \cup 2P_3$ 、 $2T_{1,1,2} \cup P_2$ 、和 $G_d \cup 2P_3$ 以外, 这里剩余的所有图的 $K_n \setminus H$ 都与 $K_n \setminus P_{10}$ 不同谱。接下来将计算在这三个图中 4-闭途径的数量, 并在表 2 中给出它们各子图的数量。

对于图 P_{10} , 直接计算得

$$m_1 = l - 2 = 8, m_2 = \frac{(l-2)(l-3)}{2} = 28, m_3 = l - 3 = 7, m_4 = 0.$$

Table 1. Complements of all possible $K_n \setminus H$ of the same spectrum as $K_n \setminus P_{10}$
表 1. 所有可能与 $K_n \setminus P_{10}$ 同谱的 $K_n \setminus H$ 的补图

图解组合	相对应的图 H
$\{0,2,8,0,0,0\}$	$C_8 \cup P_2, C_7 \cup P_3, C_6 \cup P_4, C_5 \cup P_5, C_4 \cup P_6$
$\{0,5,5,1,0,0\}$	$T_{1,1,6} \cup P_2, T_{1,2,5} \cup P_2, T_{1,3,4} \cup P_2, T_{2,2,4} \cup P_2, T_{2,3,3} \cup P_2, T_{1,1,5} \cup P_3,$ $T_{1,2,4} \cup P_3, T_{1,3,3} \cup P_3, T_{2,2,3} \cup P_3, T_{1,1,4} \cup P_4, T_{1,2,3} \cup P_4, T_{2,2,2} \cup P_4,$ $T_{1,1,3} \cup P_5, T_{1,2,2} \cup P_5, T_{1,1,2} \cup P_6, T_{1,1,1} \cup P_7$
$\{0,5,5,1,0,0\}$	$Y_{1,1,1,1} \cup 2P_3, G_e \cup P_3 \cup P_2, G_f \cup P_3 \cup P_2, G_k \cup 2P_2, G_l \cup 2P_2,$ $G_m \cup 2P_2, G_n \cup 2P_2, T_{1,1,2} \cup K_{1,3} \cup P_3, T_{1,1,3} \cup K_{1,3} \cup P_2,$ $T_{1,2,2} \cup K_{1,3} \cup P_2, 2T_{1,1,2} \cup P_2, 2K_{1,3} \cup P_4$
$\{0,10,2,0,1,0\}$	$T_{1,1,2,2} \cup 3P, {}_2T_{1,1,1,3} \cup 3P_2, T_{1,1,1,1} \cup 2P_2 \cup P_4, T_{1,1,1,1} \cup P_2 \cup 2P_3$
$\{1,0,9,0,0,0\}$	$C_3 \cup C_6$
$\{1,3,6,1,0,0\}$	$G_a \cup P_6, G_b \cup P_5, G_c \cup P_4$
$\{1,6,3,2,0,0\}$	$G_e \cup 2P_3, G_f \cup P_2 \cup P_3, G_r \cup 2P_2, G_s \cup 2P_2$
$\{1,8,3,0,1,0\}$	$G_j \cup 2P_2 \cup P_3, G_i \cup 3P_2$
$\{1,9,0,3,0,0\}$	$G_u \cup 3P_2$
$\{2,1,7,1,0,0\}$	$G_v \cup C_3$
$\{2,4,4,2,0,0\}$	$G_d \cup 2P_3, G_r \cup 2P_2, 2G_a \cup P_2$
$\{2,6,4,0,1,0\}$	$G_w \cup 3P_2$
$\{2,7,1,3,0,0\}$	$G_x \cup 3P_2$

Table 2. The number of related subgraphs of H
表 2. 图 H 的相关子图数量

图 H	m'_1	m'_2	m'_3	m'_4
$Y_{1,1,1,1} \cup 2P_3$	8	28	4	0
$2T_{1,1,2} \cup P_2$	8	28	4	0
$G_d \cup 2P_3$	10	26	4	1

通过表 2 中图 H 与图 P_{10} 的各子图数量对比, 以及引理 2.6, 则这三个图作为 H 时, 图 $K_n \setminus H$ 与图 $K_n \setminus P_{10}$ 有不同数量的 4-闭途径, 因此它们不同谱。综上所述, 证得图 $K_n \setminus P_{10}$ 是 DS。定理 1.1 得证。□

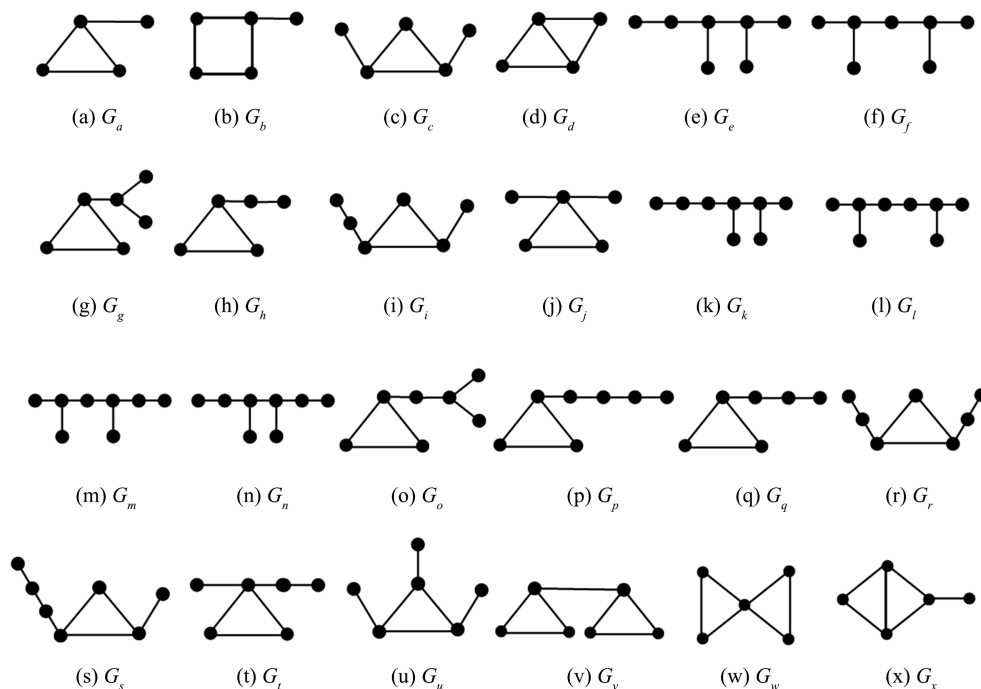


Figure 2. Some related subgraphs
图 2. 文中涉及到的一些相关子图

4. 小结

在本文中，主要利用图 $K_n \setminus P_l$ 的邻接谱性质，通过对与图 $K_n \setminus P_l$ 可能同谱的图做详细的分类，并且计算图的 4-闭途径和 5-闭途径的数量是否相同，来得到他们是否同谱，从而证明在 l 取值较小的情况下图 $K_n \setminus P_l$ 是 DS。但在取较大值的 l 时，与 $K_n \setminus P_l$ 可能同谱的图的详细分类会非常的复杂和繁琐，运用以上的方法是不理想的。因此，要证明猜想 1 在一般情况是正确，需要新的方法和工具。

致 谢

感谢审稿人对本文提出的修改意见，并感谢游志福教授在本篇文章的写作过程中给予指导。

参考文献

- [1] Wang, W. and Xu, C.X. (2006) On the Spectral Characterization of T-Shape Trees. *Linear Algebra and Its Applications*, **414**, 492-501. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.10.031>
- [2] Liu, F., Huang, Q., Wang, J. and Liu, Q. (2012) The Spectral Characterization of ∞ -Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 1482-1502. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.04.013>
- [3] Haemers, W.H., Liu, X.G. and Zhang, Y.P. (2008) Spectral Characterization of Lollipop Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **428**, 2415-2423. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.10.018>
- [4] Ramezani, F., Broojerdian, N. and Tayfeh-Rezaie, B. (2009) A Note on the Spectral Characterization of θ -Graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **431**, 626-632. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.03.013>
- [5] Doob, M. and Haemers, W.H. (2002) The Complement of the Path Is Determined by Its Spectrum. *Linear Algebra and Its Applications*, **356**, 57-65. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(02\)00323-3](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00323-3)
- [6] Dam, E.R.V. and Haemers, W.H. (2003) Which Graphs Are Determined by Their Spectrum? *Linear Algebra and Its Applications*, **373**, 241-272. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(03\)00483-X](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00483-X)
- [7] Dam, E.R.V. and Haemers, W.H. (2009) Developments on Spectral Characterizations of Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 576-586. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.08.019>

-
- [8] Cámara, M. and Haemers, W.H. (2014) Spectral Characterization of almost Complete Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **176**, 19-23. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.08.002>
- [9] Cvetković, D.M., Doob, M. and Sachs, H. (1980) Spectra of Graphs. Academic Press, New York.
- [10] Mao, L.H., Cioabă, S.M. and Wang, W. (2019) Spectral Characterization of the Complete Graph Removing a Path of Small Length. *Discrete Applied Mathematics*, **257**, 260-268. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.08.029>
- [11] Omid, G.R. (2009) On a Signless Laplacian Spectral Characterization of T-Shape Trees. *Linear Algebra and Its Applications*, **431**, 1607-1615. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.035>