

一类分数阶三点边值问题解的存在性

李雯婧

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

Email: 1750621369@qq.com

收稿日期: 2021年5月1日; 录用日期: 2021年6月2日; 发布日期: 2021年6月10日

摘要

本文运用 Leray-Schauder 二择一定理, 研究了一类分数阶微分方程的三点边值问题

$$\begin{cases} D^\alpha(D + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, x(1) = \beta x(\eta), \end{cases}$$

得到该问题解的存在性。进一步证明了限制非线性项的函数 $k(t)$, 在被形如 Bt^μ 的函数控制后, 该问题至少存在一个解。最后, 通过实例验证了结论的有效性。

关键词

分数阶微分方程, 解的存在性, Leray-Schauder 非线性抉择, Green 函数

Existence of Solutions for a Class of Fractional Three-Point Boundary Value Problems

Wenjing Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Email: 1750621369@qq.com

Received: May 1st, 2021; accepted: Jun. 2nd, 2021; published: Jun. 10th, 2021

Abstract

In this paper, three-point boundary value problem for a class of fractional differential equations

文章引用: 李雯婧. 一类分数阶三点边值问题解的存在性[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1048-1054.

DOI: 10.12677/pm.2021.116118

$$\begin{cases} D^\alpha (D + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, x(1) = \beta x(\eta), \end{cases}$$

are studied by using Leray-Schauder nonlinear alternative. The existence of the solution is obtained. Furthermore, it is proved that the function $k(t)$, which is limited to the nonlinear term, exists at least one solution of the problem when it is controlled by a function of the form Bt^μ . Finally, an example is given to verify the validity of the conclusion.

Keywords

Fractional Differential Equation, Existence of Positive Solutions, Leray-Schauder Nonlinear Alternative, Green Function

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 分数阶微分方程已经对数学模型的研究过程和其他学科领域的研究产生了深远的影响, 例如电化学、热传导、地下水流动系统、多孔介质等。目前, 分数阶边值问题的研究已取得了很多结果[1] [2] [3] [4] [5]。

三点边值问题在微分方程理论中运用广泛[6] [7]。庞杨等在文献[8]利用半序集上的不动点定理得到了 Caputo 分数阶三点边值问题

$$\begin{cases} {}^c D_{0^+}^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0, 0 < t < 1, \\ u(0) = u''(0) = u'''(0) = 0, u'(1) = \beta u(\eta) \end{cases}$$

解的存在性, 其中 $3 < \alpha \leq 4$, $0 < \beta \leq 1$, $0 < \eta < 1$, ${}^c D_{0^+}^\alpha$ 是标准 Caputo 分数阶导数。

Yan Sun 在文献[9]等利用锥拉伸与压缩不动点定理得到了四阶三点边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + f(t, u(t)) = 0, 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, u''(1) - \alpha u''(\eta) = \lambda \end{cases}$$

解的存在性, 其中 $\eta \in (0, 1)$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{\eta}\right)$, $\lambda \in [0, \infty)$ 。

2015 年, Batarfi 和 Jorge Losada 在文献[10]运用 Banach 不动点定理和 Krasnoselskii 定理研究了分数阶三点边值问题

$$\begin{cases} D^\alpha (D + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, x(1) = \beta x(\eta) \end{cases} \quad (1.1)$$

解的存在性, 其中 D^α 为 $\alpha \in (1, 2]$ 的一致分数阶导数, D 是一阶导数, $f: [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 连续函数, $\lambda, \beta \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$ 且 $\eta \in (0, 1)$ 。

受上述文献的启发, 本文运用 Leray-Schauder 非线性抉择研究问题(1.1)解的存在性, 其中参数 $\lambda > 1$ 且

$\beta, \eta \in (0, 1)$ 。

2. 预备知识

定义 1 [11] 设 $\alpha \in (0, 1)$ 并且 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, f 的 α 阶分数导数可定义为

$$D^\alpha x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - x(t)}{\varepsilon}, \forall t > 0.$$

如果 f 在 $t \in (0, a)$ 是 α -可微的, $a > 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow 0^+} D^\alpha x(t)$ 存在, 定义 $D^\alpha x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} D^\alpha x(t)$ 。

定义 2 [11] 设 $\alpha \in (n, n+1]$ 并且 x 在 $t > 0$ 是 n -可微的, 则 α 阶导数为

$$D^\alpha x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{([\alpha]-1)}(t + \varepsilon t^{([\alpha]-\alpha)}) - x^{([\alpha]-1)}(t)}{\varepsilon},$$

其中 $[\alpha]$ 是大于或等于 α 的最小整数。如果 f 在 $t \in (0, a)$ 是 α -可微的, $a > 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow 0^+} D^\alpha x(t)$ 存在, 定义

$$D^\alpha x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} D^\alpha x(t).$$

定义 3 [11] 设 $\alpha \in (0, 1)$, 对于 $t \geq 0$, α 阶积分记为 $I^\alpha x(t)$, 可定义为

$$D^{-\alpha} x(t) \equiv I^\alpha x(t) = I^1(t^{\alpha-1} x)(t) = \int_0^t \frac{x(s)}{s^{1-\alpha}} ds.$$

定义 4 [11] 设 $\alpha \in (n-1, n)$, α 阶积分定义为

$$D^{-\alpha} x(t) \equiv I^\alpha x(t) = I^n(t^{\alpha-[\alpha]} x)(t),$$

其中 I^n 表示普通积分 I^1 进行 n 次积分。

引理 1 [10] $\alpha \in (1, 2]$, x 是定义在 I^α 上的连续函数, 当 $t \geq 0$ 时, $D^\alpha I^\alpha x(t) = x(t)$ 。

引理 2 [12] 设 E 为 Banach 空间, Ω 是 E 的有界开子集, 且 $0 \in \Omega$. $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ 是全连续算子, 则必有下列结论之一成立。

- 1) 存在 $u \in \partial\Omega$ 及 $\theta > 1$, 使得 $Tu = \theta u$;
- 2) 存在 T 上的不动点 $u^* \in \bar{\Omega}$ 。

引理 3 [2] 对于三点边值问题

$$\begin{cases} D^\alpha (D + \lambda)x(t) = \sigma(t), t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, x(1) = \beta x(\eta), \end{cases}$$

其中 $\alpha \in (1, 2]$, $\sigma \in C[0, 1]$ 。当 $\beta \neq \frac{\lambda + e^{-\lambda} - 1}{\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1}$ 时, 则该问题有唯一解

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left(\int_0^s \sigma(u) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(t) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s \sigma(u) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \\ & \left. - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s \sigma(u) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right], \end{aligned}$$

其中 $A(t) = \frac{1}{\Delta} (\lambda t + e^{-\lambda t} - 1)$, $\Delta = \lambda + e^{-\lambda} - 1 - \beta (\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1) \neq 0$ 。

设 $E = C[0, 1]$, 对 $x \in E$, E 在范数 $\|x\| = \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ x \in \Omega}} |x(t)|$ 下成为 Banach 空间。

定义算子 $T: E \rightarrow E$,

$$\begin{aligned} (Tx)(t) = & \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(t) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \\ & \left. - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right]. \end{aligned}$$

引理 4 T 是 $E \rightarrow E$ 的全连续算子。

证明: 设 $\Omega \subset E$ 为有界开集, 由 f 的连续性可知 $f(t, x)$ 在 $[0, 1] \times \bar{\Omega}$ 上有界, 记 $R = \max_{t \in [0, 1]} |f(t, x(t))|$ 。

对 $\forall x \in \bar{\Omega}$, 由算子 T 的定义可得

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(t) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \right| \\ &\leq \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(1) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \\ &\leq R \left[(1+A(1)) \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(1) \beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \\ &\leq \frac{R}{\alpha(\alpha-1)} \left((1+A(1)) \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} s^\alpha ds + A(1) \beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} s^\alpha ds \right) \\ &\leq \frac{R \left((1+A(1))(1-e^{-\lambda}) + A(1) \beta \eta^\alpha (1-e^{-\lambda\eta}) \right)}{\alpha(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

从而可知 $T(\Omega)$ 为一致有界的。

进一步, 对任意的 $x \in \Omega$ 和任意的 $t_1, t_2 \in [0, 1]$ 且 $t_1 < t_2$ 有

$$\begin{aligned} |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| &= \left| \int_0^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \\ &\quad \left. + A(t_2) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \\ &\quad \left. - A(t_1) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds - \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_2-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_2-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds - \int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right| \\ &\quad + |A(t_2) - A(t_1)| \left| \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + \int_0^{t_1} |e^{-\lambda(t_2-s)} - e^{-\lambda(t_1-s)}| \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \\ &\quad + \frac{2\lambda(t_2-t_1)}{\Delta} \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \\ &\leq \frac{R}{\alpha(\alpha-1)} \left[\int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)} s^\alpha ds + \int_0^{t_1} |e^{-\lambda(t_2-s)} - e^{-\lambda(t_1-s)}| s^\alpha ds + \frac{2\lambda(t_2-t_1)}{\Delta} \left(\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} s^\alpha ds + \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} s^\alpha ds \right) \right] \\ &= \frac{R}{\alpha(\alpha-1)} \left[\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_2}) + \frac{t_1^\alpha}{\lambda} (e^{-\lambda(t_2-s)} - e^{-\lambda(t_1-s)}) + \frac{2\lambda(t_2-t_1)}{\Delta} \frac{\beta \eta^\alpha (1 - e^{-\lambda\eta}) + 1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right] \\ &\leq \frac{R}{\alpha(\alpha-1)} \left[\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\lambda} + (t_2 - t_1) + \frac{2(\beta \eta^\alpha (1 - e^{-\lambda\eta}) + 1 - e^{-\lambda})}{\Delta} (t_2 - t_1) \right]. \end{aligned}$$

再根据 t , t^α 在 $[0,1]$ 上的一致连续性, 得 $T(\Omega)$ 是等度连续的. 利用 Arzela-Ascoli 定理, 可知上述引理成立.

3. 主要结果及证明

本文的主要结果是:

定理1 设 $f(t,0) \neq 0$, $\lambda > 1$, $0 < \beta < 1$, 且存在非负函数 k , $h \in L^1[0,1]$, 使下列条件成立:

(C1) $|f(t,x)| \leq k(t)|x| + h(t)$, $a.e.(t,x) \in [0,1] \times \mathbf{R}$;

(C2) $\frac{2}{\lambda(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)s^{\alpha-2}k(s)ds + \frac{\beta}{\lambda(1-\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)s^{\alpha-2}k(s)ds < 1$,

则问题(1.1)至少有一个解 $u^* \in C[0,1]$.

证明: 记

$$M = \frac{2}{\lambda(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)s^{\alpha-2}k(s)ds + \frac{\beta}{\lambda(1-\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)s^{\alpha-2}k(s)ds,$$

$$N = \frac{2}{\lambda(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)s^{\alpha-2}h(s)ds + \frac{\beta}{\lambda(1-\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)s^{\alpha-2}h(s)ds,$$

由条件(C2)可知, $M < 1$. 因为 $f(t,0) \neq 0$, 则存在一个区间 $[a,b] \subset [0,1]$, 使得 $\min_{a \leq t \leq b} |f(t,0)| > 0$. 当 $h(t) \geq |f(t,0)|$, 对 $a.e. t \in [0,1]$, 得到 $N > 0$.

令 $r = N(1-M)^{-1}$, $\Omega = \{x \in E : \|x\| < r\}$. 假设 $x \in \partial\Omega$, $\theta > 1$, 使得 $Tx = \theta x$. 于是有

$$\begin{aligned} \theta r &= \theta \|x\| = \|Tx\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \\ &\quad \left. + A(t) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \right| \\ &\leq \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(1) \left[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s |f(u, x(u))| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \right] \\ &\leq (1+A(1)) \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s k(u)|x(u)| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(1)\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s k(u)|x(u)| u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \\ &\quad + (1+A(1)) \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \left(\int_0^s h(u) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds + A(1)\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \left(\int_0^s h(u) u^{\alpha-2} (s-u) du \right) ds \\ &\leq \frac{2}{1-\beta} \int_0^1 \left(\int_u^1 e^{-\lambda(1-s)} (s-u) ds \right) k(u)|x(u)| u^{\alpha-2} du + \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^\eta \left(\int_u^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} (s-u) ds \right) k(u)|x(u)| u^{\alpha-2} du \\ &\quad + \frac{2}{1-\beta} \int_0^1 \left(\int_u^1 e^{-\lambda(1-s)} (s-u) ds \right) h(u) u^{\alpha-2} du + \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^\eta \left(\int_u^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} (s-u) ds \right) h(u) u^{\alpha-2} du \\ &\leq \frac{2}{\lambda(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)s^{\alpha-2}k(s)|x(s)| ds + \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^\eta (1-s)s^{\alpha-2}k(s)|x(s)| ds \\ &\quad + \frac{2}{\lambda(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)s^{\alpha-2}h(s) ds + \frac{\beta}{\lambda(1-\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)s^{\alpha-2}h(s) ds \\ &= M \|x\| + N. \end{aligned}$$

进一步, 有

$$\theta \leq M + \frac{N}{r} = M + \frac{N}{N(1-M)^{-1}} = M + (1-M) = 1.$$

这与 $\theta > 1$ 产生矛盾。由引理2可知, T 有不动点 $u^* \in \bar{\Omega}$ 。另一方面, $f(t, 0) \neq 0$, 则问题(1.1)有非平凡解 $u^* \in C[0, 1]$ 。

定理2 设 $f(t, 0) \neq 0$, $0 < \beta < 1$, 且存在非负函数 k , $h \in L^1[0, 1]$, 使条件(C1), (C3)满足, (C3) 存在一个常数 $\mu > 0$, 使得

$$k(s) \leq Bs^\mu, \text{ a.e. } s \in [0, 1],$$

其中

$$B = \frac{\lambda(1-\beta)(\alpha-1+\mu)(\alpha+\mu)}{2+\beta\eta^{\alpha+\mu}}.$$

则问题(1.1)至少有一个解 $u^* \in E$ 。

证明: 由定理1的条件可知, 要证明定理2, 只需要证明 $M < 1$ 即可。

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{\lambda(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)s^{\alpha-2} k(s) ds + \frac{\beta}{\lambda(1-\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)s^{\alpha-2} k(s) ds \\ &\leq B \left(\frac{2}{\lambda(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)s^{\alpha-2+\mu} ds + \frac{\beta}{\lambda(1-\beta)} \int_0^\eta (\eta-s)s^{\alpha-2+\mu} ds \right) \\ &\leq B \left(\frac{2}{\lambda(1-\beta)} \frac{1}{(\alpha-1+\mu)(\alpha+\mu)} + \frac{\beta}{\lambda(1-\beta)} \frac{\eta^{\alpha+\mu}}{(\alpha-1+\mu)(\alpha+\mu)} \right) \\ &\leq B \frac{2+\beta\eta^{\alpha+\mu}}{\lambda(1-\beta)(\alpha-1+\mu)(\alpha+\mu)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

当 $M < 1$ 时, 有 $\theta \leq 1$ 。则结论得证。

4. 示例

考虑下面的分数阶微分方程边值问题:

$$\begin{cases} D^{\frac{4}{3}}(D+5)x(t) = \frac{t}{5}|x|\cos\sqrt[3]{x} + 2t + 1, t \in [0, 1], \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, x(1) = \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

解的存在性, 这里 $\alpha = \frac{4}{3}$, $\lambda = 5$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{3}$ 。显然,

$$f(t, x) = \frac{t}{5}|x|\cos\sqrt[3]{x} + 2t + 1,$$

$$k(t) = \frac{t}{2}, h(t) = 1.$$

容易证得 k , $h \in L^1[0, 1]$ 为非负函数, 且有

$$|f(t, x)| \leq k(t)|x| + h(t), \text{ a.e. } (t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{R},$$

进一步, 有

$$M = \frac{2}{5 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-s) s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{s}{2} ds + \frac{1}{5 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - s\right) s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{s}{2} ds$$

$$\approx 0.13105 < 1.$$

故由定理 1 可知, 该分数阶微分方程边值问题有解。

基金项目

国家自然科学基金(11561063)。

参考文献

- [1] Bendouma, B., Cabada, A. and Hammoudi, A. (2019) Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations. *Archivum Mathematicum*, **55**, 69-82. <https://doi.org/10.5817/AM2019-2-69>
- [2] Bai, Z., Cheng, Y. and Sun, S. (2020) On Solutions of a Class of Three-Point Fractional Boundary Value Problems. *Boundary Value Problems*, **11**, 1-12. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-01319-x>
- [3] 董晓玉, 白占兵, 张伟. 具有适型分数阶导数的非线性特征值问题的正解[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2016, 35(3): 85-91.
- [4] Li, Y. and Jiang, W. (2019) Existence and Nonexistence of Positive Solutions for Fractional Three-Point Boundary Value Problems with a Parameter. *Journal of Function Spaces*, **34**, 1-10. <https://doi.org/10.1155/2019/9237856>
- [5] 郑春华, 马睿, 傅霞. 一类带积分边值条件的高阶时滞分数阶微分方程解的存在性[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2020, 46(3): 303-309.
- [6] Bekri, Z. and Benaicha, S. (2017) Existence of Solution for a Nonlinear Three-Point Boundary Value Problem. *Boletim Sociedade Paranaense de Matematica*, **14**, 1120-1134. <https://doi.org/10.5269/bspm.v38i1.34767>
- [7] Zouaoui, B. and Slimane, B. (2020) Existence of Solution for Nonlinear Fourth-Order Three-Point Boundary Value Problem. *Boletim Sociedade Paranaense de Matematica*, **38**, 67-82. <https://doi.org/10.5269/bspm.v38i1.34767>
- [8] 庞杨, 韦煜明. Caputo 分数阶微分方程三点边值问题解的存在性[J]. 应用泛函分析学报, 2018, 20(1): 63-76.
- [9] Sun, Y. and Zhu, C. (2013) Existence of Positive Solutions for Singular Fourth-Order Three-Point Boundary Value Problems. *Advances in Difference Equations*, **51**, 1-13. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-51>
- [10] Batarfi, H. and Losada, J. (2015) Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations. *Journal of Function Spaces*, **34**, 1-6. <https://doi.org/10.1155/2015/706383>
- [11] Khalil, R. (2014) A New Definition of Fractional Derivative. *Journal Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>
- [12] Deimling, K. (1985) *Nonlinear Functional Analysis*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00547-7>