

一类带时滞的四元数神经网络的全局指数反同步

陈星宇, 朱培勇

电子科技大学数学科学学院, 四川 成都
Email: onnfcxy@163.com, zpy6940@uestc.edu.cn

收稿日期: 2021年5月24日; 录用日期: 2021年6月24日; 发布日期: 2021年7月2日

摘 要

本文就一类带时滞的四元数值神经网络(QVNNs)的指数反同步问题进行研究。首先依据Hamilton法则, 将QVNNs分解为4个等价的实值神经网络(RVNNs)。然后通过构造合适的Lyapunov-Krasovskii泛函, 利用驱动-响应同步方法和矩阵不等式理论, 得到了四元数值时滞神经网络关于指数反同步的一个结果。最后, 通过数值仿真算例验证了所提出方法的有效性。

关键词

四元数神经网络, 指数反同步, 时滞

Global Exponential Anti-Synchronization for a Class of Quaternion-Valued Neural Networks with Time Delays

Xingyu Chen, Peiyong Zhu

School of Mathematical Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan
Email: onnfcxy@163.com, zpy6940@uestc.edu.cn

Received: May 24th, 2021; accepted: Jun. 24th, 2021; published: Jul. 2nd, 2021

Abstract

In this paper, the problem of global exponential anti-synchronization for a class of quaternion-valued neural networks (QVNNs) with time delays is studied. Firstly, in light of Hamilton's law, the QVNNs were decomposed into four real-valued parts to compose the equivalent real-valued sys-

tems. Next, by constructing appropriate Lyapunov-Krasovskii functionals, utilizing drive-response synchronization method and matrix inequality theory, a result about global exponential anti-synchronization of QVNNs with time delays is realized. Finally, a numerical example was given to verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords

Quaternion-Valued Neural Networks, Exponential Anti-Synchronization, Time Delays

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

自 1990 年 Pecora 和 Carroll [1] 引入驱动 - 响应同步概念提出混沌同步原理以来, 因其在保密通信领域的应用价值, 诸多学者对神经网络的同步性问题进行了研究, 提出了多种同步方法[2] [3] [4] [5] [6]。同时同步的概念也得到了拓宽, 如完全同步[7]、延迟同步[8]、反同步[9] [10]等。

四元数是复数在某种意义上的扩展, 在处理风速预报、彩色图像、阵列信号等实值神经网络和复值神经网络无法处理的问题上具有显著优势。此外由于四元数乘法不可交换的特性, 四元数神经网络动力学特性比实值神经网络和复值神经网络更复杂。然而, 文献[2]-[10]主要集中于实值神经网络之间的同步问题, 因此, 一个自然的问题是: 四元数神经网络反同步是否有相应的结果?

本文就上述四元数神经网络问题进行研究, 主要考虑一类具有时滞的四元数神经网络的指数反同步问题, 利用李亚普洛夫理论和驱动 - 响应同步方法探讨, 给出了四元数值时滞神经网络实现指数反同步的一个判定准则和反同步控制器设计方法, 通过数值仿真验证了所提出方法的有效性。

2. 预备知识

2.1. 四元数代数

一个四元数 q 可被表示如下形式:

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k,$$

其中 $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}$, i, j, k 是虚数单位, 且满足

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j,$$

q_1 为四元数 q 的实部, 记为 $Re(q) = q_1$; $q_2i + q_3j + q_4k$ 称为四元数 q 的虚部, 记为 $Im(q) = q_2i + q_3j + q_4k$ 。由此我们可知四元数乘法不可交换。定义另外一个四元数

$$p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k,$$

则四元数 p, q 的和与乘积分别定义为

$$p + q = (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2)i + (p_3 + q_3)j + (p_4 + q_4)k,$$

$$pq = (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)i + (p_1q_3 + p_3q_1 + p_4q_2 - p_2q_4)j + (p_1q_4 + p_4q_1 + p_2q_3 - p_3q_2)k.$$

用 $p^* = \bar{p} = p_1 - p_2 i - p_3 j - p_4 k$ 表示 p 的共轭转置, 并且 p 的模表示为

$$|p| = \sqrt{pp^*} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}.$$

令 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in \mathbb{Q}^n$, 则 u 的模可表示为 $|u| = (|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|)^T$, u 的范数表示为

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}.$$

注: 本文用 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 、 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 、 $\mathbb{Q}^{m \times n}$ 分别表示 $m \times n$ 维实值、复值、四元数值矩阵, $A - B \geq (>) 0$ 即 $A - B$ 是半正定(正定)矩阵。

2.2. 系统表示及基本引理

本文考虑如下—类四元数值时滞神经网络模型:

$$\dot{s}(t) = -As(t) + Bf(s(t)) + Cg(s(t-\tau)) + J, \quad (1)$$

其中 $s(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))^T \in \mathbb{Q}^n$ 是神经元的状态变量, 对角矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示神经元的自反馈系数矩阵且 $A > 0$, 矩阵 $B, C \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ 分别表示神经元之间的与时滞无关、与时滞有关的权值矩阵, $f(s(\cdot)) = (f_1(s_1(\cdot)), \dots, f_n(s_n(\cdot)))^T \in \mathbb{Q}^n$ 和 $g(s(\cdot)) = (g_1(s_1(\cdot)), \dots, g_n(s_n(\cdot)))^T: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$ 分别表示没有时滞和有时滞的激活函数, $J = (J_1, \dots, J_n)^T \in \mathbb{Q}^n$ 表示系统外部输入, τ 是信号传输时滞且 $\tau \geq 0$ 。

系统(1)的初始值是 $s(t) = \phi(v)$, $\phi(v)$ 在 $v \in [-\tau, 0]$ 上有界且连续。

以系统(1)为驱动系统, 设计相应的响应系统如下所示:

$$\dot{\tilde{s}}(t) = -A\tilde{s}(t) + Bf(\tilde{s}(t)) + Cg(\tilde{s}(t-\tau)) + J + U(t), \quad (2)$$

其中 $\tilde{s}(t) = (\tilde{s}_1(t), \dots, \tilde{s}_n(t))^T \in \mathbb{Q}^n$ 表示相应系统神经元状态变量, $U(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)) \in \mathbb{Q}^n$ 是实现驱动系统(1)和响应系统(2)指数反同步的控制器。

系统(2)的初始值是 $\tilde{s}(t) = \tilde{\phi}(v)$, $\tilde{\phi}(v)$ 在 $v \in [-\tau, 0]$ 上有界且连续。

本文给出下列假设:

假设 1 为方便计算, 设激活函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 对 $\forall x \in \mathbb{Q}^n$ 可以分解成如下形式:

$$\begin{aligned} f(x) &= f^R(x^R) + f^I(x^I)i + f^J(x^J)j + f^K(x^K)k, \\ g(x) &= g^R(x^R) + g^I(x^I)i + g^J(x^J)j + g^K(x^K)k, \end{aligned}$$

其中 $f^\mu(x^\mu): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mu = R, I, J, K$)。

假设 2 对 $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{Q}^n$, 激活函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $l_p^{(\mu)} > 0$, $m_p^{(\mu)} > 0$ 使得:

$$\begin{aligned} |f_p^{(\mu)}(s_1^{(\mu)}) + f_p^{(\mu)}(s_2^{(\mu)})| &\leq l_p^{(\mu)} |s_1^{(\mu)} + s_2^{(\mu)}|, \\ |g_p^{(\mu)}(s_1^{(\mu)}) + g_p^{(\mu)}(s_2^{(\mu)})| &\leq m_p^{(\mu)} |s_1^{(\mu)} + s_2^{(\mu)}|, \end{aligned} \quad (3)$$

成立, 其中 $p = 1, 2, \dots, n$, $\mu = r, i, j, k$ 。

引理 1 [6] 假设存在正数 k_1 、 k_2 满足 $k_1 > k_2 > 0$, $p(t)$ 是非负函数且满足

$$D^+ p(t) \leq -k_1 p(t) + k_2 \tilde{p}(t),$$

其中 $\tilde{p}(t) = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \{p(s)\}$, 则

$$p(t) \leq \tilde{p}(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

成立, 其中 λ 是方程 $\lambda = k_1 - k_2 e^{\lambda \tau}$ 的唯一解。

引理 2 [11] 假设 Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 均是任意维数的实矩阵, 且 $\Omega_3 > 0$, 则对 $x, y \in \mathbf{R}^n$ 有

$$2x^T \Omega_1^T \Omega_2 y \leq x^T \Omega_1^T \Omega_3 \Omega_1 x + y^T \Omega_2^T \Omega_3^{-1} \Omega_2 y$$

成立。

定义系统反同步误差信号为 $e(t) = s(t) + \tilde{s}(t)$, 因此有

$$\dot{e}(t) = -Ae(t) + B\tilde{f}(e(t)) + C\tilde{g}(e(t - \tau(t))) + U(t), \quad (4)$$

其中 $\tilde{f}(e(t)) = f(\tilde{s}(t)) + f(s(t))$, $\tilde{g}(e(t - \tau(t))) = g(\tilde{s}(t - \tau(t))) + g(s(t - \tau(t)))$, $e(v) = \tilde{\phi}(v) + \phi(v)$ 是误差系统(4)的初始值。

类比文献[12]中指数反同步的定义, 引入下面定义:

定义 1 如果存在常数 $M > 0$, $\kappa > 0$ 使得误差满足下列不等式:

$$\|e(t)\| \leq M \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|e(s)\| \exp(-\kappa t),$$

则称驱动系统(1)和响应系统(2)是全局指数反同步的。

利用四元数运算法则, 式(4)所示误差系统可以分解为如下等价的实值系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}^R(t) &= -Ae^R + B^R \tilde{f}^R(e^R(t)) - B^I \tilde{f}^I(e^I(t)) - B^J \tilde{f}^J(e^J(t)) - B^K \tilde{f}^K(e^K(t)) + C^R \tilde{g}^R(e^R(t - \tau)) \\ &\quad - C^I \tilde{g}^I(e^I(t - \tau)) - C^J \tilde{g}^J(e^J(t - \tau)) - C^K \tilde{g}^K(e^K(t - \tau)) + U^R(t), \\ \dot{e}^I(t) &= -Ae^I + B^R \tilde{f}^I(e^I(t)) + B^I \tilde{f}^R(e^R(t)) + B^J \tilde{f}^K(e^K(t)) - B^K \tilde{f}^J(e^J(t)) + C^R \tilde{g}^I(e^I(t - \tau)) \\ &\quad + C^I \tilde{g}^R(e^R(t - \tau)) + C^J \tilde{g}^K(e^K(t - \tau)) - C^K \tilde{g}^J(e^J(t - \tau)) + U^I(t), \\ \dot{e}^J(t) &= -Ae^J + B^R \tilde{f}^J(e^J(t)) + B^J \tilde{f}^R(e^R(t)) - B^I \tilde{f}^K(e^K(t)) + B^K \tilde{f}^I(e^I(t)) + C^R \tilde{g}^J(e^J(t - \tau)) \\ &\quad + C^J \tilde{g}^R(e^R(t - \tau)) - C^I \tilde{g}^K(e^K(t - \tau)) + C^K \tilde{g}^I(e^I(t - \tau)) + U^J(t), \\ \dot{e}^K(t) &= -Ae^K + B^R \tilde{f}^K(e^K(t)) + B^K \tilde{f}^R(e^R(t)) + B^I \tilde{f}^J(e^J(t)) - B^J \tilde{f}^I(e^I(t)) + C^R \tilde{g}^K(e^K(t - \tau)) \\ &\quad + C^K \tilde{g}^R(e^R(t - \tau)) + C^I \tilde{g}^J(e^J(t - \tau)) - C^J \tilde{g}^I(e^I(t - \tau)) + U^K(t). \end{aligned} \quad (5)$$

3. 主要结果

定理 1 在假设 1 和假设 2 被满足的基础上, 设计控制器的形式为:

$$U^u(t) = -\zeta_p^u e_p^u(t), \quad (6)$$

其中 $\zeta_p^u > 0$ 且 $\zeta_p^u \in \mathbf{R}$, $p = 1, 2, \dots, n$, $u = R, I, J, K$ 。

如果存在矩阵 $\bar{L}^u$, $\bar{M}^u > 0$ ($u = R, I, J, K$) 和控制增益 ζ_p^u 使得下式成立:

$$\begin{aligned} \zeta^u &> \lambda_{\max}(\Psi + 2\bar{L}^u), \\ \min\{\zeta^u - \lambda_{\max}(\Psi + 2\bar{L}^u)\} &> \max\{\lambda_{\max}(\bar{M}^R), \lambda_{\max}(\bar{M}^I), \lambda_{\max}(\bar{M}^J), \lambda_{\max}(\bar{M}^K)\} > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Psi = -A + \frac{1}{2} \left\{ B^R (B^R)^T + B^I (B^I)^T + B^J (B^J)^T + B^K (B^K)^T + C^R (C^R)^T + C^I (C^I)^T + C^J (C^J)^T + C^K (C^K)^T \right\},$$

其中 $\zeta^R = \min_{1 \leq p \leq n} \{\zeta_p^R\}$, $\zeta^I = \min_{1 \leq p \leq n} \{\zeta_p^I\}$, $\zeta^J = \min_{1 \leq p \leq n} \{\zeta_p^J\}$, $\zeta^K = \min_{1 \leq p \leq n} \{\zeta_p^K\}$ 。

则在控制器(6)下驱动系统(1)和响应系统(2)是全局指数反同步的。

证明: 构造 Lyapunov 函数形式如下:

$$V(t) = \frac{1}{2} \left((e^R(t))^T e^R(t) + (e^I(t))^T e^I(t) + (e^J(t))^T e^J(t) + (e^K(t))^T e^K(t) \right) \quad (8)$$

对(8)进行求导, 其时间导数如下:

$$\dot{V}(t) = [\dot{e}^R(t)]^T e^R(t) + [e^I(t)]^T \dot{e}^I(t) + [\dot{e}^J(t)]^T e^J(t) + [e^K(t)]^T \dot{e}^K(t) \quad (9)$$

由假设 2 可知, 一定存在对角矩阵 $\bar{L}, \bar{M}$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned} [\tilde{f}^{(\mu)}(e^\mu(t))]^T \tilde{f}^{(\mu)}(e^\mu(t)) &\leq [e^\mu(t)]^T \bar{L}^\mu e^\mu(t), \\ [\tilde{g}^{(\mu)}(e^\mu(t-\tau))]^T \tilde{g}^{(\mu)}(e^\mu(t-\tau)) &\leq [e^\mu(t-\tau)]^T \bar{M}^\mu e^\mu(t-\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\bar{L}^\mu = \text{diag}((l_1^\mu)^2, \dots, (l_n^\mu)^2)$, $\bar{M}^\mu = \text{diag}((m_1^\mu)^2, \dots, (m_n^\mu)^2)$, $\mu = R, I, J, K$ 。

由引理 2 可得下列不等式

$$\begin{aligned} [e^\alpha(t)]^T B^\beta \tilde{f}^\gamma(e^\gamma(t)) &\leq 1/2 [e^\alpha(t)]^T B^\beta (B^\beta)^T e^\alpha(t) + 1/2 (\tilde{f}^\gamma(e^\gamma(t)))^T \tilde{f}^\gamma(e^\gamma(t)), \\ [e^\alpha(t)]^T C^\beta \tilde{g}^\gamma(e^\gamma(t-\tau)) &\leq 1/2 [e^\alpha(t)]^T C^\beta (C^\beta)^T e^\alpha(t) + 1/2 (\tilde{g}^\gamma(e^\gamma(t-\tau)))^T \tilde{g}^\gamma(e^\gamma(t-\tau)) \end{aligned} \quad (11)$$

成立, 其中 $\alpha, \beta, \gamma = R, I, J, K$ 。

由式(9)~(11)有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq [e^R(t)]^T \left\{ -A - \zeta^R + 2\bar{L}^R + \frac{1}{2} \left\{ B^R (B^R)^T + B^I (B^I)^T + B^J (B^J)^T + B^K (B^K)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C^R (C^R)^T + C^I (C^I)^T + C^J (C^J)^T + C^K (C^K)^T \right\} \right\} e^R(t) \\ &\quad + [e^I(t)]^T \left\{ -A - \zeta^I + 2\bar{L}^I + \frac{1}{2} \left\{ B^R (B^R)^T + B^I (B^I)^T + B^J (B^J)^T + B^K (B^K)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C^R (C^R)^T + C^I (C^I)^T + C^J (C^J)^T + C^K (C^K)^T \right\} \right\} e^I(t) \\ &\quad + [e^J(t)]^T \left\{ -A - \zeta^J + 2\bar{L}^J + \frac{1}{2} \left\{ B^R (B^R)^T + B^I (B^I)^T + B^J (B^J)^T + B^K (B^K)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C^R (C^R)^T + C^I (C^I)^T + C^J (C^J)^T + C^K (C^K)^T \right\} \right\} \\ &\quad \times e^J(t) + [e^K(t)]^T \left\{ -A - \zeta^K + 2\bar{L}^K + \frac{1}{2} \left\{ B^R (B^R)^T + B^I (B^I)^T + B^J (B^J)^T + B^K (B^K)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C^R (C^R)^T + C^I (C^I)^T + C^J (C^J)^T + C^K (C^K)^T \right\} \right\} e^K(t) \\ &\quad + 2 \left\{ [e^R(t-\tau)]^T \bar{M}^R e^R(t-\tau) + [e^I(t-\tau)]^T \bar{M}^I e^I(t-\tau) \right. \\ &\quad \left. + [e^J(t-\tau)]^T \bar{M}^J e^J(t-\tau) + [e^K(t-\tau)]^T \bar{M}^K e^K(t-\tau) \right\} \\ &\leq -\alpha V(t) + \beta V(t-\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

由引理 1 很容易得到:

$$V(t) \leq \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} V(\theta) e^{-\kappa t},$$

即

$$|e^R(t)|^2 + |e^I(t)|^2 + |e^J(t)|^2 + |e^K(t)|^2 \leq \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} (|e^R(\theta)|^2 + |e^I(\theta)|^2 + |e^J(\theta)|^2 + |e^K(\theta)|^2) e^{-\kappa t},$$

即

$$\|e(t)\|^2 \leq \max_{-\tau \leq \theta \leq 0} (\|e(\theta)\|^2) e^{-\kappa t},$$

其中 κ 是方程 $\alpha - \beta e^{-\kappa \tau} - \kappa = 0$ 的解。因此驱动系统(1)和响应系统(2)在控制器(6)下实现了全局指数反同步。

4. 仿真示例

例 1 考虑如下时滞具有常时滞的四元数值神经网络:

$$\dot{s}_i(t) = -A_{ij}s_j(t) + B_{ij}f_j(s_j(t)) + C_{ij}g_j(s_j(t - \tau_j)) + J_i, \quad (13)$$

为了实现反同步, 设计如下响应系统:

$$\dot{s}_i(t) = -A_{ij}s_j(t) + B_{ij}f_j(s_j(t)) + C_{ij}g_j(s_j(t - \tau_j)) + J_i + u_i(t), \quad (14)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0.035 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1.5 - 0.3575\mathbf{i} - 0.525\mathbf{j} - 3.15\mathbf{k} & 1.25 + 0.2145\mathbf{i} + 0.98\mathbf{j} + 3.6\mathbf{k} \\ 1.25 + 0.3575\mathbf{i} + 0.035\mathbf{j} + 5.4\mathbf{k} & 1.5 - 0.2145\mathbf{i} + 0.56\mathbf{j} - 7.2\mathbf{k} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.75 + 0.2295\mathbf{i} + 0.27\mathbf{j} + 0.675\mathbf{k} & -1.5 - 0.3825\mathbf{i} - 0.27\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k} \\ 0.315 + 0.612\mathbf{i} + 0.135\mathbf{j} - 0.45\mathbf{k} & -0.75 - 0.459\mathbf{i} - 0.675\mathbf{j} - 0.375\mathbf{k} \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} -0.2 - 0.15\mathbf{i} - 0.14\mathbf{j} - 0.12\mathbf{k} \\ -0.5 + 0.19\mathbf{i} - 0.3\mathbf{j} + 0.16\mathbf{k} \end{pmatrix},$$

$$f_1(s_1) = 1.53 * \tan h(s_1^R) + 1.53 * \tan h(s_1^I)\mathbf{i} + 1.53 * \tan h(s_1^J)\mathbf{j} + 1.53 * \tan h(s_1^K)\mathbf{k},$$

$$f_2(s_2) = 0.85 * \tan h(s_2^R) + 0.85 * \tan h(s_2^I)\mathbf{i} + 0.85 * \tan h(s_2^J)\mathbf{j} + 0.85 * \tan h(s_2^K)\mathbf{k},$$

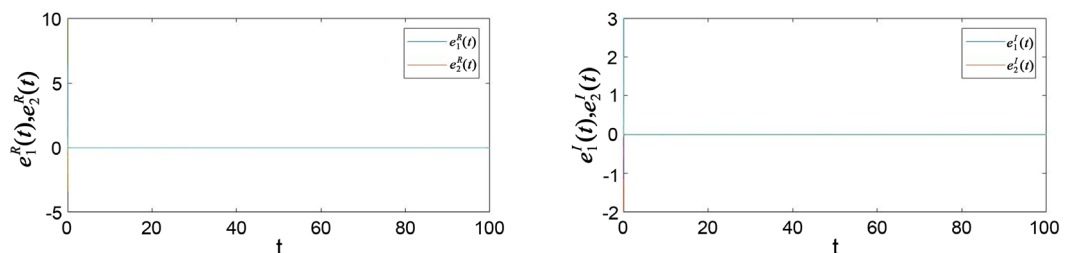
$$g_1(s_1) = 0.22 * \tan h(s_1^R - \tau_1) + 0.22 * \tan h(s_1^I - \tau_1)\mathbf{i} + 0.22 * \tan h(s_1^J - \tau_1)\mathbf{j} + 0.22 * \tan h(s_1^K - \tau_1)\mathbf{k},$$

$$g_2(s_2) = 0.42 * \tan h(s_2^R - \tau_2) + 0.42 * \tan h(s_2^I - \tau_2)\mathbf{i} + 0.42 * \tan h(s_2^J - \tau_2)\mathbf{j} + 0.42 * \tan h(s_2^K - \tau_2)\mathbf{k}.$$

对于 $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0.2$, 式(6)所示控制器参数取为

$\zeta_i^R = 52.10$, $\zeta_i^I = 50.16$, $\zeta_i^J = 50.16$, $\zeta_i^K = 57.36$ ($i = 1, 2$), 很容易验证其满足定理 1 条件, 因此可以得出系统(13)和系统(14)在控制器下是指数反同步的结论。

随机选取 10 组数据。图 1 为系统运行时的误差变化曲线, 显然驱动响应系统实现了反同步。



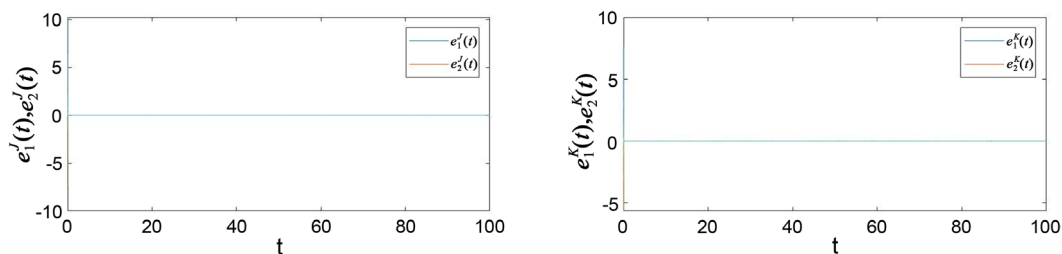


Figure 1. The anti-synchronization error curves between s_i and $\tilde{s}_i$ ($i=1,2$)

图 1. s_i 和 $\tilde{s}_i$ ($i=1,2$) 之间的反同步误差变化曲线

令驱动系统(13)和响应系统(14)的初始条件分别为 $s_1 = 0.4 + 0.3i + 0.5j + 0.8k$, $s_2 = 0.2 + 0.2i + 0.3j + 1.1k$, $\tilde{s}_1 = 0.65 + 0.5i - 0.7j + 0.1k$, $\tilde{s}_2 = 0.2 - 0.1i + 0.2j + 0.9k$, 系统(13)-(14)的状态变量的实部和虚部随时间的变化如图 2 所示。

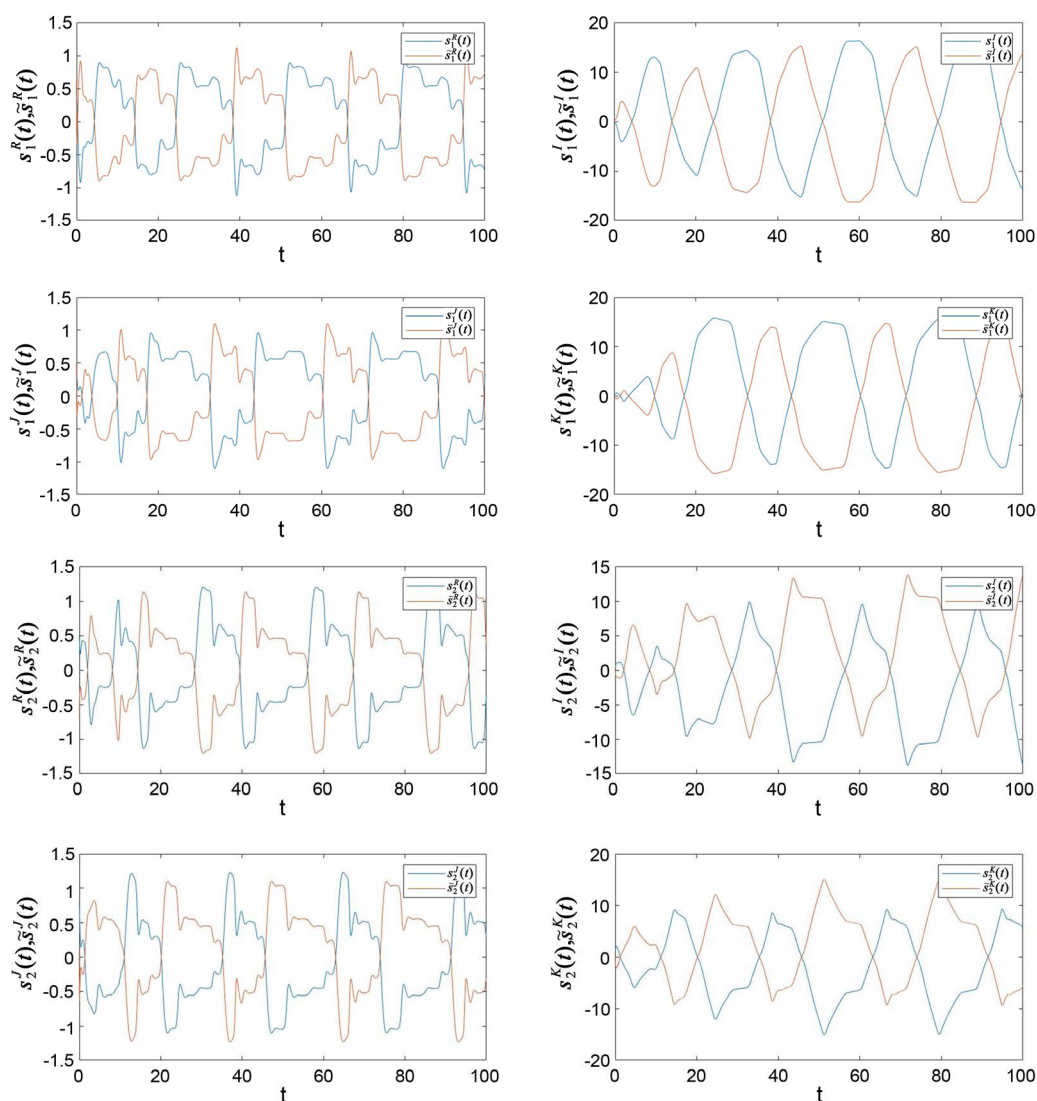


Figure 2. Variation curves of the real and imaginary parts of a variable

图 2. 变量的实部和虚部变化曲线

5. 结束语

利用 Hamilton 法则将具有常时滞的四元数值神经网络系统转化为等价的实值神经网络系统, 设计一个简单易于实现的控制器, 给出了驱动系统和响应系统的实现全局指数反同步的判别准则。最后通过数值仿真, 验证了提出的设计方案的有效性, 丰富了四元数值时滞神经网络动力学行为分析的相关研究。

参考文献

- [1] Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990) Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, **64**, 821-824. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>
- [2] 张玮玮. 时滞混沌神经网络的指数同步[J]. 安庆师范学院学报:自然科学版, 2013, 19(3): 30-33.
- [3] 任玲, 刘丽霞, 贝晓萌. 一类混沌系统的同步、反同步及其相关问题研究[J]. 齐鲁工业大学学报:自然科学版, 2015, 29(2): 56-60.
- [4] 陈学菲, 刘辉昭. 参数不确定非自治混沌系统的自适应指数同步[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(3): 316-322.
- [5] 闫欢, 赵振江, 宋乾坤. 具有泄漏时滞的复值神经网络的全局同步性[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(8): 832-841.
- [6] Gopalsamy, K. (1992) *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7920-9>
- [7] 范云, 张荣, 过榴晓. 时变耦合网络的完全同步[J]. 江南大学学报(自然科学版), 2011, 10(3): 258-262.
- [8] 贾飞蕾, 徐伟. 一类参数不确定混沌系统的延迟同步[J]. 物理学报, 2007, 56(6): 3101-3106.
- [9] 吕翎, 夏晓岚. 非线性耦合时空混沌系统的反同步研究[J]. 物理学报, 2009, 58(2): 814-818.
- [10] Wu, Z., Wang, Z., Zhou, T. and Tan, S. (2020) Global Synchronization and Anti-Synchronization of Fractional-Order Complex-Valued Gene Regulatory Networks with Time-Varying Delays. *IEEE Access*, **8**, 150555-150572. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3016706>
- [11] 吴桂华, 廖晓峰. 脉冲时滞 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性[J]. 计算机技术与发展, 2009, 19(9): 25-27.
- [12] 王兰梓, 房辉. 混沌系统异结构之间的指数反同步[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2010, 36(5): 721-726.