Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1281-1288
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117143

积分边值问题中的比较原理及应用

王　浩，闫宝强

山东师范大学数学与统计学院，山东 济南
Email: 2322604798@qq.com, 1507240235@qq.com

收稿日期：2021年5月24日；录用日期：2021年6月25日；发布日期：2021年7月2日

摘　要

本文得到了积分边值问题中的比较原理，并且利用比较原理证明了积分边值问题中的上下解定理。

关键词

积分边值问题，比较原理，上下解

Comparison Principle of Integral Boundary Value Problem and Its Application

Hao Wang, Baoqiang Yan

College of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: 2322604798@qq.com, 1507240235@qq.com

Received: May 24th, 2021; accepted: Jun. 25th, 2021; published: Jul. 2nd, 2021

Abstract

In this paper, the comparison principle of integral boundary value problems is obtained, and the upper and lower solution theorems of integral boundary value problems are proved by using the comparison principle.

Keywords

Boundary Value Problem, Comparison Principle, Upper and Lower Solution

文章引用: 王浩, 闫宝强. 积分边值问题中的比较原理及应用[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1281-1288.
DOI: 10.12677/pm.2021.117143

1. 引言

近年来，人们意识到积分边值问题具有很高的研究价值，众多的科研工作者投身于对此的研究，做出了大量的努力，取得了许多重要的成果。骆泽宇[1]研究了一类带积分边值条件的 Riemann-Liouville 型分数阶微分方程边值问题，运用单调迭代方法和上下解方法建立并证明了边值问题正解的存在性定理。蔡蕙泽、韩晓玲[2]运用双度量空间中的广义 Krasnoselskii's 压缩不动点定理研究了二阶非线性积分边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)f(t,u(t),u'(t))=0, t\in(0,1) \\ u(0)=0, u(1)=\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

正解的存在唯一性。

在文献[3]中，作者运用不动点定理，得到了积分边值问题

$$\begin{cases} x''+f(t,x)=0 \\ x(0)=0, x(1)=\int_0^1 g(t)x(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

至少有一个正解的充分条件。

在文献[4]中，作者运用范数形式的锥拉伸与不动点定理，研究积分边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)u'(t)+\lambda f(t,u(t))=0 \\ u'(0)=0, u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

解的存在性。

董士杰[5]应用单侧全局分歧定理，得到了边值问题

$$\begin{cases} u''+f(t,u)=0 \\ u(0)=0, u(1)=\int_0^1 a(s)u(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

至少存在一个正解和一个负解。

杨春风[6]运用单调迭代方法讨论带有积分边界条件的非线性二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''+f(t,u)=0 \\ u(0)=\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s, u(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性。

目前为止，还没有人研究比较原理在上下解中的应用，因此本文对积分边值问题的研究起到一个很好的补充效果。

2. 比较原理

首先引入一个比较原理。

定理 1 [7]假设 $u(t)$ 连续并且二阶可导，满足

$$\begin{cases}-u''(t)+c(t)u(t)\geq 0, t\in(0,1)\\ u(0)\geq 0, u(1)=0\end{cases}$$

其中$c(t)\geq 0$，那么$u(t)>0$，对任意$t\in(0,1)$。

对以往的积分边值问题做了改动，给出新的积分边值问题中的比较原理，并用数学方法证明了此定理。

定理2 假设$u(t)$连续并且二阶可导，满足

$$\begin{cases}-u''(t)+c(t)u(t)\geq 0, t\in(0,1)\\ u(0)\geq 0, u(1)\geq \alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s\end{cases}$$

其中$c(t)\geq 0$，$\alpha\in(0,1)$，那么$u(t)\geq 0$，如果$u(t)\not\equiv 0$，则有$u(t)>0$，对任意$t\in(0,1)$，并且有$u'(0)>0$。

证明 1) 首先证明当$t\in[0,1]$时，$u(t)\geq 0$。

假设存在$t_0\in(0,1]$，使得$u(t_0)<0$，由于已知$u(1)\geq\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s$和$\alpha\neq 0$，我们便可以假设$t_0\in(0,1)$。

当$t\in[0,1]$时，令$u(t_0')=\min u(t)$，则有$u(t_0')<0$。

如果$t_0'=1$，则

$$u(1)=\min u(t)\geq\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s$$

根据积分第一中值定理可以得到，

$\exists\xi\in(0,1)$，使得$\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t=u(\xi)\int_0^1 1\mathrm{d}t=u(\xi)$

于是就有$u(1)=\min u(t)\geq\alpha u(\xi)$，$u(\xi)\leq\dfrac{1}{\alpha}u(1)<u(1)$，这显然是矛盾的。

因此，

$$t_0'\in(0,1).$$

同时，可以得到

$$u''(t_0)\geq 0 \text{ 和 } u(t_0')<0.$$

此时，$-u''(t)+c(t)u(t)<0$，这与$-u''(t)+c(t)u(t)\geq 0$矛盾。

因此，

当$t\in[0,1]$时，$u(t)\geq 0$。

2) 下面我们将证明如果$u(t)\not\equiv 0$，则有$u(t)>0$，其中$t\in(0,1]$并且有$u'(0)>0$。

假设

$\exists t_0>0$，使得$u(t_0)=0$。

一般的，假设

$$\begin{cases}u(t)<0, t\in(t_0,t_0+\delta]\\ u(t_0)=0\end{cases},$$

令$h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t_0^2}-\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$，$t\in[t_0,t_0+\delta]$，其中$\alpha>0$。

所以，

$$h'(t)=2\alpha t\mathrm{e}^{-\alpha t^2} \text{ 和 } h''(t)=2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t^2}-(2\alpha t)^2\mathrm{e}^{-\alpha t^2},$$

由此易知

$$h'(t_0)=2\alpha t_0 e^{-\alpha t_0^2}>0.$$

同时，令α足够小时，就有$h''(t)>0$。

令α足够小，和$w(t)=u(t)-\varepsilon h(t)$，$t\in[t_0,t_0+\delta]$，

结合以上，再令ε足够小，使得

$$w(t_0+\delta)=u(t_0+\delta)-\varepsilon h(t_0+\delta)\geq 0$$

就得到

$$w(t_0)=0\text{ 和 }-w''(t)=-u''(t)+\varepsilon h''(t)>0,\ t\in(t_0,t_0+\delta).$$

由强比较原理得

$$w(t)>0,\ t\in(t_0,t_0+\delta).$$

因此，

$$w'(t_0)=\lim_{t\to t_0^+}\frac{w(t)-w(t_0)}{t-t_0}\geq 0.$$

结合$w'(t_0)=u'(t_0)-\varepsilon h'(t_0)$，我们有

$$u'(t_0)\geq \varepsilon h'(t_0)>0.$$

又因为$u(t_0)=0$，$\exists\delta'>0$，使$u(t)<0$，$t\in(t_0-\delta,t_0)$。这个结论和$u(t)\geq 0$矛盾，所以，$u(t)<0$，$t\in(0,1]$。

同样可以证明，如果$u'(0)$存在，则有$u'(0)>0$。

3. 上下解定理

对于下列的边值问题

$$\begin{cases}u''(t)+f(t,u)=0,t\in(0,1)\\ u(0)=0,u(1)=\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s\end{cases}\tag{1}$$

给出它的一个上下解的定义。

如果$a\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$，有

$$\begin{cases}-a''(t)\leq f(t,a(t))\\ a(0)\leq 0,a(1)\leq\alpha\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s\end{cases}$$

那么就定义为$a(t)$是边值问题的下解。

如果$b\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$，有

$$\begin{cases}-b''(t)\geq f(t,b(t))\\ b(0)\geq 0,b(1)\geq\alpha\int_0^1 b(s)\mathrm{d}s\end{cases}$$

那么就定义为$b(t)$是边值问题的上解。

下面讨论关于上下解的一个结论

定理 对于a,b，我们假设下解小于等于上解，使得

(Δ_1) $a(t)\leq b(t)$，对任意$t\in[0,1]$

假设

(Δ_2) $N_a^b \subset N$，其中 $N \subset (0,1)\times R$，$N_a^b = \{(t,x)\in(0,1)\times R : a(t)\le x\le b(t)\}$

假设存在函数 h，使得：

(Δ_3) $|f(t,x)|\le h(t)$，对任意 $(t,x)\in N_a^b$

和

(Δ_4) $\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s < +\infty$

则至少存在一个解 $u(t)$，使得

$$a(t)\le u(t)\le b(t)\text{，对任意 } t\in(0,1) \tag{2}$$

证明 首先来定义一个函数

$$f^*(t,x)=\begin{cases} f(t,a(t)), x<a(t) \\ f(t,u), a(t)\le x\le b(t) \\ f(t,b(t)), x>b(t) \end{cases}$$

其中 $f(t,x)$ 连续，根据(Δ_2)和 f^* 的定义可以得到 f^* 是连续的，并且根据(Δ_3)可知，它满足

$$|f^*(t,x)|\le h(t)\text{ 对任意 }(t,x)\in(0,1)\times R \tag{3}$$

然后考虑这个问题

$$\begin{cases} u''(t)+f^*(t,u)=0, t\in(0,1) \\ u(0)=0, u(1)=\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{4}$$

如果 u 是上述问题的解，并且对于任意 $t\in[0,1]$，有 $a(t)\le u(t)\le b(t)$，那么 u 就是满足上述定理的一个解。然后我们用反证法去证明这个结论。

假设 $\exists t_1\in(0,1)$，使 $u(t_1)<a(t_1)$。令 $w(t)=a(t)-u(t)$，则 $w(t_1)=a(t_1)-u(t_1)>0$。

因为 $a(t)$ 和 $u(t)$ 连续，所以 $w(t)$ 也是连续的，由连续函数保号性可知，在 t_1 的某邻域内，有 $w(t)>0$。于是定义两个特殊点

$$t_* = \inf\{t | s\in[t,t_1], w(t)>0\}$$

$$t^* = \sup\{t | s\in[t_1,t], w(t)>0\}$$

由于 $t\in[0,1]$，由确界原理，t_*, t^* 是存在的。

然后分以下几种情况讨论

(i) $w(t)>0, t\in(t_*,t^*), w(t_*)=0, w(t^*)=0, t^*<1$

根据 $f^*(t,x)$ 的定义，当 $w(t)>0$，即 $u(t)<a(t)$ 时，有

$$f^*(t,u(t))=f(t,a(t))$$

又因为 $a(t)$ 是下解，根据上述下解的定义，得

$$a''(t)+f(t,a(t))\ge 0$$

上述两式联立，得

$$a''(t)-u''(t)=w''(t)\ge 0$$

由定理 1 可推出

$$w(t)<0$$

这与此处 $w(t)>0$ 矛盾。

(ii) $w(t)>0, t\in(t_*,t^*), w(t_*)=0, w(t^*)=0, t^*=1$

与(i)同理，由定理 1 得

$$w(t)<0$$

这与假设 $w(t)>0$ 相矛盾。

(iii) $w(t)>0, t\in(t_*,t^*), w(t_*)=0, w(t^*)>0, t^*=1$

此处，又分两种情况

① $t_*=0$，即 $w(0)=0, w(1)>0, w(t)>0, t\in(0,1)$

与(i)同理可推出

$$-w''(t)=-(a(t)-w(t))''\le 0$$

又有 $w(0)=0$，$w(1)=a(1)-u(1)\le\alpha\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s=\alpha\int_0^1 w(s)\mathrm{d}s$。

由定理 2 可得

$$w(t)\le 0$$

这与假设的 $w(t)>0$ 相矛盾。

③ $t_*>0$ 时，又分为两种情况

1′ $\exists t'\in(0,t_*), w(t')>0$

这与上述开头的假设类似，将 t_1 换作 t'，同理在 $(0,t_*)$ 进行讨论，得出矛盾。

2′ $\forall t\in(0,t_*), w(t)\le 0$

由①得 $-w''(t)=-(a(t)-w(t))''\le 0$，$w(t_*)=0$ 和

$$\begin{aligned}w(1)&=a(1)-u(1)\\&\le\alpha\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s\\&=\alpha\int_0^1 w(s)\mathrm{d}s\\&=\alpha\int_0^{t_*} w(s)\mathrm{d}s+\alpha\int_{t_*}^1 w(s)\mathrm{d}s\\&\le\alpha\int_{t_*}^1 w(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

对以上讨论的定理 2 改变定义域，变化为

$$\begin{cases}-u''(t)+c(t)u(t)\ge 0, t\in(t_*,1)\\ u(t_*)\ge 0, u(1)\ge\alpha\int_{t_*}^1 u(s)\mathrm{d}s\end{cases}$$

应用此比较原理可得

$$w(t)\le 0$$

这与假设 $w(t)>0$ 相矛盾。

综上所述，t_1 不存在，$u(t_1)<a(t_1)$ 不成立，于是得到在 $(0,1)$ 上，有

$$u(t)\ge a(t).$$

同理，可以证明在 $(0,1)$ 上，有 $u(t)\le b(t)$。

此时就证明了问题(4)至少有一个解，然后令 $G(t,s)$ 是这个问题的格林函数

$$-u''=w(t),$$

$$u(0)=u(1)=0.$$

然后看下面这个等式

$$\begin{cases}-u''=w(t)\\ u(0)=0,u(1)=\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s\end{cases} \tag{5}$$

当且仅当 $u(t)=\psi(t)+\int_0^1 G(t,s)w(s)\mathrm{d}s$ 时，存在一个解 u，其中

$$\psi(t)=0+t\left(\alpha\int_0^1 u(s)\mathrm{d}s-0\right).$$

给出 $G(t,s)$ 的表达式

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t),0\le s\le t,\\ t(1-s),t\le s\le 1.\end{cases}$$

考虑由下列等式给出的算子 $T:u\mapsto Tu$

$$T(u))(t):=\psi(t)+\int_0^1 G(t,s)f^*(s,u(s))\mathrm{d}s$$

由上述(Δ_4)，(3)和 f^* 的定义可知，它服从

$$T:X\to X:=\left(\mathscr{C}([0,1],R),|\bullet|_\infty\right)$$

即定义它是连续的，并且 $T(X)$ 是有界集。另外，当 $u=Tu$，u 是(4)的一个解，同时(1)的解也满足(2)。由 Schauder 不动点定理可以得到算子 T 的不动点的存在性，所以只要我们检验 $T(X)$ 相对紧就可以了。

令 $t\in(0,1)$，由(3)可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(u)(t)\right|&=\left|(\alpha-\beta)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t s(1-t)f^*(s,u(s))\mathrm{d}s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^1 t(1-s)f^*(s,u(s))\mathrm{d}s\right|\\&\le(\alpha-\beta)+\int_0^t s\left|f^*(s,u(s))\right|\mathrm{d}s+\int_t^1(1-s)\left|f^*(s,u(s))\right|\mathrm{d}s\\&\le(\alpha-\beta)+\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s+\int_t^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s=(\alpha-\beta)+\gamma(t)\end{aligned}$$

我们现在证明 $\gamma\in L^1((0,1),R)$。通过 Arzelà-Ascoli 定理可以确保 $T(X)$ 的紧性。可以通过简单的分部积分计算得到结果。

$$\begin{aligned}\int_0^1|\gamma(s)|\mathrm{d}s&=\int_0^1\gamma(t)\mathrm{d}s\\&\le\lim_{t\to1^-}(1-t)\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s+\lim_{t\to0^-}t\int_t^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s+2\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s\\&\le 4\int_0^1 s(1-s)h(s)\mathrm{d}s<+\infty\end{aligned}$$

证明完毕。

参考文献

[1] 骆泽宇，刘锡平，姚楠，蹇星月，郭莉莉．分数阶微分方程积分边值问题上下解方法[J]. 应用泛函分析学报，2018, 20(4): 344-353.

[2] 蔡蕙泽，韩晓玲．二阶非线性积分边值问题正解的存在唯一性[J]. 四川大学学报(自然科学版)，2019，56(3): 399-403.

[3] Feng, M., Ji, D. and Ge, W. (2007) Positive Solutions for a Class of Boundary-Value Problem with Integral Boundary Conditions in Banach Spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **222**, 351-363. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.11.003

[4] Li, G., Liu, X. and Jia, M. (2008) Positive Solutions to a Type of Nonlinear Three-Point Boundary Value Problem with Sign Changing Nonlinearities. *Computers and Mathematics with Applications*, **57**, 348-355. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.10.093

[5] 董士杰．二阶积分边值问题的恒号解[J]. 军械工程学院学报, 2015, 27(1): 66-69.

[6] 杨春风．一类带有积分边界条件的非线性二阶边值问题正解的存在性[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2011, 47(3): 11-14.

[7] 叶其孝，李正元．反应扩散方程引论[M]. 北京：科学出版社, 1990.