Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1430-1433
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117160

Hans汉斯

一道大学生数学竞赛题目的一题多解探讨

刘　波，刘晓燕，李文彬

海军航空大学，山东 烟台
Email: Lauber@126.com

收稿日期：2021年6月13日；录用日期：2021年7月15日；发布日期：2021年7月22日

摘　要

本文给出了一道1975年苏联大学生数学竞赛极限问题的七种不同解法，使读者从处理极限的多个不同角度出发去解决问题，一方面面熟悉关于极限的多个知识点，达到融会贯通；另一方面能拓宽解题思路，培养和提高从多个角度解决实际问题的能力，达到举一反三。对于培养学生学习高等数学的兴趣和参加国内大学生数学竞赛也有很好的促进作用。

关键词

一题多解，极限，数学竞赛，单调有界原理，不动点，Cauchy收敛准则

Discussion on Multiple Solutions of One Problem in a College Mathematics Contest

Bo Liu, Xiaoyan Liu, Wenbin Li

Naval Aviation University, Yantai Shandong
Email: Lauber@126.com

Received: Jun. 13th, 2021; accepted: Jul. 15th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

Abstract

This paper gives seven different solutions to the limit problem of the 1975 Soviet Union College Students' mathematics competition, which enables readers to solve the problem from many different angles of dealing with the limit. On the one hand, they are familiar with many knowledge points about the limit, so as to achieve mastery; on the other hand, it can broaden the thinking of solving problems, cultivate and improve the ability to solve practical problems from multiple angles, so as to draw inferences from one instance. It also plays a very good role in cultivating students' interest in learning higher mathematics and participating in domestic college students' mathematics competition.

文章引用: 刘波, 刘晓燕, 李文彬. 一道大学生数学竞赛题目的一题多解探讨[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1430-1433.
DOI: 10.12677/pm.2021.117160

Keywords

Multiple Solutions, Limit, Mathematics Competition, Monotone Bounded Principle, Fixed Point, Cauchy Convergence Criterion

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

2009 年，第一届全国大学生数学竞赛[The Chinese Mathematics Competitions (简称 CMC)]开始举办。作为一项面向本科生的全国性高水平学科竞赛，CMC 为青年学子提供了一个展示数学基本功和数学思维的舞台，为发现和选拔优秀数学人才并进一步促进高等学校数学课程建设的改革和发展积累了调研素材。由中国数学会承办，也是全国高中数学竞赛在大学里的良好接力。竞赛从第一届到现在，已经举办了 12 届(2021 年 10 月份将举办第十三届全国大学生数学竞赛)，当前全国大学生数学竞赛已成为影响力很大的一项大学生学科竞赛(2020 年参赛人数为 20 万)。笔者已经从事竞赛辅导培训工作八年，每年均获得山东省优秀指导教师称号，下面从 1975 年苏联的一道大学生数学竞赛题目的 7 种不同解法出发，来谈一下自己对于处理竞赛类题目的方法和体会。

2. 一题多解方法

题目[1]：设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{C(1+x_n)}{C+x_n}, n=1,2,\cdots$， $C>1$ 为常数，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。

方法 1：利用最常规的思路(高等数学书中的单调有界原理)

i) 若 $x_1=\sqrt{C}$ ， 则 $\forall n\in\mathbf{N}, x_n=\sqrt{C}, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$ ；

ii) 若 $x_1>\sqrt{C}$ ， 令 $f(x)=\dfrac{C(1+x)}{C+x}$ ， 则 $f'(x)=\dfrac{C(C-1)}{(C+x)^2}>0(\forall x>0, C>1)$ ， 所以 $\forall n\in\mathbf{N}, x_n>\sqrt{C}$ ，从而 $x_{n+1}=f(x_n)>f(\sqrt{C})=\sqrt{C}$ ， 故由 $x_1>\sqrt{C}$ 可得 $x_n>\sqrt{C}$ ， 又因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{C-x_n^2}{C+x_n}<0$ ， 所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少，因而数列 $\{x_n\}$ 收敛；

iii) $0<x_1<\sqrt{C}$ ，由数学归纳法可知：对于 $\forall n\in\mathbf{N}, 0<x_n<\sqrt{C}$ ， $x_{n+1}-x_n=\dfrac{C-x_n^2}{C+x_n}>0$ ，从而数列 $\{x_n\}$ 单调递增，所以 $\{x_n\}$ 收敛。不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ ， 两边取极限， 得 $A=\dfrac{C(1+A)}{C+A}$ ， 从而 $A=\pm\sqrt{C}$ 。由保号性知 $A\geq 0$ ， 故取 $A=\sqrt{C}$ ， 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$ 。

方法 2：利用数列的递推关系(迭代的思想)

由相邻项的递推关系式 $x_n=\dfrac{C(1+x_{n-1})}{C+x_{n-1}}$ 可得

$$x_n+\sqrt{C}=\sqrt{C}\cdot(1+\sqrt{C})\cdot\frac{x_{n-1}+\sqrt{C}}{x_{n-1}+C},\quad \frac{1}{x_n+\sqrt{C}}=\frac{1}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{x_{n-1}+C}{x_{n-1}+\sqrt{C}}=\frac{1}{C+\sqrt{C}}+\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{C}}.$$

所以，$\frac{1}{x_n+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}=\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\left(\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}\right)=\cdots=\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{x_1+\sqrt{C}}-\frac{1}{2\sqrt{C}}\right)$，因为 $\left|\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right|<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n+\sqrt{C}}=\frac{1}{2\sqrt{C}}$。故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{C}\right)=2\sqrt{C}$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$。

方法 3：利用相邻项差的符号及单调有界准则

因

$$x_n>0\left(n=1,2,\cdots\right),C>1,$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{C\left(1+x_{n+1}\right)}{C+x_{n+1}}-x_{n+1}=\frac{C-x_{n+1}^2}{C+x_{n+1}}=\frac{C-\left(\frac{C\left(1+x_n\right)}{C+x_n}\right)^2}{C+\frac{C\left(1+x_n\right)}{C+x_n}}=\frac{\left(C-1\right)\left(C-x_n^2\right)}{\left(C+2x_n+1\right)\left(C+x_n\right)},$$

所以 $\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{\frac{\left(C-1\right)\left(C-x_n^2\right)}{\left(C+2x_n+1\right)\left(C+x_n\right)}}{\frac{C-x_n^2}{C+x_n}}=\frac{C-1}{C+2x_n+1}>0$，于是 $x_{n+2}-x_{n+1}$ 与 $x_{n+1}-x_n$ 同号，从而知 $\{x_n\}$ 为单调增加数列。

又由 $0<x_{n+1}=\frac{C\left(1+x_n\right)}{C+x_n}<\frac{C\left(1+x_n\right)}{1+x_n}=C$，可知数列 $\{x_n\}$ 有界，从而由单调有界原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛。不妨记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则由递推关系式两边取极限得 $l=\frac{C\left(1+l\right)}{C+l}$，解得 $l=\pm\sqrt{C}$。而由 $x_n>0$，知 $l\ge 0$，故取 $l=\sqrt{C}$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$。

方法 4：先求出极限，再利用极限的定义[2]

假设 $\{x_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在递推关系式两边取极限，得 $A=\frac{C\left(1+A\right)}{C+A}$，解得 $A=\pm\sqrt{C}$。又因为 $x_n>0$，所以 $A\ge 0$，故 $A=\sqrt{C}$。以下证明数列 $\{x_n\}$ 收敛且以 $\sqrt{C}$ 为极限。因为

$$\left|x_n-\sqrt{C}\right|=\left|\frac{C\left(1+x_{n-1}\right)}{C+x_{n-1}}-\sqrt{C}\right|=\left|\frac{\left(C-\sqrt{C}\right)\cdot\left(x_{n-1}-\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}}\right|<\frac{C-\sqrt{C}}{C}\cdot\left|x_{n-1}-\sqrt{C}\right|<\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C}\right)^{n-1}\cdot\left|x_1-\sqrt{C}\right|,$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C}\right)^{n-1}=0$，所以由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\sqrt{C}\right|=0$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$。

方法 5：采用不动点理论

令 $f\left(x\right)=\frac{C\left(1+x\right)}{C+x}$，则由 $f\left(x\right)=x$ 求得 $f\left(x\right)$ 的不动点 $x_1=\sqrt{C},x_2=-\sqrt{C}$。于是

$x_n-\sqrt{C}=\frac{\left(C-\sqrt{C}\right)\cdot\left(x_{n-1}-\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}}$，$x_n+\sqrt{C}=\frac{\left(C+\sqrt{C}\right)\cdot\left(x_{n-1}+\sqrt{C}\right)}{C+x_{n-1}}$，从而

$\frac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}=\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\cdot\frac{x_{n-1}-\sqrt{C}}{x_{n-1}+\sqrt{C}}=\cdots=\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_1-\sqrt{C}}{x_1+\sqrt{C}}$。故由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{C-\sqrt{C}}{C+\sqrt{C}}\right)^{n-1}=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}=0$，

即得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{C}$ 。

方法 6：利用 Cauchy 收敛准则[3]

由已知，有 $x_n > 0$，且

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| = \left|\frac{C(1+x_n)}{C+x_n} - \frac{C(1+x_{n-1})}{C+x_{n-1}}\right| = \left|\frac{(C-1)(x_n-x_{n-1})}{(C+x_n)(C+x_{n-1})}\right| = \left|\frac{(C-1)(x_n-x_{n-1})}{(C+x_{n-1})+(1+x_{n-1})}\right|$$

$$< \frac{|C-1|}{C+1}\cdot\left|x_n-x_{n-1}\right| < \cdots < \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{n-1}\cdot\left|x_2-x_1\right|,$$

于是对任意正整数 p，有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right| \le \left|x_{n+p}-x_{n+p-1}\right| + \left|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}\right| + \cdots + \left|x_{n+1}-x_n\right|$$

$$< \left[\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{n+p-2} + \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{n+p-3} + \cdots + \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{n-1}\right]\cdot\left|x_2-x_1\right| < \frac{C+1}{2}\cdot\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{n-1}\cdot\left|x_2-x_1\right|,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{n-1} = 0$ 知，$\forall\varepsilon>0, \exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\left|x_{n+p}-x_n\right| \le \varepsilon$，故由 Cauchy 收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛。然后在递推关系式两边取极限，即可得 $\lim\limits_{n} x_n = \sqrt{C}$ 。

方法 7：利用无穷级数敛散性

类似于方法 6，得 $\left|x_{n+1}-x_n\right| < \frac{|C-1|}{C+1}\cdot\left|x_n-x_{n-1}\right|$，于是由比值判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|x_{n+1}-x_n\right|$ 收敛，因为数列的单调性，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛。

又 $x_n = (x_n-x_{n-1}) + (x_{n-1}-x_{n-2}) + \cdots + (x_2-x_1) + x_1$，故数列 $\{x_n\}$ 收敛。再在递推关系式两边取极限，即得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{C}$ 。

注：由上述几种方法可以看出，仅在方法 1、方法 3 和方法 6 中利用了 $C>1$ 的条件，其它方法中只需满足 $C>0$ 即可。因此可将题目中的条件 $C>1$ 减弱为 $C>0$ 。

在高等数学课程的学习过程中，解题尤其是解难题是一项非常重要的活动。极限在第一届至第十二届全国大学生数学竞赛非数学组中，不论是预赛还是决赛，都作为考察学生掌握的重点内容，每年考试题目中均有 10~20 分左右的题目。在平时解题过程中，如果能多从不同的角度思考一题多解，那么解题就会成为一项有趣且富有挑战性的工作，对培养学生的发散思维，提高他们解决难题的能力，积极参加大学生数学竞赛都有一定的促进作用。

参考文献

[1] 许康. 前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2014.

[2] 张天德, 窦慧, 崔玉泉. 全国大学生数学竞赛辅导指南[M]. 第 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2019.

[3] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.