Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(7), 1289-1298
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.117144

Hans汉斯

一类脉冲微分方程解的增长

郭林峰，李宝麟

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 1544068210@qq.com, 377923634@qq.com

收稿日期：2021年5月26日；录用日期：2021年6月28日；发布日期：2021年7月6日

摘 要

本文利用脉冲微分方程与测度微分方程之间的等价关系，依据测度微分方程解的渐进行为相关结果得到了脉冲微分方程解的渐进行为。

关键词

脉冲微分方程，测度微分方程，解的增长

Growth of Solutions for a Class of Impulsive Differential Equations

Linfeng Guo, Baolin Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 1544068210@qq.com, 377923634@qq.com

Received: May 26th, 2021; accepted: Jun. 28th, 2021; published: Jul. 6th, 2021

Abstract

In this paper, by using the equivalent relation between the impulsive differential equation and measure differential equation, and according to the asymptotic behavior of the solution for the measure differential equation, we get the asymptotic behavior of the solution for the impulsive differential equation.

Keywords

Impulsive Differential Equations, Measure Differential Equations, The Growth of the Solution

文章引用: 郭林峰, 李宝麟. 一类脉冲微分方程解的增长[J]. 理论数学, 2021, 11(7): 1289-1298.
DOI: 10.12677/pm.2021.117144

1. 引言

脉冲微分系统在现代诸多科技领域有很好的应用(见文献[1])。文献[2]给出了脉冲微分方程的解与广义常微分方程解的等价关系，文献[3]利用线性逼近的方法给出了扰动后的非线性脉冲微分系统解的有界性，稳定性及吸引。文献[4]研究了脉冲微分方程解关于初值的连续依赖性，文献[5]利用李雅谱诺夫第二方法及压缩映射原理得到了脉冲微分方程的周期解的存在唯一性和整体吸引力。文献[6]首先给出了广义常微分方程的解的渐进性行为，然后通过测度微分方程及时间尺度上的动态方程与广义常微分方程之间的关系研究了测度微分方程及时间尺度上的动态方程的解的渐进行为。

文献[7]先给出了广义常微分方程的 Massera's 定理，然后通过测度微分方程与广义常微分方程的等价关系得到了测度微分方程 $x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}g(s)$ 的 Massera's 定理，最后通过脉冲微分方程

$$x'(t)=f(x(t),t)$$

$$\Delta^{+}x(\tau_j)=I_j(x(\tau_j)),\quad j\in Z_{+}$$

及时间尺度上的动态方程

$$x^{\Delta}(t)=f(x(t),t),\quad t\in T$$

与测度微分方程之间的等价关系得到了脉冲微分方程及时间尺度上的动态方程的 Massera's 定理。

本文我们利用脉冲微分方程与测度微分方程之间的等价关系，依据测度微分方程解的渐进行为的相关结果讨论了脉冲微分方程

$$x'(t)=f(x(t),t) \tag{1.1}$$

$$\Delta^{+}x(\tau_j)=I_j(x(\tau_j)),\quad j\in Z_{+} \tag{1.2}$$

解的渐进行为。其中 $f:R^n\times R\to R^n$，$I_j:R^n\to R^n$。对每个 $j\in Z_{+}$，$\{\tau_j\}_{j\in Z_{+}}$ 是一个递增的正实数序列满足 $\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j=+\infty$。并且 $\Delta^{+}x(\tau_j)=x(\tau_j+)-x(\tau_j)$。

设(1.1)式几乎处处成立。方程的解 x 在每个区间 $(\tau_{j-1},\tau_j]$，$j\in Z_{+}$ 上左连续且绝对连续，则脉冲微分方程对应的积分形式为：

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}s+\sum_{\substack{j\in Z_{+}\\ t_0\le\tau_j<t}} I_j(x(\tau_j)) \tag{1.3}$$

(1.3)式右端积分为 Lebsuge 积分。本文中，我们考虑更为一般的情形，(1.3)式右端积分可被理解为 Kurzweil-Henstock 意义下的积分。由于 $\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j=+\infty$，所以脉冲点至多是有限个，(1.3)式右端和式是有意义的。

设 X 按范数 $\|\cdot\|$ 成为一个 Banach 空间，$B_c=\{x\in X \,|\, \|x\|\le c\}$，$\Omega=B_c\times[t_0,+\infty)$。记 $x(t,s_0,x_0)$ 为满足 $x(s_0,s_0,x_0)=x_0$ 的饱和解。$G([a,b],B_c)$ 表示所有的正则函数 $f:[a,b]\to B_c$，$G([a,b],B_c)$ 表示由 $f:[t_0,+\infty)\to X$ 所构成的向量空间，并且满足对所有的 $[a,b]\subset[t_0,+\infty)$，有 $f|_{[a,b]}\in G([a,b],B_c)$，

$G_0([t_0,+\infty),X)=\left\{f\in G([t_0,+\infty),X):\sup\limits_{s\in[t_0,+\infty)}\mathrm{e}^{-\gamma(s-t_0)}\|f(s)\|<\infty\right\}$。$f|_{[a,b]}$ 表示函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的限制，Z_+ 表示正整数集，R^+ 表示正实数集。

本文主要分为三个部分，第二部分介绍了后续所用的定义及引理，第三部分给出了脉冲微分方程解的渐进行为相关结果。

2. 预备知识

本节将介绍 Kurzweil 积分与文[6] [8]中的相关结论。

定义 2.1 [6]递增函数 $W:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 称为是楔子是指 $W(0)=0$，对 $s>0$，$W(s)>0,$，当 $s\to+\infty$，$W(s)\to+\infty$。

定义 2.2 [2]称函数 $U:[a,b]\times[a,b]\to R^n$ 在区间 $[a,b]$ 上 Kurzweil 可积，如果存在 $I\in R^n$，使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta:[a,b]\to(0,+\infty)$，对 $[a,b]$ 的任何 $\delta(\tau)-$ 精细分划 $D=\{(\tau_j,[\alpha_{j-1},\alpha_j]),j=1,2,\cdots,k\}$，其中 $\tau_j\in[\alpha_{j-1},\alpha_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)]$，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}\left[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})\right]-I\right\|<\varepsilon$$

则称 I 为 U 在 $[a,b]$ 上的 Kurzweil 积分，记作 $I=\int_a^b DU(\tau,t)$。特别地，当 $U(\tau,t)=f(\tau)g(t)$ 时，$\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s)$。称积分为 Kurzweil-Stieltjes 积分，当 $U(\tau,t)=f(\tau)t$ 时，$\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}s$。称积分为 Kurzweil-Henstock 积分。

定义 2.3 [2]称函数 $F\in\mathcal{F}(\Omega,h)$ 是指存在函数 $h:[t_0,+\infty)\to R$ 使得 $F:\Omega\to X$ 满足对所有的 $(x,s_i)\in\Omega$，$i=1,2$，有

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)\|\le|h(s_2)-h(s_1)|, \tag{2.1}$$

对所有的 (x,s_i)，$(y,s_i)\in\Omega$，$i=1,2$，有

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)-F(y,s_2)+F(y,s_1)\|\le|h(s_2)-h(s_1)|\|x-y\|.$$

定义 2.3 [8]称函数 $M:[t_0,+\infty)\to R^n$ 相对于 g 是局部 Kurzweil 可积的是指 M 在 $[t_0,+\infty)$ 的每个子区间 $[a,b]$ 上相对于 g Kurzweil 可积。

引理 2.1 [8]设函数 $f:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$ 和 $g:[t_0,+\infty)\to R$ 满足以下条件：

(A1) 函数 $g:[t_0,+\infty)\to R$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上是不减左连续的。

(A2) 对每个 $x\in G([t_0,+\infty),B_c)$，$u_1,u_2\in[t_0,+\infty)$ 积分 $\int_{u_1}^{u_2}f(x(s),s)\mathrm{d}g(s)$ 存在。

(A3) 存在局部 Kurzweil 可积函数 $M:[t_0,+\infty)\to R_+$，使得对任意的 $x,z\in G_0([t_0,+\infty),B_c)$，$u_1,u_2\subseteq[t_0,+\infty)$，$u_1\ge u_2$ 时，有

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2}f(x(t),t)\mathrm{d}g(t)\right\|\le\int_{u_1}^{u_2}M(t)\mathrm{d}g(t).$$

(A4) 存在局部 Kurzweil 可积函数 $L:[t_0,+\infty)\to R_+$，使得对任意的 $x,z\in G_0([t_0,+\infty),B_c)$，$u_1,u_2\subseteq[t_0,+\infty)$，$u_1\ge u_2$ 时，有

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2}\left[f(x(t),t)-f(z(t),t)\right]dg(t)\right\|\le\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}\int_{u_1}^{u_2}L(t)dg(t).$$

令 $\tau_0 \in [t_0,+\infty)$ 并且定义 $F: B_c \times [\tau_0,+\infty) \to R^n$

$$F(x,t)=\int_{\tau_0}^{t} f(x,s)\mathrm{d}g(s),\ (x,t)\in B_c\times[\tau_0,+\infty),$$

则 $F\in\mathcal{F}(\Omega,h)$。其中 $\Omega=B_c\times[\tau_0,+\infty)$，$h:[\tau_0,+\infty)\to R$ 是不减左连续的，

$$h(t)=\int_{\tau_0}^{t}[M(s)+L(s)]\mathrm{d}g(s),\ t\in[\tau_0,+\infty).$$

引理 2.2 [8] 设函数 $f: B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$g:[t_0,+\infty)\to R$ 满足条件(A1)~(A4)。假设对每个 $(z_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，有 $z_0+f(z_0,s_0)\Delta^+g(s_0)\in B_c$。则对每个 $(x_0,\tau_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，测度微分方程

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}g(s) \tag{2.2}$$

存在满足初始条件 $x(\tau_0)=x_0$ 的唯一饱和解 $x:J\to R^n$，J 为区间且 $\tau_0=\min J$。

引理 2.3 [6] 设函数 $f: B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$g:[t_0,+\infty)\to R$ 满足条件(A1)~(A4)。假定对每个 $(x_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，有 $x_0+f(x_0,s_0)\Delta^+g(s_0)\in B_c$。存在函数 $U:[t_0,+\infty)\times B_c\to R$ 和楔子 $W_{ii}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$i=1,2,3$ 满足下列条件：

(U1) 对测度微分方程(2.2)的每个解 $x:I\to B_c$ 有

$$W_1(\|x(t)\|)\le U(t,x(t))\le W_2(\|x(t)\|),$$

其中 $t\in I$，$I\subset[t_0,+\infty)$，I 为非退化区间。

(U2) 对测度微分方程(2.2)的每个饱和解 $x(t)=x(t,s_0,x_0)$，$(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$，有

$$U(t,x(t))-U(s,x(s))\ge\int_s^t W_3(\|x(\xi)\|)\mathrm{d}l(\xi),$$

其中 $t,s\in[s_0,\omega(s_0,x_0))$，$t\ge s.$。$l:[s_0,+\infty)\to R$ 是不减的，满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} l(t)=+\infty$。

若 $(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$，则 $\omega(s_0,x_0)<\infty$。

引理 2.4 [6] 设函数 $f: B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$g:[t_0,+\infty)\to R$ 满足条件(A1)~(A4)。假定对每个 $(x_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，有 $x_0+f(x_0,s_0)\Delta^+g(s_0)\in B_c$。存在函数 $U:[t_0,+\infty)\times B_c\to R$ 和楔子 $W_{ii}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$i=1,2$ 满足下列条件：

(H1) 对测度微分方程(2.2)的每个解 $x:I\to B_c$ 有

$$|U(t,x(t))|\le W_1(\|x(t)\|),$$

其中 $t\in I$，$I\subset[t_0,+\infty)$，I 为非退化区间。

(H2) 对测度微分方程(2.2)的每个饱和解 $x(t)=x(t,s_0,x_0)$，$(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$，函数 $t\to U(t,x(t))$ 在 $[s_0,\omega(s_0,x_0))$ 上正则。有

$$U(t,x(t))-U(s,x(s))\le-\int_s^t W_2(|U(\xi,x(\xi)|)\mathrm{d}l(\xi),$$

其中 $t,s\in[s_0,\omega(s_0,x_0))$，$t\ge s$。$l:[s_0,+\infty)\to R$ 是不减的，满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} l(t)=+\infty$。

若 $(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$，使得 $U(s_0,x_0)<0$，则 $\omega(s_0,x_0)<\infty$。

引理 2.5 [8]假定函数 $f: B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$g:[t_0,+\infty)\to R$ 满足条件(A1)~(A4)。进一步，设对每个 $(z_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，有 $z_0+f(z_0,s_0)\Delta^+g(s_0)\in B_c$。令 $(x_0,\tau_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，$x:[\tau_0,\omega)\to R^n$ 是测度微分方程(2.2)满足 $x(\tau_0)=x_0$ 的解。若对所有的 $t\in[\tau_0,\omega)$，$x(t)\in N$。其中 $N\subset B_{cc}$ 是 R^n 中的闭集。则 $\omega=+\infty$。

引理 2.6 [7]设 $a\le\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_k<b$。函数 $f:[a,b]\to R^n$。令 $\tilde{f}:[a,b]\to R^n$ 使得对每个 $s\in[a,b]/\{\eta_1,\cdots,\eta_k\}$，有 $\tilde{f}(s)=f(s)$。令 $g:[a,b]\to R$ 是不减左连续的，使得对每个 $j\in\{1,\cdots,k\}$，有 $\Delta^+g(\eta_j)=1$。当 $[u,v]\cap\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\}=\emptyset$ 时，$g(t)-g(u)=t-u$。则 Kurzweil-Stieltjes 积 $\int_a^b\tilde{f}(s)\mathrm{d}g(s)$ 分存在当且仅当 Kurzweil-Henstock 积分 $\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s)$ 存在，且有

$$\int_a^b\tilde{f}(s)\mathrm{d}g(s)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{k}\tilde{f}(\eta_j).$$

引理 2.7 [7]设 $\{\tau_j\}_{j\in Z_+}\subset[t_0,+\infty)$ 是一个递增正实数序列且满足 $\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j=+\infty$。函数 $f:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$I_j:R^n\to R^n$，$j\in Z_+$。函数 $x:[a,b]\to R^n$ 是方程(1.3)在 $[a,b]$ 上的一个解当且仅当它是测度微分方程

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\tilde{f}(x(s),s)\mathrm{d}g(s),\ t\in[a,b] \tag{2.3}$$

的一个解。

其中 $\tilde{f}:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$ 是由下式所给

$$\tilde{f}(z,t)=\begin{cases}f(z,t), & [t_0,+\infty)/\{\tau_j;j\in Z_+\},\\ I_j(z), & t=\tau_j,j\in Z_+.\end{cases} \tag{2.4}$$

$g:[t_0,+\infty)\to R$ 由

$$g(t)=t+j,\ \ t\in(\tau_j,\tau_{j+1}],\ \ j\in Z_+ \tag{2.5}$$

所给。

3. 主要结果

定理 3.1 设函数 $f:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$I_j:R^n\to R^n$，$\{\tau_j\}_{j\in Z_+}\subset[t_0,+\infty)$ 为递增的正实数序列满足 $\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j=+\infty$。并且 f 和 g 满足条件：

(B1) 对每个 $x\in G([t_0,+\infty),B_c)$，$u_1,u_2\in[t_0,+\infty)$ 积分 $\int_{u_1}^{u_2}f(x(t),t)\mathrm{d}t$ 存在。

(B2) 存在局部 Kurzweil 可积函数 $m:[t_0,+\infty)\to R_+$，对任意的 $x,y\in G([t_0,+\infty),B_c)$，$[u_1,u_2]\subseteq[t_0,+\infty)$，$u_1\ge u_2$，有

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2}f(x(t),t)\mathrm{d}t\right\|\le\int_{u_1}^{u_2}m(t)\mathrm{d}t,$$

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2}\left[f(x(t),t)-f(z(t),t)\right]\mathrm{d}t\right\|\le\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}\int_{u_1}^{u_2}m(t)\mathrm{d}t.$$

(B3) 对每个 $j\in Z_+$，存在常数 $m_j\ge 0$ 使得

$$\|I_j(x)\|\le m_j,\ \ \|I_j(x)-I_j(z)\|\le\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}m_j.$$

则由(2.4) (2.5)式所给的 $\tilde{f},g$ 满足条件：

(A1) 函数 $g:[t_0,+\infty)\to R$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上是不减左连续的。

(A2) 对每个 $x\in G([t_0,+\infty),B_c)$，$u_1,u_2\in[t_0,+\infty)$ 积分 $\int_{u_1}^{u_2} f(x(s),s)\mathrm{d}g(s)$ 存在。

(A3) 存在局部 Kurzweil 可积函数 $M:[t_0,+\infty)\to R_+$，使得对任意的 $x,z\in G_0([t_0,+\infty),B_c)$，$u_1,u_2\subseteq[t_0,+\infty),$，$u_1\ge u_2$ 时，有

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2} f(x(t),t)\mathrm{d}g(t)\right\|\le\int_{u_1}^{u_2} M(t)\mathrm{d}g(t).$$

(A4) 存在局部 Kurzweil 可积函数 $L:[t_0,+\infty)\to R_+$，使得对任意的 $x,z\in G_0([t_0,+\infty),B_c)$，$u_1,u_2\subseteq[t_0,+\infty)$，$u_1\ge u_2$ 时，有

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2}\left[f(x(t),t)-f(z(t),t)\right]\mathrm{d}g(t)\right\|\le\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}\int_{u_1}^{u_2} L(t)\mathrm{d}g(t).$$

证明 显然由(2.5)式所给的 $g:[t_0,+\infty)\to R$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上是不减左连续的。

当 $j\in Z_+$ 时，由(2.5)式有

$$\begin{aligned}\Delta^+ g(\tau_j)&=\lim_{t\to\tau_j^+} g(t)-g(\tau_j)\\&=\tau_j^+ + j-(\tau_j+j-1)\\&=1.\end{aligned}$$

当 $[u,v]\cap\{\tau_1,\cdots,\tau_k\}=\emptyset$ 时，由(2.5)式有

$$g(t)-g(u)=t-u.$$

所以(2.4) (2.5)式中的 $f,\tilde{f},g$ 满足引理 2.6 中的假设条件。由假设对每个 $x\in G([t_0,+\infty),B_c)$ $u_1,u_2\in[t_0,+\infty)$ 积分 $\int_{u_1}^{u_2} f(x(t),t)\mathrm{d}t$ 存在，则由引理 2.6 积分 $\int_{u_1}^{u_2}\tilde{f}(x(t),t)\mathrm{d}g(t)$ 也存在。

定义 $\tilde{m}:[t_0,+\infty)\to R_+$

$$\tilde{m}(t)=\begin{cases} m(t), & t\in[t_0,+\infty)/\{\tau_j;j\in Z_+\},\\ m_j, & t=\tau_j, j\in Z_+.\end{cases}$$

所以由引理 2.6 和 2.7 对每个区间 $[u_1,u_2]\subseteq[t_0,+\infty)$，任意的 $x,y\in G([t_0,+\infty),B_c)$，有

$$\begin{aligned}\left\|\int_{u_1}^{u_2}\tilde{f}(x(t),t)\mathrm{d}g(t)\right\|&=\left\|\int_{u_1}^{u_2} f(x(t),t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{k}\tilde{f}(x(\tau_j),\tau_j)\right\|\\&=\left\|\int_{u_1}^{u_2} f(x(t),t)\mathrm{d}t+\sum_{\substack{j\in Z_+\\ u_1\le\tau_j<u_2}} I_j(x)\right\|\\&=\int_{u_1}^{u_2} m(t)\mathrm{d}t+\sum_{\substack{j\in Z_+\\ uu_1\le\tau_j<u_2}} m_j\\&=\int_{u_1}^{u_2} m(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{k}\tilde{m}(\tau_j)\\&=\int_{u_1}^{u_2}\tilde{m}(t)\mathrm{d}g(t).\end{aligned}$$

类似地，有

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2}\left[\tilde{f}(x,t)-\tilde{f}(z,t)\right]\mathrm{d}g(t)\right\|=\left\|\int_{u_1}^{u_2}\left(f(x,t)-f(z,t)\right)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{k}\left[\tilde{f}\left(x(\tau_j),\eta_j\right)-\tilde{f}\left(z(\tau_j),\eta_j\right)\right]\right\|$$

$$=\left\|\int_{u_1}^{u_2}\left(f(x,t)-f(z,t)\right)\mathrm{d}t+\sum_{\substack{j\in Z_+\\ uu_1\le\tau_j<u_2}}\left[I_j(x)-I_j(z)\right]\right\|$$

$$=\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}\int_{u_1}^{u_2}m(t)\mathrm{d}t+\sum_{\substack{j\in Z_+\\ u_1\le\tau_j<u_2}}\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}m_{\mathrm{jj}}$$

$$=\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}\int_{u_1}^{u_2}m(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{k}\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}\tilde{m}(\tau_j)$$

$$=\|x-z\|_{[t_0,+\infty)}\int_{u_1}^{u_2}\tilde{m}(t)\mathrm{d}g(t).$$

综上，由(2.4) (2.5)式所给的 $\tilde{f},g$ 满足条件(A1)~(A4)。

定理 3.2 设函数 $f:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$I_j:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$\{\tau_j\}_{j\in Z_+}\subset[t_0,+\infty)$ 为递增正实数序列满足 $\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j=+\infty$。且 f,I_j 满足条件(B1)~(B3)假定对每 $(x_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，$j\in Z_+$，有 $x_0+I_{\mathrm{jj}}(x_0)\in B_c$。存在函数 $U:[t_0,+\infty)\times B_c\to R$ 和楔子 $W_{ii}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$i=1,2,3$，满足以下条件：

(J1) 对脉冲微分方程(1.3)的每个解 $x:I\to B_c$ 有

$$W_1(\|x(t)\|)\le U(t,x(t))\le W_2(\|x(t)\|),$$

其中 $t\in I$，$I\subset[t_0,+\infty)$，I 是非退化区间。

(J2) 对脉冲微分方程(1.3)的每个饱和解 $x(t)=x(t,s_0,x_0)$，$(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$，有

$$U(t,x(t))-U(s,x(s))\ge\int_s^t W_3(\|x(\xi)\|)\mathrm{d}l(\xi),$$

其中 $,s\in[s_0,\omega(s_0,x_0))$，$t\ge s$。$l:[s_0,+\infty)\to R$，$l$ 是不减函数，满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}l(t)=+\infty$。

若 $(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$，则 $\omega(s_0,x_0)<\infty$。

证明 令 $x(t,s_0,x_0)$ 是脉冲微分方程(1.3)的唯一饱和解使得 $(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$。由引理 2.7 可知脉冲微分方程等价于测度微分方程(2.3)。其中 $\tilde{f}:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$g:[t_0,+\infty)\to R$，由(2.4) (2.5)式所给，再由定理 3.1 得 $\tilde{f},g$ 满足条件(A1)~(A4)。

当 $s_0\in[t_0,+\infty)/\{\tau_j,j\in Z_+\}$ 时，由(2.5)式有

$$\begin{aligned}\Delta^+g(s_0)&=\lim_{t\to s_0^+}g(t)-g(s_0)\\&=s_0^{\ +}+j-(s_0+j)\\&=0.\end{aligned}$$

则 $x_0+\tilde{f}(x_0,s_0)\Delta^+g(s_0)=x_0\in B_c$。

当 $s_0=\tau_j$ 时，$j\in Z_+$ 由(2.5)式有

$$\begin{aligned}\Delta^+g(s_0)&=\lim_{t\to s_0^+}g(t)-g(s_0)\\&=s_0^{\ +}+j-(s_0+j-1)\\&=1.\end{aligned}$$

则 $x_0+\tilde{f}(x_0,s_0)\Delta^+g(s_0)=x_0+I_j(x_0)\in B_c$。

综上，对每个$(x_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，有$x_0+\tilde{f}(x_0,s_0)\Delta^+g(s_0)\in B_c$。由引理 2.2 脉冲微分方程(1.3)的饱和解是存在唯一的。最后，(J1)，(J2)满足引理 2.3 的(U1)，(U2)，所以由引理 2.3 此定理结论得证。

推论 3.3 设$\Omega=R^n\times[t_0,+\infty)$，$f:R^n\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$I_j:R^n\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$\{\tau_j\}_{j\in Z_+}\subset[t_0,+\infty)$为递增正实数序列满足$\lim\limits_{j\to+\infty}=+\infty$。且$f$，$I_j$满足条件(B1)~(B3)，其中$B_c$用$R^n$代替。若存在函数$U:[t_0,+\infty)\times R^n\to R$和楔子$W_{ii}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$i=1,2,3$，满足(J1)，(J2)其中$B_c$用$R^n$代替。若$(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times R^n$。则$\omega(s_0,x_0)=+\infty$。并且当$t\to+\infty$时，$\|x(t,s_0,x_0)\|\to+\infty$。

证明 由引理2.7脉冲微分方程(1.3)等价于测度微分方程(2.3)。再由定理3.1 $\tilde{f},g$满足条件(A1)~(A4)。据定理 3.2 的证明可得对每个$(z_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，有$z_0+\tilde{f}(z_0,s_0)\Delta^+g(s_0)\in B_c$。则由引理 2.1 可知$F\in\mathcal{F}(\Omega,h)$，再由(2.1)式可得$\|F(x,t)-F(x,\tau_0)\|\le|h(t)-h(\tau_0)|$。因为$B_{cc}=\{x\in X\,\|x\|<c\}$，所以$x(t)\in N$，$N\subset B_c$为$R^n$中的闭集。综上，由引理 2.5 $\omega(s_0,x_0)=+\infty$。

下面证明当$t\to+\infty$时，$\|x(t,s_0,x_0)\|\to+\infty$。

令γ是正数满足$W_2(\gamma)=W_1(\|x_0\|)$这样的γ的存在性由W_2的连续性保证。由(J2)有函数$[s_0,\omega(s_0,x_0))\ni\mapsto V(t,x(t))$是不减的。则由(J1)对每个$t\in[s_0,\omega)$，有

$$W_2(\|x(t)\|)\ge V(t,x(t))\ge V(s_0,x(s_0))\ge W_1(\|x(s_0)\|)=W_2(\gamma). \tag{3.1}$$

因为W_2为递增函数，因此由(3.1)式有

$$\|x(t)\|\ge\gamma,\ \ t\in[s_0,+\infty).$$

另一方面，对每个$t\in[s_0,+\infty)$，由条件(J2)和(3.2)式有

$$\begin{aligned}V(t,x(t))&\ge V(s_0,x(s_0))+\int_{s_0}^t W_3(\|x(s)\|)\mathrm{d}l(s)\\&\ge V(s_0,x(s_0))+W_3(\gamma)(l(t)-l(s_0)).\end{aligned}$$

因此由(J1)及(3.3)式，对每个$t\in[s_0,+\infty)$，有

$$W_2(\|x(t)\|)\ge V(s_0,x(s_0))+W_3(\gamma)(l(t)-l(s_0)).$$

因为l是不减函数且满足$\lim\limits_{t\to+\infty}=+\infty$，所以由楔子的定义当$t\to+\infty$时，$\|x(t)\|\to+\infty$。

定理 3.4 设函数$f:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$I_j:B_c\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$\{\tau_j\}_{j\in Z_+}\subset[t_0,+\infty)$为递增正实数序列满足$\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j=+\infty$。且$f$，$I_j$满足条件(B1)~(B3)。假定对每个$(x_0,s_0)\in B_c\times[t_0,+\infty)$，$j\in Z_+$，有$x_0+I_j(x_0)\in B_c$。存在函数$U:[t_0,+\infty)\times B_c\to R$和楔子$W_i:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$i=1,2$，满足条件：

(K1) 对脉冲微分方程(1.3)的每个解$x:I\to B_c$有

$$|U(t,x(t))|\le W_1(\|x(t)\|),$$

其中$t\in I$，$I\subset[t_0,+\infty)$，I为非退化区间。

(K2) 对脉冲微分方程(1.3)的每个饱和解$x(t)=x(t,s_0,x_0)$，$(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$，函数$t\mapsto U(t,x(t))$在$[s_0,\omega(s_0,x_0))$上是正则的，有

$$U(t,x(t))-U(s,x(s))\le\int_s^t W_2(|U(\xi,x(\xi))|)\mathrm{d}l(\xi),$$

其中$t,s\in[s_0,\omega(s_0,x_0))$，$t\ge s$。$l:[s_0,+\infty)\to R$是不减函数满足$\lim\limits_{t\to+\infty}l(t)=+\infty$。

若$(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times B_c$使得$U(s_0,x_0)<0$，则$\omega(s_0,x_0)<\infty$。

证明 同定理3.2证明一样，由引理2.4此定理结论得证。

推论3.5 设$\Omega=R^n\times[t_0,+\infty)$。假定$f:R^n\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$I_j:R^n\times[t_0,+\infty)\to R^n$，$\{\tau_j\}_{j\in Z_+}\subset[t_0,+\infty)$为递增的正实数序列满足$\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j=+\infty$。且$f$，$I_j$满足条件(B1)~(B3)，其中$B_c$用$R^n$代替。若存在函数$U:[t_0,+\infty)\times R^n\to R$和楔子$W_i:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$i=1,2$，满足(K1)，(K2)，其中$B_c$用$R^n$代替。若$(s_0,x_0)\in[t_0,+\infty)\times R^n$使得$U(s_0,x_0)<0$，则$\omega(s_0,x_0)=+\infty$。并且当$t\to+\infty$时。$\|x(t,s_0,x_0)\|\to+\infty$。

证明 $\omega(s_0,x_0)=+\infty$的证明同推论3.3的证明一样。

下面证明当$t\to+\infty$时，$\|x(t,s_0,x_0)\|\to+\infty$。因为$\omega(s_0,x_0)=+\infty$，因此由条件(K1)和$W_1$的单调性有

$$|V(t,x(t))|\le W_1(\|x(t)\|)\le W_1(c),\ \ t\in[s_0,+\infty).$$

由条件(K2)有

$$V(t,x(t))-V(s_0,x(s_0))\le\int_{s_0}^{t}W_2(|V(\xi,x(\xi))|)\mathrm{d}l(\xi)\le 0.$$

对所有的$t\in[s_0,+\infty)$有

$$V(t,x(t))\le V(s_0,x(s_0))=V(s_0,x_0)<0,\ \ t\in[s_0,+\infty),$$

即

$$|V(t,x(t))|\ge|V(s_0,x(s_0))|>0,\ \ t\in[s_0,+\infty). \tag{3.4}$$

由(3.4)式及条件(K2)有

$$\begin{aligned}V(t,x(t))&\le V(s_0,x(s_0))-\int_{s_0}^{t}W_2(|V(s,x(s))|)\mathrm{d}l(s)\\&\le V(s_0,x(s_0))-\int_{s_0}^{t}W_2(|V(s_0,x(s_0))|)\mathrm{d}l(s)\\&=V(s_0,x(s_0))-W_2(|V(s_0,x(s_0))|)(l(t)-l(s_0))<0\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}|V(t,x(t))|&\ge -V(s_0,x(s_0))+W_2(|V(s_0,x(s_0))|)(l(t)-l(s_0))\\&>W_2(|V(s_0,x(s_0))|)(l(t)-l(s_0))\end{aligned}$$

因为l为不减函数且满足$\lim\limits_{t\to+\infty}l(t)=+\infty$，所以由楔子的定义当$t\to+\infty$时，$\|x(t)\|\to+\infty$。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761063)。

参考文献

[1] Bainov, D.D. Simeonvo, P.S. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore.

[2] Schwabik, Š. (1992) Generalized Ordinary Differential Equations. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/1875

[3] Borysenko, S.D. and Speranza, T. (2009) Impulsive Differential Systems: The Problem of Stability and Practical Stability. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **71**, 1843-1849. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.02.084

[4] Dishlieva, K.G. (2012) Continuous Dependence of the Solution of Impulsive Differential Equations on the Initial Con-

dition and Barrier Curves. *Act Mathematic Scientia*, **32**, 1035-1052. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(12)60077-0

[5] Li, X., Bohner, M. and Wang, C. (2015) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. *Automatica*, **52**, 173-178. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.11.009

[6] Gallegos, C.A., Henríquez, H.R. and Mesquita, J.G. (2019) Growth of Solution for Measure Differential Equations and Dynamic Equations and Dynamic Equations on Time Scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **479**, 941-962. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.06.059

[7] Fleury, M., Mesquita, J.G. and Slavík, A. (2020) Massera's Theorems for Various Types of Equations with Discontinuous Solutions. *Journal of Differential Equations*, **269**, 11667-11693. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.08.043

[8] Federson, M., Grau, R. and Mesquita, J.G. (2019) Prolongation of Solutions of Measure Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales. *Mathematische Nachrichten*, **292**, 22-55. https://doi.org/10.1002/mana.201700420