Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(8), 1517-1534
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.118171

二维色散Quasi-Geostrophic方程组的整体适定性

邵 溶

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: S18794790388@163.com

收稿日期：2021年7月10日；录用日期：2021年8月17日；发布日期：2021年8月24日

摘 要

本文研究一类二维色散 **quasi-geostrophic** 方程组初值问题的整体适定性。通过引进一类高低频具有不同正则性指标的混合型 **Besov** 空间，并通过建立相应的色散半群在其上的一致有界性估计，证明了该二维色散 **quasi-geostrophic** 方程组关于混合型临界 **Besov** 空间中一致小初值的整体适定性。

关键词

二维色散 **Quasi-Geostrophic** 方程组，混合型 **Besov** 空间，整体适定性

Global Well-Posedness of Two-Dimensional Dispersive Quasi-Geostrophic Equations

Rong Shao

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: S18794790388@163.com

Received: Jul. 10^{th}, 2021; accepted: Aug. 17^{th}, 2021; published: Aug. 24^{th}, 2021

文章引用: 邵溶. 二维色散Quasi-Geostrophic方程组的整体适定性[J]. 理论数学, 2021, 11(8): 1517-1534.
DOI: 10.12677/pm.2021.118171

Abstract

This paper is devoted to studying the global well-posedness of Cauchy problem for the two-dimensional dispersive quasi-geostrophic equations. By introducing a kind of Hybrid-Besov spaces with different regularity indices at high frequency and low frequency, and by establishing the uniformly bounded estimations of the corresponding dispersive operator semigroup on these new function spaces, the global well-posedness of the 2D dispersive quasi-geostrophic equations is obtained for uniformly small initial values in the critical functional framework.

Keywords

Two-Dimensional Dispersive Quasi-Geostrophic Equations, Hybrid-Besov Spaces, Global Well-Posedness

1. 前言

本文研究如下带色散外力项的二维 quasi-geostrophic 方程组 Cauchy 问题的整体适定性

$$\begin{cases} \partial_t\theta + u\cdot\nabla\theta + \nu|D|^\alpha\theta + Au_2 = 0, & (x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,\infty), \\ u = \mathcal{R}^\perp\theta = (-\mathcal{R}_2\theta, \mathcal{R}_1\theta), & (x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,\infty), \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), & x\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $0<\alpha\le 2$, 未知函数 $\theta(t,x)$ 表示流体的温度, 函数 $u=(u_1,u_2)$ 表示流体的速度场; θ_0 为给定的初始值; 正常数 ν 表示扩散系数, 正常数 A 表示色散参数; $\mathcal{R}_i=-\partial_i|D|^{-1}, i=1,2$ 为 Riesz 变换, 分数阶微分算子 $|D|^\alpha$ 定义为: $\widehat{|D|^\alpha f}(\xi)=|\xi|^\alpha\hat{f}(\xi)$, 其中 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换. 该方程组提供了一个二维框架下波与湍流运动相互作用的模型. 由于 $\alpha=1$ 的二维色散 quasi-geostrophic 方程组与三维旋转不可压缩 Navier-Stokes 方程组的相似性, 因此它可以视作三维 Navier-Stokes 方程的一个低维模型,关于方程组 (1.1) 更多物理背景介绍可参阅文献 [1].

当 $A=0$ 时, 方程组 (1.1) 退化为经典二维 quasi-geostrophic 方程组

$$\begin{cases} \partial_t\theta+u\cdot\nabla\theta+\nu|D|^\alpha\theta=0, & (x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,\infty),\\ u=\mathcal{R}^\perp\theta=(-\mathcal{R}_2\theta,\mathcal{R}_1\theta), & (x,t)\in\mathbb{R}^2\times(0,\infty),\\ \theta(0,x)=\theta_0(x), & x\in\mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.2}$$

根据尺度变换和 L^∞ 极大值原理, $\alpha>1,\alpha=1,\alpha<1$ 分别称为次临界情形, 临界情形和超临界情形, 见文献 [2,3]. 在次临界的情形下, Constantin 和 Wu [4–6] 证明了初值问题 (1.2) 光滑解的整体存在性. Wu [7–9] 分别在在 Lebesgue 空间, Morrey 空间以及齐次 Sobolev 空间中证明了初值问题 (1.2) 的整体适定性. 在临界情形下, Kiselev, Nazarov 和 Volberg [11] 提出了一种新的非局部极大值原理方法, 证明了关于空间周期光滑初值的整体适定性. 与此同时, Caffarelli 和 Vasseur [12] 从一个完全不同的方向, 通过充分运用 DeGiorgi 迭代方法, 建立了弱解的全局正则性. 值得一提的是, 在超临界的情形下, 初值问题 (1.2) 关于一般初值的整体适定性或者解是否全局正则仍然是公开的. 对于初值问题 (1.2) 关于临界空间中小初值的整体适定性以及整体弱解的条件正则性的更多研究结果, 可参阅文献 [13–19].

到目前为止, 对于二维色散 quasi-geostrophic 方程组初值问题 (1.1) 的研究结果相对较少. Kiselev 和 Nazarov [20] 运用 [11] 中的方法证明了当 $\alpha=1$ 时初值问题 (1.1) 关于任意空间周期光滑初值是整体正则的. 值得一提的是, 他们的工作不能推广至全空间的情形. 随后, Cannone, Miao 和 Xue [21] 证明了当 A 充分大时, 初值问题 (1.1) 的全局正则性. Wan 和 Chen [22] 证明了当 A 充分大, 且 ν 充分小时, 初值问题 (1.1) 光滑解的整体适定性. Elgindi 和 Widmayer [23] 利用时间衰减估计, 证明了当 $\nu=0$ 时, 初值问题 (1.1) 解大时间的存在性.

一个很自然的问题是能否在临界空间中获得二维色散 quasi-geostrophic 方程组 (1.2) 关于色散参数 A 一致小初值的整体适定性. 为此, 受文献 [24] 的启发, 本文通过充分开发方程组的结构特点, 引进一类高低频具有不同正则性指标的混合型 Besov 空间, 通过建立相应色散半群在其上的一致有界性估计, 并通过运用 Littlewood-Paley 理论和 Bony 仿积分解等调和分析的理论和方法以及结合不动点理论, 证明了二维色散 quasi-geostrophic 方程组 (1.1) 关于临界混合型 Besov 空间中一致小初值的整体适定性. 本文主要结果具体如下:

定理 1.1 设 $p\in[2,4]$, $\alpha\in(2-\frac{2}{p},2]$, 则存在与 A 无关的正常数 c, 使得若 $\|\theta_0\|_{\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}}\le c$, 问题 (1.1) 存在唯一的整体解

$$\theta\in C\big([0,\infty;\dot{B}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}\big)\cap\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})\cap\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1}).$$

本文的剩余部分组成如下: 第二节中, 我们将给出 Littlewood-Paley 理论的一些基本事实, 并给出色散半群 $\mathcal{G}^A(t)$ 的具体表达式以及有界性估计; 第三节中, 我们将运用 Bony 仿积分解理论等建立色散半群在混合型 Besov 空间上的线性和双线性估计; 最后, 我们给出了主要结果的证明.

在本文中, Fg 和 $\hat{g}$ 均表示 g 关于空间变量的傅里叶变换, F^{-1} 表示相应的傅里叶逆变换. $i=\sqrt{1}$. 我们用 C 表示一个绝对常数, 它的值可能随着位置的变化而变化.

2. 预备知识

首先, 我们将简单介绍 Littlewood-Paley 理论, 并给出混合型 Besov 空间以及相应的 Chemin-Lerner 空间的定义. 更多关于 Littlewood-Paley 理论和经典 Besov 空间的讨论, 可参阅专著 [24].

设 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ 为 Schwartz 空间, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ 为缓增广义函数空间. 选择径向函数 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ 使得 $\hat{\varphi},\hat{\psi}$ 满足下列性质:

$$\mathrm{supp}\ \hat{\varphi}\subset\mathcal{C}:=\{\xi\in\mathbb{R}^2:\frac{3}{4}\le|\xi|\le\frac{8}{3}\},$$

$$\mathrm{supp}\ \hat{\psi}\subset\mathcal{B}:=\{\xi\in\mathbb{R}^2:|\xi|\le\frac{4}{3}\},$$

且

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)=1\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}.$$

对任意的 $j\in\mathbb{Z}$, 令 $\varphi_j(x):=2^{2j}\varphi(2^jx),\psi_j(x):=2^{2j}\psi(2^jx)$, 定义频率局部化算子 Δ_j 和低频截断算子 S_j:

$$\Delta_jf:=\varphi_j*f,\quad S_jf=\psi_j*f,\quad\forall j\in\mathbb{Z},\ f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2).$$

令 $\mathscr{S}_h'(\mathbb{R}^2):=\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)/\mathcal{P}[\mathbb{R}^2]$, 其中 $\mathcal{P}[\mathbb{R}^2]$ 为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的全体多项式所构成的线性空间. 众所周知, 在 $\mathscr{S}_h'(\mathbb{R}^2)$ 中成立如下分解:

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jf,\quad S_jf=\sum_{k=-\infty}^{j-1}\Delta_kf.$$

此外, 由 $\hat{\varphi}$ 和 $\hat{\psi}$ 的支集性质, 容易验证频率局部化算子 Δ_j 和低频截断算子 S_j 满足如下的拟正交性:

$$\Delta_j\Delta_kf=0,\quad|j-k|\ge2;$$

$$\Delta_j(S_{k-1}f\Delta_kf)=0,\quad|j-k|\ge5.$$

运用 Bony 仿积分解 [25], 可得

$$fg=T_fg+T_gf+R(f,g),$$

其中

$$T_fg=\sum_{j\in\mathbb{Z}}S_{j-1}f\Delta_jg,\quad R(f,g)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jf\tilde{\Delta}_jg,\quad\tilde{\Delta}_jg=\sum_{|j'-j|\le1}\Delta_{j'}g.$$

定义 2.1 设 $s,\sigma\in\mathbb{R},\ 1\le p\le\infty$, 定义混合型 Besov 空间 :

$$\dot{\mathscr{B}}^{s,\sigma}_{2,p}:=\Big\{f\in\mathscr{S}_h'(\mathbb{R}^2):\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}:=\sup_{2^j\le A}2^{js}\|\Delta_jf\|_{L^2}+\sup_{2^j>A}2^{j\sigma}\|\Delta_jf\|_{L^p}<\infty\Big\}.$$

定义 2.2 设 $s,\sigma\in\mathbb{R}$, $1\le p,r\le+\infty$, 定义 Chemin-Lerner 空间：

$$\tilde{L}^r(0,\infty;\dot{B}^{s,\sigma}_{2,p}):=\Big\{f\in\mathscr{S}'((0,\infty)\times\mathbb{R}^2):\lim_{j\to-\infty}S_jf=0,$$
$$\|f\|_{\tilde{L}^r(0,\infty;\dot{B}^{s,\sigma}_{2,p})}=\sup_{2^j\le A}2^{js}\|\Delta_jf\|_{L^r(0,\infty;L^2)}+\sup_{2^j>A}2^{j\sigma}\|\Delta_jf\|_{L^r(0,\infty;L^p)}<\infty\Big\}.$$

引理 2.3 (Bernstein 不等式) [24] 设 $1\le p\le q\le+\infty$, 对任意的 $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^3$, 成立

1) $\mathrm{supp}\hat{f}\subseteq\{|\xi|\le A_02^j\}\Longrightarrow\|\partial^\gamma f\|_{L^q}\le C2^{j|\gamma|+jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}$,

2) $\mathrm{supp}\hat{f}\subseteq\{A_12^j\le|\xi|\le A_22^j\}\Longrightarrow\|f\|_{L^p}\le C2^{-j|\gamma|}\sup\limits_{|\beta|=|\gamma|}\|\partial^\beta f\|_{L^p}$.

下面, 我们给出问题 (1.1) 的等价积分方程.

$$\theta(t)=\mathcal{G}_A(t)\theta_0+\int_0^t\mathcal{G}^A(t-\tau)\nabla(\mathcal{R}^\perp\theta(\tau)\cdot\theta(\tau)).\tag{2.1}$$

其中 $\{\mathcal{G}^A(t)\}_{t\ge0}$ 为色散半群, 其具体表达式为

$$\mathcal{G}^A(t)f:=e^{iAt\frac{D_1}{|D|}}e^{\nu t|D|^\alpha}f=F^{-1}\Big[\cos\Big(A\frac{|\xi_1|}{|\xi|}t\Big)e^{-\nu|\xi|^\alpha t}\hat{f}(\xi)+i\sin\Big(A\frac{|\xi_1|}{|\xi|}t\Big)e^{-\nu|\xi|^\alpha t}\hat{f}(\xi)\Big].$$

最后, 我们给出色散半群 $\{\mathcal{G}^A(t)\}_{t\ge0}$ 的 L^p-L^p 估计.

引理 2.5 设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中以 0 为中心的环, 且 $\alpha\in[0,2]$, 则存在与 ν 有关的$c>0$, $C>0$, 使得若 $\mathrm{supp}\ \hat{\theta}_0\subset\lambda\mathscr{C}$, 成立

1) 对任意的 $\lambda>0$,

$$\|\mathcal{G}^A(t)\theta_0\|_{L^2}\le Ce^{-c\lambda^\alpha t}\|\theta_0\|_{L^2};\tag{2.2}$$

2) 对任意的 $\lambda\gtrsim A$ 和 $1\le p\le\infty$,

$$\|\mathcal{G}^A(t)\theta_0\|_{L^p}\le Ce^{-c\lambda^\alpha t}\|\theta_0\|_{L^p}.\tag{2.3}$$

证明 1) 结合 $\mathcal{G}^A$ 的表达式以及 Plancherel 定理, 可得

$$\big\|\mathcal{G}^A(t)\theta_0\big\|_{L^2}=\big\|\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi)\hat{\theta}_0(\xi)\big\|_{L^2}\le C\big\|e^{-c|\xi|^\alpha t}\hat{\theta}_0(\xi)\big\|_{L^2}\le Ce^{-c\lambda^\alpha t}\|\theta_0\|_{L^2}.$$

2) 结合 $\mathcal{G}^A$ 的表达式以及 Fourier 的性质, 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^A(t)f&=F^{-1}\Big[\cos\Big(A\frac{|\xi_1|}{|\xi|}t\Big)e^{-\nu|\xi|^\alpha t}\hat{f}(\xi)+i\sin\Big(A\frac{|\xi_1|}{|\xi|}t\Big)e^{-\nu|\xi|^\alpha t}\hat{f}(\xi)\Big]\\&=F^{-1}\Big[\Big(\cos\Big(A\frac{|\xi_1|}{|\xi|}t\Big)+i\sin\Big(A\frac{|\xi_1|}{|\xi|}t\Big)\Big)e^{-\nu|\xi|^\alpha t}\Big]*\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

下面, 我们证明 $\mathcal{G}^A(t)$ 的有界性. 设 $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2\backslash 0)$, 且在 $\mathscr{C}$ 附近等于1. 结合 θ_0 的支集性质, 定义

$$g(t,x) := F^{-1}\big[\phi(\lambda^{-1}\xi)\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi)\big](t,x)$$
$$= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi}\phi(\lambda^{-1}\xi)\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi)d\xi.$$

因此, 只需要证明

$$\big\|g(t,\cdot)\big\|_{L^1} \leq Ce^{-c\lambda^\alpha t}. \tag{2.4}$$

为了得到估计 (2.3), 我们将积分区域分为: $|x| \leq \lambda^{-1}$ 和 $|x| \geq \lambda^{-1}$ 来分别讨论.

首先, 存在 $C > 0$ 使得成立

$$\int_{|x|\leq\lambda^{-1}} \big|g(x,t)\big|dx \leq C\int_{|x|\leq\lambda^{-1}}\int_{\mathbb{R}^2} |\phi(\lambda^{-1}\xi)||\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi)|d\xi dx \leq Ce^{-c\lambda^\alpha t}. \tag{2.5}$$

此外, 定义算子 $L := x\cdot\frac{\nabla_\xi}{i|x|^2}$, 即成立 $L(e^{ix\xi}) = e^{ix\xi}$. 由分部积分公式, 可得

$$g(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} L^N(e^{ix\xi})\phi(\lambda^{-1}\xi)\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi)d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi}(L^*)^N[\phi(\lambda^{-1}\xi)\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi)]d\xi.$$

运用标准的求导运算以及数学归纳法, 容易证明存在 $C > 0$ 使得成立

$$|\partial^\gamma(e^{iAt\frac{\xi_1}{|\xi|}})| \leq C|\xi|^{-|\gamma|}(1+At)^{|\gamma|}$$

和

$$|\partial^\gamma(e^{-\nu|\xi|^\alpha t})| \leq C|\xi|^{-|\gamma|}e^{-\nu|\xi|^\alpha t}.$$

进而, 可得

$$\begin{aligned}
&\Big|(L^*)^N\big[\phi(\lambda^{-1}\xi)\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi)\big]\Big| \\
&\leq C|x|^{-N}\sum_{\substack{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha| \\ |\alpha|\leq N}} \lambda^{-N+|\alpha|}\Big|(\nabla^{N-|\alpha|}\phi)(\lambda^{-1}\xi)\partial^{\alpha_1}(e^{iAt\frac{\xi_1}{|\xi|}}) \\
&\qquad\qquad \times\partial^{\alpha_2}(e^{-\nu|\xi|^\alpha t}) \\
&\leq C|\lambda x|^{-N}\sum_{\substack{|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha| \\ |\alpha|\leq N}} \lambda^{|\alpha|}\big|(\nabla^{N-|\alpha|}\phi)(\lambda^{-1}\xi)\big||\xi|^{-|\alpha_1|-|\alpha_2|}e^{-\nu|\xi|^\alpha t}(1+At)^{|\alpha_1|}.
\end{aligned}$$

取 $N=3$, 对任意的 $\lambda \gtrsim A$, 成立

$$\left|(L^*)^3(\phi(\lambda^{-1}\xi)\hat{\mathcal{G}}^A(t,\xi))\right| \le C|\lambda x|^{-3}e^{-\nu|\xi|^\alpha t}.$$

因此, 成立

$$\int_{|x|\ge\lambda^{-1}}|g(x,t)|dx \le Ce^{-c\lambda^\alpha t}\lambda^2\int_{|x|\ge\lambda^{-1}}|\lambda x|^{-3}dx \le Ce^{-c\lambda^\alpha t}. \tag{2.6}$$

结合 (2.5) 和 (2.6) 即可得 (2.4) 成立. 这就完成了 (2.3) 式的证明.

3. 线性估计和乘积法则

引理 3.1 设 $s,\sigma\in\mathbb{R}$, $\alpha\in[0,2]$, $(p,q)\in[1,\infty]$. 则成立

1) 对任意的 $\theta\in\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s-\frac{\alpha}{q},\sigma-\frac{\alpha}{q}}$, $\|\mathcal{G}^A(t)\theta\|_{\tilde{L}^q(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s,\sigma})} \le C\|\theta\|_{\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s-\frac{\alpha}{q},\sigma-\frac{\alpha}{q}}}$,

2) 对任意的 $f\in\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s,\sigma})$, 成立

$$\Big\|\int_0^t\mathcal{G}^A(t-\tau)f(\tau)d\tau\Big\|_{\tilde{L}^q(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s+\frac{\alpha}{q},\sigma+\frac{\alpha}{q}})} \le C\|f\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s,\sigma})}.$$

证明 1) 由定义 2.2, 可知

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}^A(t)\theta\|_{\tilde{L}^q(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s,\sigma})} &= \sup_{2^j\le A}2^{js}\|\Delta_j(\mathcal{G}^A(t)\theta)\|_{L^q(0,\infty;L^2)}\\ &\quad+\sup_{2^j>A}2^{j\sigma}\|\Delta_j(\mathcal{G}^A(t)\theta)\|_{L^q(0,\infty;L^p)}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

首先, 运用引理 2.5, 可得

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_j(\mathcal{G}^A(t)(t)\theta)\right\|_{L^q(0,\infty;L^2)} &\le C\left\|e^{-c\lambda^\alpha t}\|\Delta_j\theta\|_{L^2}\right\|_{L^q(0,\infty)}\\ &\le C2^{-\frac{\alpha}{q}j}\|\Delta_j\theta\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

其次, 同理可得

$$\begin{aligned}\left\|\Delta_j(\mathcal{G}^A(t)\theta)\right\|_{L^q(0,\infty;L^p)} &\le C\left\|e^{-c\lambda^\alpha t}\|\Delta_j\theta\|_{L^p}\right\|_{L^q(0,\infty)}\\ &\le C2^{-\frac{\alpha}{q}j}\|\Delta_j\theta\|_{L^p}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

将 (3.2) 和 (3.3) 代入 (3.1), 即得

$$\left\|\mathcal{G}^A(t)\theta\right\|_{\tilde{L}^q(0,\infty;\mathscr{B}_{2,p}^{s,\sigma})} \le C\|\theta\|_{\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s-\frac{\alpha}{q},\sigma-\frac{\alpha}{q}}}.$$

2) 由定义 2.2, 可知

$$\Big\|\int_0^t \mathcal{G}^A(t-\tau)f(\tau)d\tau\Big\|_{\tilde{L}^q(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{s+\frac{\alpha}{q},\sigma+\frac{\alpha}{q}})}=\sup_{2^j\le A}2^{j(s+\frac{\alpha}{q})}\Big\|\Delta_j(\int_0^t \mathcal{G}^A(t-\tau)f(\tau)d\tau)\Big\|_{L^q(0,\infty;L^2)}$$
$$+\sup_{2^j>A}2^{j(\sigma+\frac{\alpha}{q})}\Big\|\Delta_j(\int_0^t \mathcal{G}^A(t-\tau)f(\tau)d\tau)\Big\|_{L^q(0,\infty;L^p)}. \tag{3.4}$$

首先, 运用 Minkowski 不等式, 引理 2.5 (2) 以及 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\Big\|\Delta_j\Big(\int_0^t \mathcal{G}^A(t-\tau)f(\tau)d\tau\Big)\Big\|_{L^q(0,\infty;L^2)}&\le C\Big\|\int_0^t\big\|\mathcal{G}^A(t-\tau)\Delta_jf(\tau)\big\|_{L^2}d\tau\Big\|_{L^q(0,\infty)}\\&\le C\Big\|\int_0^t e^{-2^{\alpha j}(t-\tau)}\big\|\Delta_jf(\tau)\big\|_{L^2}d\tau\Big\|_{L^q(0,\infty)}\\&\le C\Big\|e^{-2^{\alpha j}t}\Big\|_{L^q(0,\infty)}\Big\|\Delta_jf(\tau)\Big\|_{L^1(0,\infty;L^2)}\\&\le C2^{-\frac{\alpha}{q}j}\Big\|\Delta_jf\Big\|_{L^1(0,\infty;L^2)}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

其次, 同理可得

$$\begin{aligned}\Big\|\Delta_j\Big(\int_0^t \mathcal{G}^A(t-\tau)f(\tau)d\tau\Big)\Big\|_{L^q(0,\infty;L^p)}&\le C\Big\|\int_0^t\big\|\mathcal{G}^A(t-\tau)\Delta_jf(\tau)\big\|_{L^p}d\tau\Big\|_{L^q(0,\infty)}\\&\le C\Big\|\int_0^t e^{-c2^{\alpha j}(t-\tau)}\big\|\Delta_jf(\tau)\big\|_{L^p}d\tau\Big\|_{L^q(0,\infty)}\\&\le C\Big\|e^{-2^{\alpha j}t}\Big\|_{L^q(0,\infty)}\Big\|\Delta_jf(\tau)\Big\|_{L^1(0,\infty;L^p)}\\&\le C2^{-\frac{\alpha}{q}j}\Big\|\Delta_jf\Big\|_{L^1(0,\infty;L^p)}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

将 (3.5) 和 (3.6) 代入 (3.4), 即得证结论成立.

引理 3.2 设 $p\in[2,4]$,$\alpha\in(2-\frac{2}{p},2]$, $\mathcal{R}^\perp\theta,\theta\in\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})\cap\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})$, 则存在与 $A,\mathcal{R}^\perp\theta,\theta$ 无关的常数 C, 使得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}^\perp\theta\cdot\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{3-\alpha,\frac{2}{p}+2-\alpha})}\le& C\Big(\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\\&+\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\Big).\end{aligned}\tag{3.7}$$

证明 由 Bony 仿积可得,

$$\begin{aligned}\Delta_j\big((\mathcal{R}^\perp\theta)\theta\big)=&\sum_{|k-j|\le4}\Delta_j(S_{k-1}(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_k\theta)+\sum_{|k-j|\le4}\Delta_j(S_{k-1}\theta\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta))+\sum_{k\ge j-2}\Delta_j(\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\tilde{\Delta}_k\theta)\\:=&I_j+II_j+III_j.\end{aligned}$$

引入指标集 $J_j := \big\{(k',k) : |k-j| \le 4, k' \le k-2\big\}$. 则对 $2^j > A$, 容易看出

$$\begin{aligned}
\big\|I_j\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} &\le \sum_{J_j} \Big\|\Delta_j(\Delta_{k'}(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_k\theta)\Big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&\le \Big(\sum_{J_{j,ll}} + \sum_{J_{j,lh}} + \sum_{J_{j,hh}}\Big)\Big\|\Delta_j(\Delta_{k'}(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_k\theta)\Big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&:= I_{j,1} + I_{j,2} + I_{j,3},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_{j,ll} &= \big\{(k',k) \in J_j : 2^{k'} \le A, 2^k \le A\big\}, \\
J_{j,lh} &= \big\{(k',k) \in J_j : 2^{k'} \le A, 2^k > A\big\}, \\
J_{j,hh} &= \big\{(k',k) \in J_j : 2^{k'} > A, 2^k > A\big\}.
\end{aligned}$$

利用 Bernstein 不等式、Hölder 不等式以及算子 $\mathcal{R}^\perp$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)(1<p<\infty)$ 上有界可得

$$\begin{aligned}
I_{j,1} &\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,ll}} 2^{k'}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^\perp\theta)\big\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty)} 2^{2k(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} \\
&\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,ll}} 2^{k'(2-\alpha)}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^\perp\theta)\big\|_{L^\infty(0,\infty;L^2)} 2^{2k}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \\
&\le C\big\|\mathcal{R}^\perp\theta\big\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4}\sum_{k'\le k-2} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \\
&\le C\big\|\mathcal{R}^\perp\theta\big\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4} 2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \\
&\le C2^{-j(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}$$

同样的推理, 可见

$$\begin{aligned}
I_{j,2} &\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,lh}} 2^{k'}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^\perp\theta)\big\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty)}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,lh}} 2^{k'(2-\alpha)}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^\perp\theta)\big\|_{L^\infty(0,\infty;L^2)} 2^{k(\frac{2}{p}+1)}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \\
&\le C\big\|\mathcal{R}^\perp\theta\big\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{(k',k)\in J_{j,lh}} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \\
&\le C\big\|\mathcal{R}^\perp\theta\big\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4}\sum_{k'\le k-2} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \\
&\le C\big\|\mathcal{R}^\perp\theta\big\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4} 2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \\
&\le C2^{-j(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}$$

和

$$
\begin{aligned}
I_{j,3} &\le C\sum_{(k',k)\in J_{j,hh}} 2^{\frac{2}{p}k'}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^p)}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)}\\
&\le C\sum_{(k',k)\in J_{j,hh}} 2^{k'(\frac{2}{p}+1-\alpha)}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^p)}2^{k(\frac{2}{p}+1)}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)}2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\\
&\le C\big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^{1}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{(k',k)\in J_{j,hh}} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\\
&\le C\big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^{1}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{|k-j|\le 4}\sum_{k'\le k-2} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\\
&\le C\big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^{1}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{|k-j|\le 4} 2^{-k(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\\
&\le C2^{-j(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^{1}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}
$$

对于$2^j \le A$ 的情形, 利用正交性可见

$$
\begin{aligned}
\big\|I_j\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} &\le \sum_{J_j}\big\|\Delta_j(\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\Delta_k\theta)\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)}\\
&\le \Big(\sum_{J_{j,ll}}+\sum_{J_{j,lh}}+\sum_{J_{j,hh}}\Big)\big\|\Delta_j(\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\Delta_k\theta)\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)}\\
&:= I_{j,4}+I_{j,5}+I_{j,6}.
\end{aligned}
$$

利用 Bernstein 不等式、 Hölder 不等式以及算子 $\mathcal{R}^{\perp}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ $(1<p<\infty)$ 上有界可得

$$
\begin{aligned}
I_{j,4} &\le C\sum_{(k',k)\in J_{j,ll}} 2^{k'}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^2)}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)}\\
&\le C\sum_{(k',k)\in J_{j,ll}} 2^{k'(2-\alpha)}\big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^2)}2^{2k}\big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)}2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(3-\alpha)}\\
&\le C\big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^{1}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{|k-j|\le 4}\sum_{k'\le k-2} 2^{(\alpha-1)(k'-k)}2^{-k(3-\alpha)}\\
&\le C\big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^{1}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{|k-j|\le 4} 2^{-k(3-\alpha)}\\
&\le C2^{-j(3-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^{1}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}
$$

注意到当 $p \le 4$ 且 $\frac{2}{p}+2-\alpha>0$ 时, 成立

$$
\begin{aligned}
I_{j,5} &\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,lh}} \big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^{\frac{2p}{p-2}})} \big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,lh}} 2^{\frac{2k'}{p}} \big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^2)} \big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} \\
&\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,lh}} 2^{k'(2-\alpha)} \big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^2)} 2^{k(\frac{2}{p}+1)} \big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} 2^{(k'-k)(\frac{2}{p}+\alpha-2)} 2^{-k(3-\alpha)} \\
&\le C \big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4} \sum_{k'\le k-2} 2^{(k'-k)(\frac{2}{p}+\alpha-2)} 2^{-k(3-\alpha)} \\
&\le C \big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4} 2^{-k(3-\alpha)} \\
&\le C 2^{-j(3-\alpha)} \|\theta\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
I_{j,6} &\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,hh}} \big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^{\frac{2p}{p-2}})} \big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,hh}} 2^{2k'(\frac{2}{p}-\frac{1}{2})} \big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^p)} \big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&\le C \sum_{(k',k)\in J_{j,hh}} 2^{k'(\frac{2}{p}+1-\alpha)} \big\|\Delta_{k'}(\mathcal{R}^{\perp}\theta)\big\|_{L^{\infty}(0,\infty;L^p)} 2^{k(\frac{2}{p}+1)} \big\|\Delta_k\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} 2^{(k'-k)(\frac{2}{p}+\alpha-2)} 2^{-k(3-\alpha)} \\
&\le C \big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4} \sum_{k'\le k-2} 2^{(k'-k)(\frac{2}{p}+\alpha-2)} 2^{-k(3-\alpha)} \\
&\le C \big\|\mathcal{R}^{\perp}\theta\big\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \big\|\theta\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{|k-j|\le 4} 2^{-k(3-\alpha)} \\
&\le C 2^{-j(3-\alpha)} \|\theta\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}
$$

因此, 结合 $I_{j,1} \sim I_{j,6}$ 的估计, 可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{2^j\le 1} 2^{j(3-\alpha)} \|I_j\|_{L^1(0,\infty;L^2)} + \sup_{2^j>1} 2^{(\frac{2}{p}+2-\alpha)j} \|I_j\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&\le C \|\theta\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

类似可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{2^j\le 1} 2^{j(3-\alpha)} \|II_j\|_{L^1(0,\infty;L^2)} + \sup_{2^j>1} 2^{(\frac{2}{p}+2-\alpha)j} \|II_j\|_{L^1(0,\infty;L^p)} \\
&\le C \|\theta\|_{\tilde{L}^{\infty}(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

令 $K_j := \{(k,k') : k \geq j-3, |k'-k| \leq 1\}$.

$$III_j = \Big(\sum_{K_{j,ll}} + \sum_{K_{j,lh}} + \sum_{K_{j,hl}} + \sum_{K_{j,hh}}\Big)\Delta_j(\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta)$$
$$:= III_{j,1} + III_{j,2} + III_{j,3} + III_{j,4},$$

其中

$$K_{j,ll} = \big\{(k,k') \in K_j : 2^k \leq A, 2^{k'} \leq A\big\},$$
$$K_{j,lh} = \big\{(k,k') \in K_j : 2^k \leq A, 2^{k'} > A\big\},$$
$$K_{j,hl} = \big\{(k,k') \in K_j : 2^k > A, 2^{k'} \leq A\big\},$$
$$K_{j,hh} = \big\{(k,k') \in K_j : 2^k > A, 2^{k'} > A\big\}.$$

利用 Bernstein 不等式、 Hölder 不等式以及算子 $\mathcal{R}^\perp$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ $(1 < p < \infty)$ 上有界可得

$$\begin{aligned}
\big\|III_{j,1}\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} &\leq C2^{2j(1-\frac{1}{p})} \sum_{(k,k')\in K_{j,ll}} \big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^1)} \\
&\leq C2^{2j(1-\frac{1}{p})} \|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{(k,k')\in K_{j,ll}} 2^{-k(2-\alpha)}2^{-2k'} \\
&\leq C2^{2j(1-\frac{1}{p})} \|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{k\geq j-3} 2^{-k(2-\alpha)} \sum_{|k-j|\leq 1} 2^{-2k'} \\
&\leq C2^{2j(1-\frac{1}{p})} \|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{k\geq j-3} 2^{-k(2-\alpha)}2^{-2k} \\
&\leq C2^{-j(\frac{2}{p}+2-\alpha)} \|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
\big\|III_{j,1}\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} &\leq C2^{2j(1-\frac{1}{2})} \sum_{(k,k')\in K_{j,ll}} \big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^1)} \\
&\leq C2^j \sum_{(k,k')\in K_{j,ll}} 2^{k(2-\alpha)}\big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\big\|_{L^\infty(0,\infty;L^2)} 2^{2k'}\big\|\Delta_{k'}\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} 2^{-k(2-\alpha)}2^{-2k'} \\
&\leq C2^j \|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{k\geq j-3} 2^{-k(2-\alpha)} \sum_{|k-k'|\leq 1} 2^{-2k'} \\
&\leq C2^j \|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})} \sum_{k\geq j-3} 2^{-k(2-\alpha)}2^{-2k} \\
&\leq C2^{-j(3-\alpha)} \|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})} \|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}$$

类似地, 直接推出

$$
\begin{aligned}
\left\|III_{j,2}\right\|_{L^1(0,\infty;L^p)} &\le C2^j \sum_{(k,k')\in K_{j,lh}\cup K_{j,hl}} \left\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\right\|_{L^1(0,\infty;L^{\frac{2p}{2+p}})}\\
&\le C2^j \sum_{K_{j,lh}} 2^{k(2-\alpha)}\left\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\right\|_{L^\infty(0,\infty;L^2)} 2^{k'(\frac{2}{p}+1)}\left\|\Delta_{k'}\theta\right\|_{L^1(0,\infty;L^p)} 2^{-k(2-\alpha)}2^{-k'(\frac{2}{p}+1)}\\
&\le C2^j\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(2-\alpha)}\sum_{|k-k'|\le 1}2^{-k'(\frac{2}{p}+1)}\\
&\le C2^j\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(2-\alpha)}2^{-k(\frac{2}{p}+1)}\\
&\le C2^{-j(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\left\|III_{j,2}\right\|_{L^1(0,\infty;L^2)} &\le C2^{\frac{2}{p}j} \sum_{(k,k')\in K_{j,lh}} \left\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\right\|_{L^1(0,\infty;L^{\frac{2p}{2+p}})}\\
&\le C2^{\frac{2}{p}j}\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(2-\alpha)}\sum_{|k-k'|\le 1}2^{-k'(\frac{2}{p}+1)}\\
&\le C2^{\frac{2}{p}j}\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(2-\alpha)}2^{-k(\frac{2}{p}+1)}\\
&\le C2^{-j(3-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}
$$

利用 Bernstein 不等式、 Hölder 不等式以及算子 $\mathcal{R}^\perp$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ $(1<p<\infty)$ 上有界可得

$$
\begin{aligned}
\left\|III_{j,3}\right\|_{L^1(0,\infty;L^p)} &\le C2^j \sum_{(k,k')\in K_{j,hl}} \left\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\right\|_{L^1(0,\infty;L^{\frac{2p}{2+p}})}\\
&\le C2^j \sum_{K_{j,hl}} 2^{k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}\left\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\right\|_{L^\infty(0,\infty;L^p)} 2^{2k'}\left\|\Delta_{k'}\theta\right\|_{L^1(0,\infty;L^2)} 2^{-k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}2^{-2k'}\\
&\le C2^j\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}\sum_{|k-k'|\le 1}2^{-2k'}\\
&\le C2^j\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-2k}2^{-k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}\\
&\le C2^{-j(\frac{2}{p}+2-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.
\end{aligned}
$$

和

$$\begin{aligned}\big\|III_{j,3}\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} &\le C2^{\frac{2}{p}j}\sum_{(k,k')\in K_{j,hl}}\big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^{\frac{2p}{2+p}})}\\ &\le C2^{\frac{2}{p}j}\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}\sum_{|k-k'|\le 1}2^{-2k'}\\ &\le C2^{\frac{2}{p}j}\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-2k}2^{-k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}\\ &\le C2^{-j(3-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.\end{aligned}$$

注意到 $2\le p\le 4$, 可得

$$\begin{aligned}\big\|III_{j,4}\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)} &\le C\sum_{(k,k')\in K_{j,hh}}\big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^{\frac{p}{2}})}\\ &\le C2^{\frac{2}{p}j}\sum_{(k,k')\in K_{j,hh}}\big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\big\|_{L^\infty(0,\infty;L^p)}\big\|\Delta_{k'}v\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)}\\ &\le C2^{\frac{2}{p}j}\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}2^{-k(\frac{2}{p}+1)}\\ &\le C2^{-j(\frac{2}{p}+1-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big\|III_{j,4}\big\|_{L^1(0,\infty;L^2)} &\le C2^{2j(\frac{2}{p}-\frac{1}{2})}\sum_{(k,k')\in K_{j,hh}}\big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\Delta_{k'}\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^{\frac{p}{2}})}\\ &\le C2^{2j(\frac{2}{p}-\frac{1}{2})}\sum_{(k,k')\in K_{j,hh}}\big\|\Delta_k(\mathcal{R}^\perp\theta)\big\|_{L^\infty(0,\infty;L^p)}\big\|\Delta_{k'}\theta\big\|_{L^1(0,\infty;L^p)}\\ &\le C2^{j(\frac{4}{p}-1)}\|\mathcal{R}^\perp\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}\sum_{k\ge j-3}2^{-k(\frac{2}{p}+1-\alpha)}2^{-k(\frac{2}{p}+1)}\\ &\le C2^{-j(3-\alpha)}\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.\end{aligned}$$

综合 $III_{j,1}\sim III_{j,4}$ 的估计, 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{2^j\le 1}2^{j(3-\alpha)}\|III_j\|_{L^1(0,\infty;L^2)}+\sup_{2^j>1}2^{(\frac{2}{p}+2-\alpha)j}\|III_j\|_{L^1(0,\infty;L^p)}\\ &\le C\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

结合 (3.8) ∼ (3.10) 即得 (3.7) 成立.

4. 定理 1.1 的证明

引理 4.1 ([26]) 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 为 Banach 空间. 设 $B: X\times X\to X$ 为双线性算子, 且满足对任意的 $x_1, x_2\in X$, 存在常数 $\eta>0$, 使得 $\|B(x_1,x_2)\|_X\le \eta\|x_1\|_X\|x_2\|_X$. 如果 $0<\varepsilon<\frac{1}{4\eta}$ 且 $y\in X$ 满足 $\|y\|_X\le\varepsilon$, 则方程 $x=y+B(x,x)$ 在 X 中存在唯一解, 且满足 $\|x\|_X\le 2\varepsilon$.

定理 1.1 的证明. 定义 Banach 空间 X 为

$$X=\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}(\mathbb{R}^2))\cap\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2)),$$

并在其上赋予范数

$$\|\theta\|_X:=\|\theta\|_{\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})}+\|\theta\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})}.$$

定义

$$B(\theta,\theta)(t):=\int_0^t\mathcal{G}^A(t-\tau)\nabla[\mathcal{R}^\perp\theta(\tau)\cdot\theta(\tau)]d\tau.$$

由引理 3.1 (2) 和引理 3.2 可知, 对任意的 $\theta\in X$, 存在常数 $C_1\ge 0$, 可得

$$\begin{aligned}\big\|B(\theta,\theta)\big\|_X&=\Big\|\int_0^t\mathcal{G}^A(t-\tau)\nabla[\mathcal{R}^\perp\theta(\tau)\cdot\theta(\tau)]d\tau\Big\|_X\\&\le C_1\big\|[\mathcal{R}^\perp\theta(\tau)\cdot\theta(\tau)]\big\|_{\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{3-\alpha,\frac{2}{p}+2-\alpha})}\\&\le C_1\|\theta\|_X\|\theta\|_X.\end{aligned}$$

并且, 由引理 3.1 (1) 又可知, 对任意的 $\theta_0\in\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}$, 存在常数 $C_0>0$ 使得

$$\|\mathcal{G}^A(t)\theta_0\|_X\le C_0\|\theta_0\|_{\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}}.$$

因此, 由引理 4.1 可得, 对任意的 $0\le\epsilon\le\frac{1}{4C_1}$ 以及任意满足 $\|\theta_0\|_{\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}}\le\frac{\epsilon}{C_0}$ 的 $\theta_0\in\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}$, 方程 (2.1) 在 X 中存在一个唯一解 $\theta\in\tilde{L}^\infty(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha})\cap\tilde{L}^1(0,\infty;\dot{\mathscr{B}}_{2,p}^{2,\frac{2}{p}+1})$ 且 $\|\theta\|_X\le 2\epsilon$. 此外, 由标准的稠密性讨论, 可进一步证明 $\theta\in C\big(0,\infty;\dot{B}_{2,p}^{2-\alpha,\frac{2}{p}+1-\alpha}\big)$. 这就完成了定理 1.1 的证明.

参考文献

[1] Held, I., Pierrehumbert, R., Garner, S. and Swanson, K.L. (2006) Surface Quasi-Geostrophic Dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, **282**, 1-20. https://doi.org/10.1017/S0022112095000012

[2] Constantin, P., Majda, A.J. and Tabak, E. (2015) Formation of Strong Fronts in the 2-D Quasigeostrophic Thermal Active Scalar. *Nonlinearity*, **7**, 1495-1533. https://doi.org/10.1088/0951-7715/7/6/001

[3] Pedlosky, J. (1987) Geophysical Fluid Dynamics. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4650-3

[4] Chen, Q.L., Miao, C.X. and Zhang, Z.F. (2007) A New Bernstein's Inequality and 2D Dissipative Quasi-Geostrophic Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **271**, 821-838. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0193-7

[5] Cordoba, D. (1998) Nonexistence of Simple Hyperbolic Blow-Up for the Quasi-Geostrophic Equation. *Annals of Mathematics*, **148**, 1135-1152. https://doi.org/10.2307/121037

[6] Constantin, P. and Wu, J.H. (1999) Behavior of Solutions of 2D Quasi-Geostrophic Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **30**, 937-948. https://doi.org/10.1137/S0036141098337333

[7] Wu, J. (1997) Quasi-Geostrophic-Type Equations with Initial Data in Morrey Spaces. *Nonlinearity*, **10**, 1409-1420. https://doi.org/10.1088/0951-7715/10/6/002

[8] Wu, J. (1998) Quasi-Geostrophic Type Equations with Weak Initial Data. *Electronic Journal of Differential Equations*, **1998**, 1-10.

[9] Wu, J. (2001) Dissipative Quasi-Geostrophic Equations with L^p Data. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2001**, 1-13.

[10] Constantin, P., Cordoba, D. and Wu, J. (2001) On the Critical Dissipative Quasi-Geostrophic Equation. *Indiana University Mathematics Journal*, **50**, 97-108. https://doi.org/10.1512/iumj.2001.50.2153

[11] Kiselev, A., Nazarov, F. and Volberg, A. (2007) Global Well-Posedness for the Critical 2D Dissipative Quasi-Geostrophic Equation. *Inventiones Mathematicae*, **167**, 445-453. https://doi.org/10.1007/s00222-006-0020-3

[12] Caffarelli, L. and Vasseur, V. (2010) Drift Diffusion Equations with Fractional Diffusion and the Quasi-Geostrophic Equation. *Annals of Mathematics*, **171**, 1903-1930. https://doi.org/10.4007/annals.2010.171.1903

[13] Chae, D. and Lee, J. (2004) Global Well-Posedness in the Super-Critical Dissipative Quasi-Geostrophic Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **249**, 511-528.

[14] Ju, N. (2004) Existence and Uniqueness of the Solution to the Dissipative 2D Quasi-Geostrophic Equations in the Sobolev Space. *Communications in Mathematical Physics*, **251**, 365-376. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1062-2

[15] Wu, J. (2004) Global Solutions of the 2D Dissipative Quasi-Geostrophic Equation in Besov Spaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **36**, 1014-1030. https://doi.org/10.1137/S0036141003435576

[16] Wu, J. (2005) The Two-Dimensional Quasi-Geostrophic Equation with Critical or Supercritical Dissipation. *Nonlinearity*, **18**, 139-154. https://doi.org/10.1088/0951-7715/18/1/008

[17] Dabkowski, M. (2011) Eventual Regularity of the Solutions to the Supercritical Dissipative Quasi-Geostrophic Equation. *Geometric and Functional Analysis*, **21**, 1-13. https://doi.org/10.1007/s00039-011-0108-9

[18] Dong, H. (2010) Dissipative Quasi-Geostrophic Equations in Critical Sobolev Spaces: Smoothing Effect and Global Well-Posedness. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **26**, 1197-1211. https://doi.org/10.3934/dcds.2010.26.1197

[19] Hmidi, T. and Keraani, S. (2007) Global Solutions of the Super-Critical 2D Quasi-Geostrophic Equation in Besov Spaces. *Advances in Mathematics*, **214**, 618-638. https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.02.013

[20] Kiselev, A. and Nazarov, F. (2010) Global Regularity for the Critical Dispersive Dissipative Surface Quasi-Geostrophic Equation. *Nonlinearity*, **23**, 549-554. https://doi.org/10.1088/0951-7715/23/3/006

[21] Cannone, M., Miao, C. and Xue, L. (2013) Global Regularity for the Supercritical Dissipative Quasi-Geostrophic Equation with Large Dispersive Forcing. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **106**, 650-674. https://doi.org/10.1112/plms/pds046

[22] Wan, R.H. and Chen, J.C. (2017) Global Well-Posedness of Smooth Solution to the Supercritical SQG Equation with Large Dispersive Forcing and Small Viscosity. *Nonlinear Analysis*, **164**, 54-66.

[23] Elgindi, T.M. and Widmayer, K. (2015) Sharp Decay Estimates for an Anisotropic Linear Semigroup and Applications to the Surface Quasi-Geostrophic and Inviscid Boussinesq Systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **47**, 4672-4684. https://doi.org/10.1137/14099036X

[24] Danchin, R. (2001) Global Existence in Critical Spaces for Flows of Compressible Viscous and Heat-Conductive Gases. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **160**, 1-39. https://doi.org/10.1007/s002050100155

[25] Bony, J.-M. (1981) Symbolic Calculus and Propagation of Singularities for Nonlinear Partial Differential Equations. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **14**, 209-246. https://doi.org/10.24033/asens.1404

[26] Cannone, M. (2004) Harmonic Analysis Tools for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equations. In: *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, Vol. 3, Elsevier, Amsterdam, 161-244. https://doi.org/10.1016/S1874-5792(05)80006-0