Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(10), 1752-1756
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110197

2-弧传递基图的一些零散构造

凌　波

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2021年9月12日；录用日期：2021年10月14日；发布日期：2021年10月21日

摘　要

本文主要给出一些2-弧传递基图的例子构造，包括一些零散的PA型2-弧传递基图和一个AS型2-弧传递基图。

关键词

2-弧传递图，PA型图，自同构群，AS型图

Some Sporadic Constructions of 2-Arc Transitive Base Graphs

Bo Ling

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Sep. 12th, 2021; accepted: Oct. 14th, 2021; published: Oct. 21st, 2021

Abstract

This paper gives some examples of 2-arc transitive base graphs, including some sporadic PA type 2-arc transitive base graphs and an AS type 2-arc transitive base graph.

Keywords

2-Arc-Transitive Graph, Graph of PA Type, Automorphism Group, Graph of AS Type

文章引用: 凌波. 2-弧传递基图的一些零散构造[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1752-1756.
DOI: 10.12677/pm.2021.1110197

1. 引言

在群与图的研究领域中，2-弧传递图是学者们研究得比较多的组合对象，尤其是当 Praeger 在 1992 年做了一项非常重要的工作之后，人们对其的研究变得更为活跃。Praeger [1]将本原群的 O'Nan-Scott 定理推广到了拟本原的情形，证明了有限拟本原群为下面 8 种类型之一：CD，SD，HC，HS，HA，AS，TW，PA。并且证明了每一个拟本原$(G,2)$-弧传递图，G 必为其中的 4 种类型：HA，AS，TW，PA。

进而，对非二部 2-弧传递图的分类工作可以通过下面两个步骤来进行：

(1) 构造全部拟本原 2-弧传递图；

(2) 对(1)中图构造满足 2-弧传递的覆盖图。

我们有时候称(1)中的图为“基本”图，它们一共有 4 种类型，其中的 HA，AS，TW 这三种类型在 1993 年就已经构造出大量的例子来了。例如，HA 型由 Ivanov 和 Praeger [2]在 1992 年完全分类，AS 型的例子由方新贵，Praeger 等人在文献[3] [4]中大量构造，而 TW 型由 Badderley [5]在 1993 年给出了一些刻画的结果和例子的构造。然而，PA 型的例子似乎是难以构造的，其存在性问题在 2006 年才由李才恒和 A. Seress 在文献[6]中解决。

因此，一件十分有必要的工作将是构造或者刻画 2-弧传递基图。本文的主要工作将是构造一些 AS 型或者 PA 型的 2-弧传递基图。

2. 预备知识

在这节给出一些基本定义和若干预备的结果。

设 G 是作用在 Ω 上的有限传递置换群。我们称 G 是拟本原的，如果 G 的每一个非平凡正规子群在 Ω 上的作用是传递的。设 X 是作用在 Ω 上的拟本原置换群，$N=Soc(X)$。则 $N=T_1\times\cdots\times T_k=T^k$，其中 $k\ge 1$，T 是单群。由文献[1]，X 至多包含两个极小正规子群。

(1) 假设 X 包含两个极小正规子群，即 $N=L\times M$，其中 $L\cong M\cong T^m$ 是 X 的两个极小正规子群。

(i) 称 X 是 HS 型的：如果 $M=L$，$\hat{T}\times\check{T}\le X\le\hat{T}:Aut(T)$，$Inn(T)\le X_1\le Aut(T)$。

(ii) 称 X 是 HC 型的：如果 $M=T^m\ (m\ge 2)$，$\hat{M}\times\check{M}\le X\le(\hat{M}\times\check{M})\cdot Out(T)wrS_m$，$Inn(M)\le X_1\le Aut(M)$。

(2) 假设 X 包含唯一的一个极小正规子群 N。则：

(i) 称 X 是 HA 型的：如果 $\hat{N}\lhd X\le\hat{N}:Aut(N)\cong Z_p^d:GL(d,p)=AGL(d,p)$。

(ii) 称 X 是 AS 型的：如果 $N=T$，$T\le X\le Aut(T)$。

(iii) 称 X 是 TW 型的：如果 N 在 Ω 上的作用是正则的。

(iv) 称 X 是 SD 型的：如果 N 包含一个正规子群 $L\cong T^{k-1}$ 作用在 Ω 上是正则的，$N_v\cong T$。

(v) 称 X 是 CD 型的：如果 N 包含一个正则正规子群 $L\cong T^m$，$m\le k-2$，$N_v\cong T^{k-m}$。

(vi) 称 X 是 PA 型的：如果 $N_v\ne 1$，N 不包含正规子群作用在 Ω 上正则。

如果 X 是 PA 型的，则由文献[6]，X 具有以下性质：

(1) $N=T^k<G<HwrS_k<Sym(\Delta)wrS_k$，$k>1$，$T$ 是有限非交换单群，H 是作用在 Δ 上的型为 AS 的

拟本原置换群并且其基柱 T 非正则；

(2) 取元素 $v\in\Delta$，设 $R=T_v$。则 $1<R<T$ 并且存在 Ω 的一个 G-不变划分 Ω' 使得对于 $w\in\Omega'$，$N_v=R^k$ 以及 $\alpha\in w$， N_α 是 R_v 的次直积。

Praeger 在文献[1]中，把拟本原置换群分成以上定义的 8 类，即下面的引理：

引理 2.1 设 X 为作用在 Ω 上的拟本原置换群，则 X 必为如下 8 种类型之一：HA 型，HS 型，HC 型，AS 型，TW 型，SD 型，CD 型以及 PA 型。■

设 X 为有限群，H 为 X 的无核子群。对于 $g\in X-H$ 满足 $g^2\in H$， 定义陪集 $\Gamma=Cos(X,H,g)$ 为：

$$V\Gamma:=[X:H],\quad E\Gamma:=\{(Hx,Hdx)\mid d\in HgH\}.$$

考虑 X 在右陪集 $[X:H]$ 上的右乘作用，则作用忠实且保边。因而， $X\le Aut\Gamma$。通过定义容易证明：Γ 为 X-弧传递图；Γ 连通当且仅当 $\langle H,g\rangle=X$； $val\Gamma=\left|H:H\cap H^g\right|$。记顶点 H，Hg 分别为 α， β。则点稳定子 $X_\alpha=H$， $X_\beta=H^g$，弧稳定子 $X_{\alpha\beta}=X_\alpha\cap X_\beta=H\cap H^g$。

为了方便我们写成下面的引理。其由陪集图的定义是容易证明的，在此省略证明过程。

引理 2.2 令 $\Gamma=Cos(X,H,g)$。则 Γ 是 G-弧传递图且下列结论成立：

(1) $val\Gamma=\left|H:H\cap H^g\right|$；

(2) Γ 是无向图当且仅当存在一个 2-元素 $g\in G-H$ 使得 $g^2\in H$；

(3) Γ 是连通图当且仅当 $\langle H,g\rangle=G$。

(4) 如果 G 包含一个子群 R 作用在图 $Cos(G,H,g)$ 的顶点集上正则，则 $Cos(G,H,g)\cong Cay(R,S)$，其中 $S=R\cap HgH$。

反之，每一个 G-弧传递图 Σ 都同构于一个陪集图 $Cos(G,G_v,g)$，其中 $g\in N_G(G_{vw})$ 是一个 2-元素使得 $g^2\in G_v$， $v\in V\Sigma$， $w\in\Sigma(v)$。■

对于一个图 Γ，容易证明 Γ 是 $(G,2)$-弧传递的当且仅当 $G\le Aut\Gamma$ 在顶点集合上传递且 $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ 在 $\Gamma(\alpha)$ 上是 2-传递的。

对更一般的 G-弧传递图，下面的引理([6]，引理 2.2)告诉我们怎么通过群 G 去寻找一些图自同构。

引理 2.3 设 $\Gamma=Cos(G,G_\alpha,G_\alpha gG_\alpha)$ 是一个 G-弧传递图，$L=N_{Sym(V\Gamma)}(G)$，其中 $\alpha\in V\Gamma$。则 $t\in L_\alpha$ 是 Γ 的一个图自同构当且仅当 $(G_\alpha gG_\alpha)^t=G_\alpha gG_\alpha$。■

3. 例子的构造

在这一节中，构造一些 AS 型或者 PA 型的例子。首先，下面的几个例子是 X 为 PA 型的。

构造 3.1 设 $G=A_7^2\le S_{14}$ 是自然的作用在 $\Omega=\{1,2,\cdots,14\}$ 上的置换群。令：

$$h=(3\ 7\ 4\ 5\ 6)(10\ 11\ 13\ 14\ 12),$$

$$g=(1\ 5)(2\ 6)(8\ 13)(9\ 12).$$

则 $\langle h,g\rangle=G=A_7^2$。设 $H=\langle h\rangle\cong Z_5$，定义陪集图： $\Gamma=Cos(G,H,HgH)$。■

引理 3.4 在构造 3.1 中的图 $\Gamma=Cos(G,H,HgH)$ 是 5 度 $(X,2)$-弧传递， $(G,1)$-正则图，其中 $G\lhd X$， $X=A_7^2:Z_4$ 是作用在 $V\Gamma$ 的 PA 型拟本原群。

证明： 显然 Γ 是 5 度的。令 $\tau=(1\ 8\ 2\ 9)(3\ 11\ 4\ 10)(5\ 13\ 6\ 12)(7\ 14)$。则有：

$$\tau^2=(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(8\ 9)(10\ 11)(12\ 13),$$

$$g^{\tau}=(8\ 13)(9\ 12)(2\ 6)(1\ 5)=g,$$

$$h^{\tau}=(11\ 14\ 10\ 13\ 12)(3\ 4\ 6\ 7\ 5)=h^2.$$

因此，$(HgH)^{\tau}=HgH$，由引理 2.3，$\tau\in Aut\Gamma$。令 $X=\langle G,\tau\rangle$。则 $X=G:\langle\tau\rangle=A_7^2:Z_4\le Aut\Gamma$。此外，$X$ 是作用在 $V\Gamma$ 的 PA 型拟本原群，其中 $X_\alpha=H\cdot\langle\tau\rangle\cong AGL(1,5)$。显然，$G\lhd X$ 在 Γ 的弧集合上正则。■

构造 3.2 设 $G=A_8^2\le S_{16}$ 是自然作用在 $\Omega=\{1,2,\cdots,16\}$ 上的置换群。令：

$$h=(1\ 6\ 8\ 5\ 2)(9\ 13\ 14\ 10\ 16),$$

$$g=(1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 12)(10\ 11)(13\ 14)(15\ 16).$$

则 $\langle h,g\rangle=G=A_8^2$。设 $H=\langle h\rangle\cong Z_5$，定义陪集图：$\Gamma=Cos(G,H,HgH)$。■

引理 3.5 在构造 3.2 中的图 $\Gamma=Cos(G,H,HgH)$ 是 5 度 $(X,2)$-弧传递，$(G,1)$-正则图，其中 $G\lhd X$，$X=A_8^2:Z_4$ 是作用在 $V\Gamma$ 的 PA 型拟本原群。

证明： 显然 Γ 是一个连通 5 度 $(G,1)$-弧正则图。令 $\tau=(1\ 9\ 2\ 10)(3\ 11\ 4\ 12)(5\ 13\ 6\ 14)(7\ 15)(8\ 16)$ 则有：

$$\tau^2=(1,\ 2)(3,\ 4)(5,\ 6)(9,\ 10)(11,\ 12)(13,\ 14),$$

$$g^{\tau}=(9\ 12)(10\ 11)(13\ 14)(15\ 16)(2\ 3)(1\ 4)(6\ 5)(7\ 8)=g,$$

$$h^{\tau}=(9\ 14\ 16\ 13\ 10)(2\ 6\ 5\ 1\ 8)=h^2.$$

因此，$(HgH)^{\tau}=HgH$。由引理 2.3，得 $\tau\in Aut\Gamma$。令 $X=\langle G,\tau\rangle$。则 $X=G:\langle\tau\rangle=A_8^2:Z_4\le Aut\Gamma$。此外，$X$ 是作用在 $V\Gamma$ 的 PA 型拟本原群，其中 $X_\alpha=H\cdot\langle\tau\rangle\cong AGL(1,5)$。显然，$G\lhd X$ 在 Γ 的弧集合上正则。■

构造 3.3 设 $G=A_6^2$ 是作用在 $\Omega=\{1,2,\cdots,12\}$ 的置换群。令 $\sigma_1=(1\ 5\ 2\ 3\ 4)$，$\sigma_2=(7\ 8\ 10\ 11\ 9)$，$\tau_1=(3\ 5)(4\ 6)$ 以及 $\tau_2=(9\ 11)(10\ 12)$。设 $h:=(\sigma_1,\sigma_2)$，$g:=(\tau_1,\tau_2)$，$G_\alpha=\langle h\rangle\cong Z_5$。定义陪集图：$\Gamma=Cos(G,G_\alpha,G_\alpha gG_\alpha)$。■

引理 3.6 在构造 3.3 中的图 $\Gamma=Cos(G,G_\alpha,G_\alpha gG_\alpha)$ 是 5 度 $(X,2)$-弧传递，$(G,1)$-正则图，其中 $G\lhd X$，$X=A_6^2:Z_4$ 是作用在 $V\Gamma$ 的 PA 型拟本原群。

证明： 因为 $\sigma_1^5=\tau_1^2=(\sigma_1\tau_1)^4=1$ 且 $\sigma_2^5=\tau_2^2=(\sigma_2\tau_2)^5=1$，所以不存在 $\varphi\in AutT$ 使得 $\langle\sigma_1,\tau_1\rangle^{\varphi}=\langle\sigma_2,\tau_2\rangle$。又因为 $\langle\sigma_1,\tau_1\rangle\cong A_6$，$\langle\sigma_2,\tau_2\rangle\cong A_6$，所以 $\langle G_\alpha,g\rangle=\langle h,g\rangle\cong A_6^2=G$。

令 $d\in AutT-InnT$ 使得 $o(d)=2$，$\sigma_1^d=\sigma_1^{-1}$，$\tau_1^d=\tau_1$。事实上，d 决定的自同构为：

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\to(1\ 5\ 3\ 4\ 6),(4\ 5\ 6)\to(1\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)$$

令 $\tau=(d,id)(1,2)$，$X=\langle G,\tau\rangle$。则 $h^{\tau}=\left(\sigma_2,(\sigma_1)^{-1}\right)=\left(\sigma_2,(\sigma_1)^4\right)=\left((7\ 8\ 10\ 11\ 9),(1\ 4\ 3\ 2\ 5)\right)=h^2$。因此，$\langle h,\tau\rangle\cong Z_5:Z_4$，$G_\alpha=\langle h\rangle=Z_5$，$G_\alpha^{\tau}=G_\alpha$。又因为 $g^{\tau}=\left(\tau_2,\tau_1^d\right)=(\tau_2,\tau_1)=g$，由引理 2.3，$X\le Aut\Gamma$。又 $\langle h,g,\tau\rangle=X$，所以 Γ 是一个 5 度连通 $(X,2)$-弧传递图。此外，$X\cong A_6^2:Z_4$ 作用在 $V\Gamma$ 是 PA 型的拟本原群，其中 $X_\alpha=\langle h,\tau\rangle=G_\alpha\cdot\langle\tau\rangle\cong AGL(1,5)$。显然，$G=A_6^2\lhd X$ 在 Γ 的弧集合上正则。■

最后构造一个 AS 型的例子。

构造 3.4 设$T=PSU(3,5)$。则$O:=Z_3:Z_2\cong D_6\le OutT$。令$X=T\cdot O\le AutT$。则$X$是一个几乎单群且$Soc(X)=T$。由 Magma [7]，存在一个 2-元素$g$使得$g^2\in O$，$\langle O,g\rangle=X$，$|O|/|O\cap O^g|=3$。因此，$\Gamma=Cos(G,O,OgO)$是一个连通 3 度$(X,2)$-弧传递图，其中$X$包含一个正规弧正则子群$G:=T\cdot Z_3$。因为$T=Soc(X)$在$V\Gamma$上正则，所以$\Gamma\cong Cay(T,S)$是$T$上的 Cayley 图。■

基金项目

国家自然科学基金项目(12061089，11701503)；云南省教育厅科学研究基金项目(2017ZZX086)。

参考文献

[1] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **s2-47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[2] Ivanov, A.A. and Praeger, C.E. (1993) On Finite Affine 2-Arc Transitive Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **14**, 421-444. https://doi.org/10.1006/eujc.1993.1047

[3] Fang, X.G. and Praeger, C.E. (1999) Finite Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Suzuki Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3727-3754. https://doi.org/10.1080/00927879908826659

[4] Fang, X.G. and Praeger, C.E. (1999) Finite Two-Arc Transitive Graphs Admitting a Ree Simple Group. *Communications in Algebra*, **27**, 3755-3769. https://doi.org/10.1080/00927879908826660

[5] Baddeley, R. (1993) Two-Arc Transitive Graphs and Twisted Wreath Products. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **2**, 215-237.

[6] Li, C.H. and Seress, A. (2006) Constructions of Quasiprimitive Two-Arc Transitive Graphs of Product Action Type. *Finite Geometries*, *Groups and Computation*, 115-124.

[7] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125