

测度原理下自由粒子的路径积分研究

罗嘉铭

河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳

收稿日期: 2021年9月6日; 录用日期: 2021年10月7日; 发布日期: 2021年10月14日

摘要

本文研究的是量子力学中关于自由粒子运动的路径积分问题, 通过将测度理论中的方法引入对自由粒子运动路径的描述, 从而构建不同测度意义下路径积分量之间的关系。

关键词

粒子, 测度, 积分

Path Integral Study of Free Particles under the Principle of Measurement

Jiaming Luo

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan

Received: Sep. 6th, 2021; accepted: Oct. 7th, 2021; published: Oct. 14th, 2021

Abstract

In this paper, the path integral of free particle motion in quantum mechanics is studied. By introducing the method of measure theory into the description of free particle motion path, therefore, the relationship between the path product components in different measurement sense is constructed.

Keywords

Particle, Measure, Integral

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

物理为数学的研究提供背景，数学为物理提供研究工具。本文正是基于这样的基本思想，通过建立测度论与路径积分的联系，得到路径积分的物理量间的新的关系。

2. 考虑有限的平面路径积分情形

考虑 $x-t$ 的平面路径积分图(如下)，将其看作为平面矩形图([1])。于是坐标 (a,b) 满足：

$$I \text{ 区域: } \begin{cases} t_1 \leq a \leq t_2 \\ t_1 \leq a < t_2 \\ t_1 < a \leq t_2 \\ t_1 < a < t_2 \end{cases}, \begin{cases} x_1 \leq b \leq x_2 \\ x_1 \leq b < x_2 \\ x_1 < b \leq x_2 \\ x_1 < b < x_2 \end{cases}$$

$$II \text{ 区域: } \begin{cases} t_2 \leq a \leq t_3 \\ t_2 \leq a < t_3 \\ t_2 < a \leq t_3 \\ t_2 < a < t_3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 \leq b \leq x_3 \\ x_2 \leq b < x_3 \\ x_2 < b \leq x_3 \\ x_2 < b < x_3 \end{cases}$$

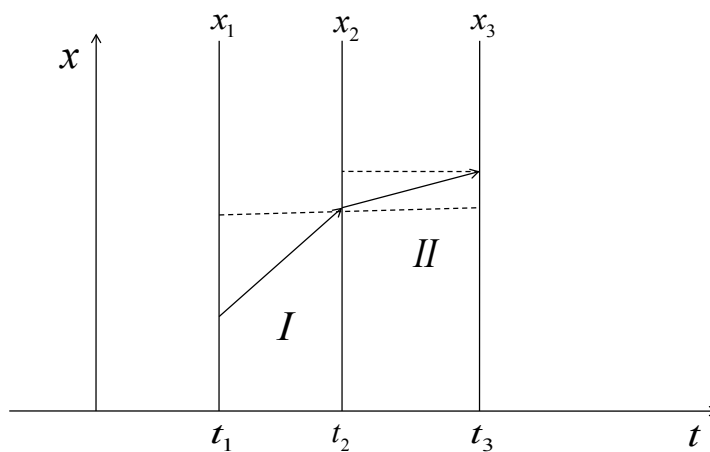


Figure 1. Simple plane path integral diagram

图 1. 简单平面路径积分图

对于图 1，由于区域 $I+II$ 是矩形平面初等集，其测度为：

$$m(I) = (x_2 - x_1)(t_2 - t_1)$$

$$m(II) = (x_3 - x_2)(t_3 - t_2)$$

这里 m 是满足 $m: R \times R \rightarrow R$ 的 Lebesgue 测度，所以该平面是坐标 $(a,b) \in \mathcal{G}_m$ 的集族 \mathcal{G}_m 。由于该平面内的点属于 \mathcal{G}_m ，并且满足条件：

1) $I+II = I \cup II$ ，且 $I \cap II = \emptyset$ ；

2) $I+II$ 的测度为 $m(I+II) = (x_3 - x_1)(t_3 - t_1) = m(I) + m(II) = (x_2 - x_1)(t_2 - t_1) + (x_3 - x_2)(t_3 - t_2)$

因此该平面矩形的测度 m 满足 σ 可加性。

现在考虑一种简单的自由粒子对 $U(t)$ 的近似情况：

由路径积分([2])中的

$$U(t)U(x,t;x',t') = A \sum_{\text{all path}} \exp\{is[x(t)]/\hbar\}$$

计算

$$U(x,t;x',t') = A' \exp\{is_{cl}/\hbar\}$$

这里假设路径为贯穿两个区域的一条直线，所以有

$$\frac{x_{cl}(t_3) - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2}$$

由前面的测度理论可得

$$m(I) = (x_1 - x_2)(t_1 - t_2)$$

$$m(II) = (x_{cl}(t_3) - x_2)(t_3 - t_2)$$

$$\Rightarrow \frac{m(I)}{(t_1 - t_2)^2} = \frac{m(II)}{(t_3 - t_2)^2}$$

$$\Rightarrow (t_3 - t_2)^2 m(I) = (t_1 - t_2)^2 m(II)$$

速度为

$$v = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{m(I)}{(t_1 - t_2)^2} = \frac{m(II)}{(t_3 - t_2)^2}$$

$$\Rightarrow S_{cl} = \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L} dt_3 = \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_1} mv^2 dt_3 = mt_3 \frac{m(I)^2}{2(t_1 - t_2)^4} \Big|_{t_2}^{t_1} = \frac{1}{2} m \frac{m(I)^2}{(t_1 - t_2)^3}$$

其中 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2$ 。将 x',t' 替换为 x_2,t_2 ； x,t 替换为 x_1,t_1 ，所以

$$U(x_1,t_1;x_2,t_2) = A' \exp\left[\frac{imm(I)^2}{2(t_1 - t_2)^3} / \hbar\right]$$

根据 delta 函数的性质，可得

$$U(x_1,t_1;x_2,0) = U(x_1,t_1;x_2) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar it}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{imm(I)^2}{2t_1\hbar}\right].$$

3. 趋近无穷时的平面路径积分情形

下面研究自由粒子的路径趋近 ∞ 时的情形(如下图 2)：

根据前面的已知条件， \mathcal{G}_m 是初等集簇，测度 m 具有 σ 可加性。考虑图 2 的情形，不妨令路径间的间距相等，得到的路径积分([3]、[4])为

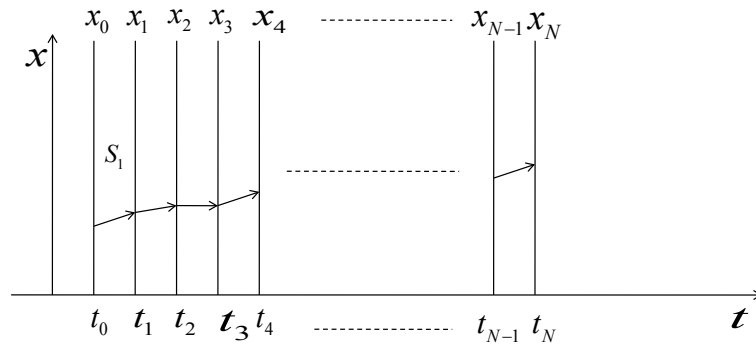


Figure 2. Multi-planar path integral diagram

图 2. 多重平面路径积分图

$$U(x_N, t_N; x_0, t_0) = \int_{x_0}^{x_N} \exp\{is[x(t)]/\hbar\} \mathcal{D}[x(t)]$$

这里 $S = \int_{t_0}^{t_N} \frac{1}{2} m v^2 dt$, $v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{x_N - x_{N-1}}{t_N - t_{N-1}} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\frac{t_N - t_0}{N}}$ 。令 $t_N = t_0 + N\theta$, 因为

$$m(S) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)(t_N - t_0)}{N}$$

将 $v = \frac{m(S)}{\theta^2}$ 代入, 就有

$$S = \frac{1}{2} m \frac{m(S)^2}{\theta^4} t \Big|_{t_0}^{t_N} \Rightarrow S = \frac{mm(S)^2 N}{2\theta^3}$$

代入, 得到

$$U(x_N, t_N; x_0, t_0) = \int_{x_0}^{x_N} \exp\left\{\frac{imm(S)^2 N}{2\theta^3 \hbar}\right\} \mathcal{D}[x(t)]$$

可以写成

$$U(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{im(S)^2 Nm}{2\theta^3 \hbar}\right] \times dx_1 \dots dx_{N-1}$$

若只考虑坐标点之间的关系, 可得

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\theta}\right)^2 \theta$$

$$\Rightarrow U(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} A \int_{\substack{-\infty \\ (N-1)}}^{\infty} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\theta}\right] \times dx_1 \dots dx_{N-1}$$

$$\Rightarrow U = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} A \int_{\substack{-\infty \\ (N-1)}}^{\infty} \exp\left\{i \sum_{i=0}^{N-1} \left[\left(\frac{m}{2\hbar\theta}\right)^{1/2} x_{i+1} - \left(\frac{m}{2\hbar\theta}\right)^{1/2} x_i\right]\right\} \quad (1)$$

其中令 $y_i = \left(\frac{m}{2\hbar\theta}\right)^{1/2} x_i$

$$\Rightarrow U' = \lim_{N \rightarrow \infty} A' \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \sum_{i=0}^{N-1} (y_{i+1} - y_i)^2 \right] dy_1 \cdots dy_{N-1} \quad (2)$$

将(1)式与(2)式进行比较, 得到

$$A' = A \left(\frac{2\hbar\theta}{m}\right)^{(N-1)/2}$$

当 $t = 2$ 时, 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[(y_2 - y_1)^2 + (y_1 - y_0)^2 \right] \right\} dy_1 = \left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-(y_2 - y_0)^2/2i}$$

当 $t = 3$ 时, 得到

$$\left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y_3 - y_2)^2/i} e^{-(y_2 - y_0)^2/2i} dy_2 = \frac{i\pi}{3} e^{-(y_3 - y_0)^2/3i}$$

当 $t = N$ 时, 得到

$$\left(\frac{i\pi}{2}\right)^{(N-2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y_N - y_{N-1})^2/i} e^{-(y_{N-1} - y_0)^2/(N-1)i} dy_{N-1} = \frac{(i\pi)^{(N-1)/2}}{N^{1/2}} e^{-(y_N - y_0)^2/Ni}$$

所以由

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(i\pi)^{(N-1)/2}}{N^{1/2}} e^{-(y_N - y_0)^2/Ni} \\ y_N = \left(\frac{m}{2\hbar\theta}\right)^{1/2} x_N, y_0 = \left(\frac{m}{2\hbar\theta}\right)^{1/2} x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(i\pi)^{(N-1)/2}}{N^{1/2}} e^{-\left[\left(\frac{m}{2\hbar\theta}\right)^{1/2} x_N - \left(\frac{m}{2\hbar\theta}\right)^{1/2} x_0\right]^2/Ni} = \frac{(i\pi)^{(N-1)/2}}{N^{1/2}} e^{-m(x_N - x_0)^2/2\hbar\theta Ni}$$

所以

$$U = A \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m}\right)^{N/2} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\theta i N}\right)^{1/2} \exp \left[\frac{im(x_N - x_0)^2}{2\hbar N\theta} \right]$$

前面已令 $N\theta = t_N - t_0$, 所以知 $A = \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m}\right)^{-N/2}$, 所以

$$U(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m}\right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{imm(s)^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

其中 $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_N$ 。

取矩形 $A \subset S$, 已知 A 的外测度是 $\mu^*(A) = \inf_{A \subset S} \sum_N m(S_N) = \inf_{A \subset S} m(S)$ 。则任何与 A 相邻的矩形 B , 使得 $A \cap B$ 有图 3 所示的几种情形:

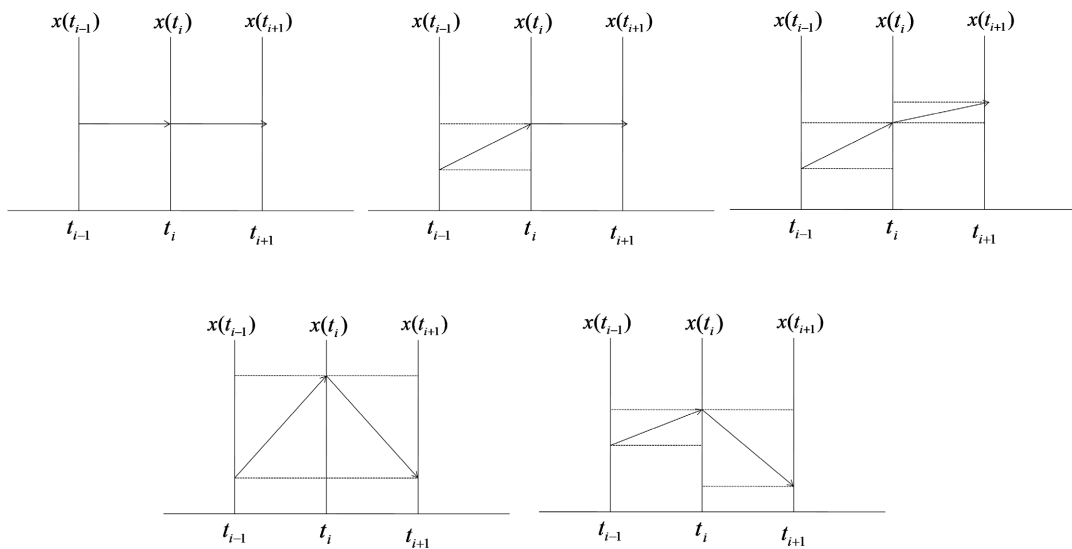


Figure 3. Several adjacent rectangular graphs

图 3. 几种相邻矩形图

所以 $\mu^*(A_{\Delta B}) = \mu^*(A \cup B - (t_i, x(t_i))) = \inf_{A \cup B - (t_i, x(t_i)) \subset A \cup B} m(A \cup B) < m(A \cup B)$ ，这里

$$\mu^*(A_{\Delta B}) = \mu^*(A \cup B - \{(x, y) | x = t_i, x(t_{i-1}) \leq y \leq x(t_i)\})$$

因为

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) = \sum \frac{(x(t_i) - x(t_{i-p})) (t_i - t_{i-p})}{p} + \sum \frac{(x(t_{i+q}) - x(t_i)) (t_{i+q} - t_i)}{q} < \varepsilon$$

所以 $\mu^*(A_{\Delta B}) < \varepsilon$ ，同时 $\mu^*(A_{\Delta B}) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2 \inf_{A, B \subset S} m(S) < \varepsilon$ 。所以有路径积分

$$U^*(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \exp \left[\frac{im\mu^*(A_{\Delta B})^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$U^*(x_N, t_N; x_0, t_0)$$

$$\leq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im(\mu^*(A)^2 + 2\mu^*(A)\mu^*(B) + \mu^*(B)^2) N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$\leq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im(2\mu^*(A)^2 + 2\mu^*(B)^2) N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{2im(\inf_{A, B \subset S} m(S))^2 N}{\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$< \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{imN\varepsilon^2}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

令

$$U_L(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im\mu(A)^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

为 Lebesgue 意义([1]、[5])下的路径积分。再令

$$U_\varepsilon(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im\varepsilon^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$U_A(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im\mu^*(A)^2 N}{4\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$U_B(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im\mu^*(B)^2 N}{4\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

就有 $U_A^2 U_B^2 < U_\varepsilon$ 。

考虑矩形 A, B, C 形成具有 m 测度的环 \mathfrak{R}_m ，且 $C \subset B \subset A$ ，可知

$$A - C = S_1 \cup S_2 - (t_a, x(t_a)) - (t_{a+d}, x(t_{a+d})) \Rightarrow A - C \subset S_1 \cup S_2$$

所以

$$m(A - C) \leq \sum_{i=1,2} m(S_i) = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(x(t_{a-p}) - x(t_{a-p-1}))(t_a - t_{a-j})}{j} + \sum_{q=0}^{f-d-1} \frac{(x(t_{a+d+q+1}) - x(t_{a+d+q}))(t_{a+d+q+1} - t_{a+d+q})}{f-d}$$

由于

$$A - C = \left\{ S_1 \cup S_2 - (t_a, x(t_a)) - (t_{a+d}, x(t_{a+d})) \right. \\ \left. S_1 \cup S_2 - \{(x, y) | x = t_a, x(t_{a-1}) \leq y \leq x(t_a)\} - \{(x, y) | x = t_{a+d}, x(t_{a+d}) \leq y \leq x(t_{a+d+1})\} \right\}'$$

在此条件下令

$$\xi = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(x(t_{a-p}) - x(t_{a-p-1}))(t_a - t_{a-j})}{j} + \sum_{q=0}^{f-d-1} \frac{(x(t_{a+d+q+1}) - x(t_{a+d+q}))(t_{a+d+q+1} - t_{a+d+q})}{f-d}$$

所以 $m(A - C) < \xi \Rightarrow B$ 是 Jordan 集。得到 Jordan 意义([1]、[5])下的路径积分

$$U_J(x_N, t_N; x_0, t_0) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im\mu(B)^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

下面考虑由图 4 给出的两种情形：

测度 m 给定在 X 里的集半环 \mathfrak{G}_m ， $P = P_1 \cup P_2$ ， $P \subset X$ ，在图(I)情形下，

$\mu^*(P) = \mu^*(P \cap P_1) + \mu^*(P - P_1)$ ，由初等集的性质就得到

$$m(P) = m(P \cap P_1) + m(P - P_1) \leq m(P_1) + m(P_2)$$

因为

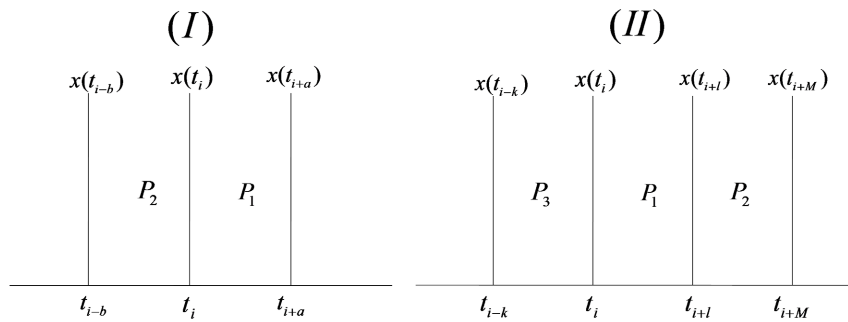


Figure 4. Arbitrary path integral diagram
图 4. 任意路径积分图

$$m(P_1) = \sum_{k=1}^a \frac{(t_{i+k} - t_{i+k-1})(x(t_{i+k}) - x(t_{i+k-1}))}{a}$$

$$m(P_2) = \sum_{k=1}^b \frac{(t_{i-k+1} - t_{i-k})(x(t_{i-k+1}) - x(t_{i-k}))}{b}$$

所以就有

$$m(P) \leq \sum_{k=1}^{a,b} \left[\frac{(t_{i+k} - t_{i+k-1})(x(t_{i+k}) - x(t_{i+k-1}))}{a} + \frac{(t_{i-k+1} - t_{i-k})(x(t_{i-k+1}) - x(t_{i-k}))}{b} \right]$$

所以在 P 区域的自由粒子的路径积分为:

$$U_P = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{imm(P)^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

并且满足

$$U_P \leq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im(m(P_1) + m(P_2))^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1} \tag{3}$$

$$(3) \geq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{2imm(P_1)m(P_2)N}{\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

当“=”成立时, $m(P_2) = m(P_1) = \frac{1}{2}m(P)$, 所以在此条件下有 Caratheodory 意义([1]、[5])下可测的路径积分, 并且 $A^3 U_P = U_{P_1}^2 U_{P_2}^2$ 。

在图(II)的情形下:

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3, P \subset X, \mu^*(P) = \mu^*(P \cap P_1) + \mu^*(P - P_1)$$

⇒

$$m(P) = m(P \cap P_1) + m(P - P_1) \leq m(P_1) + m(P_2) + m(P_3)$$

因为

$$m(P_1) = \sum_{s=1}^L \frac{(t_{i+s} - t_{i+s-1})(x(t_{i+s}) - x(t_{i+s-1}))}{L}$$

$$m(P_2) = \sum_{s=1}^{M-L} \frac{(t_{i+L+s} - t_{i+L+s-1})(x(t_{i+L+s}) - x(t_{i+L+s-1}))}{M-L}$$

$$m(P_3) = \sum_{s=1}^K \frac{(t_{i-s+1} - t_{i-s})(x(t_{i-s+1}) - x(t_{i-s}))}{K}$$

所以

$$m(P) \leq \sum_{s=1}^L \frac{(t_{i+s} - t_{i+s-1})(x(t_{i+s}) - x(t_{i+s-1}))}{L}$$

$$+ \sum_{s=1}^{M-L} \frac{(t_{i+L+s} - t_{i+L+s-1})(x(t_{i+L+s}) - x(t_{i+L+s-1}))}{M-L}$$

$$+ \sum_{s=1}^K \frac{(t_{i-s+1} - t_{i-s})(x(t_{i-s+1}) - x(t_{i-s}))}{K}$$

即

$$U_P = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{imm(P)^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$\leq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im(m(P_1) + m(P_2) + m(P_3))^2 N}{2\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1} \tag{4}$$

因为

$$(4) \geq \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{4imm(P_1)\sqrt{m(P_2)m(P_3)}N}{\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\frac{2\pi\hbar\theta i}{m} \right)^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{2imm(P_1)^2 N}{\hbar\theta^3} \right] \times dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

当且仅当 $m(P_1) = 2\sqrt{m(P_2)m(P_3)}$ ，即 $m(P_2) = m(P_3)$ 时，“=” 成立。所以就有

$$\begin{cases} m(P_1) = 2m(P_2) = 2m(P_3) \\ m(P) = 2m(P_1) \end{cases}$$

在此条件下有 Caratheodory 意义([1]、[5])下可测的路径积分，且 $A^7 U_P = U_{P_1}^3 U_{P_2}^2 U_{P_3}^2$ 。

4. 总结

通过以上的论述和计算得到了在 Hilbert 紧空间变换条件下的两个从不同方向趋近的能级表达式，所得到的两个能级表达式体现为在谐波振子状态下的距离不对称性。然而相关的深入研究以及应用问题还需要进一步地加深探索。

参考文献

- [1] A. H. 柯尔莫戈洛. 夫函数论与泛函分析初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] Shankar, R. (2007) Principles of Quantum Mechanics. 2nd Edition, World Book Inc., Beijing.

- [3] 塔诺季. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [4] 朗道. 量子力学(非相对论理论) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [5] Halmos, P.R. (2007) Measure Theory. World Book Inc., Beijing.