Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(10), 1728-1738
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110194

基于泛函修正平均法的第二类积分方程的改进迭代法

陈国林[1]**，陈　冲**[2*]

[1]西华师范大学数学与信息学院，四川 南充
[2]西华师范大学公共数学学院，四川 南充

收稿日期：2021年9月9日；录用日期：2021年10月11日；发布日期：2021年10月18日

摘　要

本文将泛函修正平均法推广到第二类线性Volterra积分方程，并进行了误差分析。然后将该方法的第一次迭代进行了调整，即迭代求解 u_1 过程中，对于非线性项中的 $u^n(t)$ 采用含修正项的不完全代换 $u_0^{n-1}(t)(u_0(t)+\alpha_1)$ 形式。后将该方法应用到一类特殊形式的非线性Fredholm积分方程的求解中。最后通过算例验证了文中方法的可行性及有效性。

关键词

第二类积分方程，不动点，皮卡尔迭代，非线性，泛函修正平均法

An Improved Iterative Method for the Second Kind of Integral Equation Based on Modified Functional Averaging Method

Guolin Chen[1]**, Chong Chen**[2*]

[1]College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan
[2]Colleg of Mathematics Education, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Sep. 9th, 2021; accepted: Oct. 11th, 2021; published: Oct. 18th, 2021

Abstract

In this paper, the modified functional average method is extended to the second kind of linear

*通讯作者。

文章引用：陈国林，陈冲．基于泛函修正平均法的第二类积分方程的改进迭代法[J]．理论数学，2021，11(10): 1728-1738. DOI: 10.12677/pm.2021.1110194

Volterra Integral Equation, and the error of the method is analyzed. Then the first iteration of the method is adjusted, that is, in the iterative solution of u_1, the modified term which is in the incomplete substitution form of $u_0^{n-1}(t)(u_0(t)+\alpha_1)$ replaces the nonlinear term $u^n(t)$. Then the method is applied to the solution of a special form of nonlinear Fredholm Integral Equation. Finally, the feasibility and effectiveness of the method are verified by numerical examples in this paper.

Keywords

The Second Kind of Integral Equation, Fixed Point, Picard Iteration, Nonlinear, Modified Functional Average Method

1. 引言

随着科技进步，数学、物理等基础学科得到进一步发展，积分方程作为研究物理规律的数学形式引起了越来越多学者的关注与研究。自然科学与工程中的部分实际问题可以转化为积分方程的求解问题，其中第二类积分方程形式比较常见。目前求解这类积分方程比较复杂，部分该类积分方程无法直接求出其解析解，此时寻找原方程的近似解并对之进行误差分析就显得尤其重要了。众多学者已对第二类积分方程做了大量研究并形成了比较成熟的求解方法，包括配置法[1] [2] [3]、Nyström方法[4] [5] [6]、小波法[7] [8] [9]、神经网络法[10] [11]、皮卡尔迭代法[12]-[17]等。

皮卡尔迭代法是求解代数方程、微分方程、超越方程的一种常用方法。到目前为止，有学者对应用皮卡尔迭代法来求解积分方程做了深入探究，Micula等[12]提出运用皮卡尔迭代法解决Fredholm-Volterra型积分方程。Leon B等[13]提出应用皮卡尔迭代法求解模糊二阶非线性Volterra-Fredholm积分微分方程。Lian C等[14]提出应用多级数皮卡尔迭代法求解第二类非线性Volterra积分方程。但部分积分方程在皮卡尔迭代格式下迭代解的收敛速度较慢导致迭代工作量较大。为了减小迭代工作量，文献[15] [16]提出应用变分迭代法来优化迭代格式，加速迭代过程，李星[17]提出第二类Fredholm型积分方程的一种泛函修正平均法来加速迭代。本文将泛函修正平均法推广应用到第二类Volterra型积分方程，改进并推广到一类特殊非线性积分方程，得到两类特定积分方程的一种改进皮卡尔迭代法，来加速迭代并提高迭代解的精度。

2. 准备知识

2.1. 压缩映射与不动点定理

定理 1 [12]设$(X,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，F 为 $X \to X$ 的一个紧算子。若存在 q，$0 \le q < 1$，使得 $\forall u,v \in X$，$\forall n \in N$ 都有 $\|Fu-Fv\| \le q\|u-v\|$，则 F 为关于 q 的压缩映射。

定理 2 [18]设$(X,\|\cdot\|)$为巴拿赫空间，F 为 X 的一个压缩映射，则 F 必有唯一不动点。

给定第二类积分方程

$$u(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)\psi(t,u(t))\mathrm{d}t+f(x),\quad x\in[a,b],\ t\in[a,b], \tag{1}$$

其中 λ 为常数，$k(x,t),\psi(t,u(t)),f(x)$ 为充分光滑函数，$u(x)$ 为待求函数。本文主要考察方程(1)的特殊情况，形如方程(2)、(3)，对该类方程的皮卡尔迭代求解方法进行改进。

$$u(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)\mathrm{d}t+f(x),\quad x\in[a,b],\ t\in[a,b], \tag{2}$$

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u^m(t)\mathrm{d}t+f(x),\quad x\in[a,b],\ t\in[a,b],\ m\in Z^+,\ m\neq 1. \tag{3}$$

2.2. 解的存在唯一性

因为并不是所有方程都能精确求解，所以在研究特定方程之前，讨论方程解的存在唯一性十分重要，这是后续进行计算的基础。本节在巴拿赫空间下利用不动点定理，给出方程(1)解析解存在的唯一性适定条件。

设 $F:C[a,b]\to C[a,b],\forall u\in C[a,b],\exists\xi(t)\in C[a,b]$，有

$$F(u(x))=\lambda\int_0^x k(x,t)\psi(t,u(t))\mathrm{d}t+f(x).$$

且满足如下条件

1) $\psi(t,u)\in C^1([a,b]\times C[a,b])$；

2) $0\le q=|\lambda|\left\|\int_0^x|k(x,t)||\psi_u(t,\xi(t))|\mathrm{d}t\right\|<1$。

定理 3 若条件(1)、(2)成立，则方程(1)存在唯一解

证明 $\forall u_1(x),u_2(x)\in C[a,b]$，有

$$F(u_1(x))-F(u_2(x))=\lambda\int_0^x k(x,t)\big(\psi(t,u_1(t))-\psi(t,u_2(t))\big)\mathrm{d}t.$$

因为

$$\psi(t,u_1(t))-\psi(t,u_2(t))=\psi_u(t,\xi(t))(u_1(t)-u_2(t)),$$

则有

$$\begin{aligned}\|Fu_1-Fu_2\|&\le|\lambda|\left\|\int_0^x|k(x,t)||\psi_u(t,\xi(t))(u_1(t)-u_2(t))\mathrm{d}t\right\|\\&\le|\lambda|\left\|\int_0^x|k(x,t)\psi(t,\xi(t))|\mathrm{d}t\right\|\cdot\|u_1-u_2\|\triangleq q\|u_1-u_2\|.\end{aligned}$$

又因为 $0\le q\le 1$，故 $F:C[a,b]\to C[a,b]$ 是压缩映射，由定理 1，定理 2 可得方程(1)解存在且唯一。

2.3. 皮卡尔迭代法求解积分方程

对于方程(1)，皮卡尔迭代法迭代格式如下

$$u_0(x)=f(x)$$

$$u_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)\psi(t,u_n(t))\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x).$$

如下定理 4 给出了皮卡尔迭代法解的收敛性及误差分析。

定理 4 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间，F 为关于 q 的一个压缩映射，且 q 满足前述条件(2)则

(a) 方程 $u=Fu$ 有唯一精确解等价于 F 有唯一不动点 $u^*\in X$；

(b) 对于任意初始值 $u_0 \in X$，迭代逼近序列 $u_{n+1} = Fu_n, n \in N$ 是收敛于 u^* 的；

(c) $\forall n \in N$，使得皮卡尔迭代法的解有如下误差估计

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le q^n \|u_1 - u_0\|, \tag{4}$$

和

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{q^n}{1-q}\|u_1 - u_0\|. \tag{5}$$

证明

(a) 结合定理 2 及定理 3 显然(a)成立。

(b) 由条件 2

$$0 \le q = |\lambda| \left\| \int_0^x |K(x,t)| |\psi_u(t,\xi(t))| \mathrm{d}t \right\| < 1,$$

则有

$$\|u_n - u^*\| = \|Fu_{n-1} - Fu^*\| \le q\|u_{n-1} - u^*\| \le \cdots \le q^n \|u_0 - u^*\|,$$

故当 $n \to \infty$ 时

$$\|u_n - u^*\| \to 0,$$

(c) 由(b)得

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|Fu_n - Fu_{n-1}\| \le q\|u_n - u_{n-1}\|, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

反复应用迭代表达式得(4)式

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le q^n \|u_1 - u_0\|.$$

$\forall p \in N$ 可得

$$\begin{aligned}\|u_{n+p} - u_n\| &\le \|u_{n+p} - u_{n+p-1}\| + \|u_{n+p-1} - u_{n+p-2}\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\| \\ &\le \left(q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \cdots + q^n\right) \cdot \|u_1 - u_0\| \le \frac{q^n}{1-q}\|u_1 - u_0\|.\end{aligned}$$

若 $p \to \infty$，则 $u_{n+p} \to u^*$，由(b)则可得(5)式成立。

3. 改进的皮卡尔迭代法

李星[17]给出了第二类线性 Fredholm 积分方程的泛函修正平均法，其方法通过在皮卡尔迭代序列中添加修正项，来加速迭代过程。本文将第二类线性 Fredholm 积分方程的泛函修正平均法推广到第二类线性 Volterra 型积分方程中，改进并应用到一类特殊非线性积分方程，得到两类特定积分方程的一种改进皮卡尔迭代法，来优化皮卡尔迭代法迭代格式，加速迭代过程并提高解的精度。

3.1. 第二类线性积分方程的改进皮卡尔迭代法

讨论第二类一维线性积分方程，将文献[17]提出的 Fredholm 型积分方程泛函修正平均法推广到 Volterra 型积分方程(2)

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t) u(t) \mathrm{d}t + f(x), \quad x \in [a,b],\ t \in [a,b],$$

取 $\xi \in (a,x]$，则

第二类 Volterra 型积分方程的改进皮卡尔迭代法即在皮卡尔迭代法的迭代格式中添加一个修正泛函 α_n

$$\alpha_n = \frac{1}{\xi - a}\int_a^{\xi} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

考虑泛函修正平均法有

$$u(\xi) = \lambda \int_a^{\xi} k(\xi,t)u(t)\,\mathrm{d}t + f(\xi), \quad \xi \in (a,x],\ t \in [a,b],$$

$$u_n(x) = \lambda \int_a^{x} k(x,t)\left[u_{n-1}(t) + \alpha_n\right]\mathrm{d}t + f(x), \quad x \in [a,b],\ t \in [a,b],$$

$$\delta_n(\xi) = u_n(\xi) - u_{n-1}(\xi), \quad n = 1,2,\cdots. \tag{6}$$

$$C(\lambda) = (\xi - a) - \lambda \int_a^{\xi}\int_a^{\xi} k(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{7}$$

可得

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{\xi - a}\int_a^{\xi}\delta_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\xi - a}\int_a^{\xi}\left[u_n(x) - u_{n-1}(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\xi - a}\int_a^{\xi}\left(\lambda\int_a^{\xi} k(x,t)\left[\delta_{n-1}(t) - \alpha_{n-1} + \alpha_n\right]\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{C(\lambda)}\int_a^{\xi}\int_a^{\xi} k(x,t)\left[\delta_{n-1}(t) - \alpha_{n-1}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{8}$$

通常规定

$$\alpha_0 = 0,\ \delta_0(x) = u_0(x),$$

$$u_n(\xi) = f(\xi) + \lambda\int_a^{\xi} k(\xi,t)\left[u_{n-1}(t) + \alpha_n\right]\mathrm{d}t.$$

由 $\xi \in (a,x]$ 任意性，上式可得

$$u_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^{x} k(x,t)\left[u_{n-1}(t) + \alpha_n\right]\mathrm{d}t. \tag{9}$$

若 $\xi = a$，则

$$u(x) = f(0).$$

可知若 $\alpha_n \equiv 0$，则算法为皮卡尔迭代法，故皮卡尔迭代法为改进皮卡尔迭代法的特殊形式。

3.2. 形如(3)式型非线性积分方程的改进的皮卡尔迭代法

对于方程(3)的改进的皮卡尔迭代法通常可取方程自由项为 0 次近似解，在第一次迭代中令 $K(x,t) = k(x,t)u_0^{m-1}(t)$，则方程(3)可转化为方程(2)的一般形式，得到修改的第一次迭代方程。用 3.1 中提出的改进皮卡尔迭代法做第一次迭代，在后续迭代中用皮卡尔迭代法处理。可以发现其实这种修正的迭代方法是部分修正，但针对迭代收敛速度较慢的方程，此法行之有效。具体算法步骤如下

$$u(x) = \lambda\int_a^{b} k(x,t)u^m(t)\,\mathrm{d}t + f(x), \quad x \in [a,b],\ t \in [a,b],\ m \in Z^+,\ m \ne 1,$$

$$u_0(x) = f(x),$$

修改的第一次迭代方程为

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u_0^{m-1}(t)u(t)\mathrm{d}t+f(x),\quad t\in[a,b],\ m\in Z^+,\ m\neq 1 \tag{10}$$

应用泛函修正平均法有

$$\delta_1(x)=u_1(x)-u_0(x),\quad n=1,2,\cdots.$$

$$C_1(\lambda)=(b-a)-\lambda\int_a^b\int_a^b k(x,t)u_0^{m-1}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{b-a}\int_a^b\delta_1(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[u_1(x)-u_0(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\lambda\int_a^b K(x,t)\left[\delta_1(t)-\alpha_0+\alpha_1\right]\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\lambda}{C(\lambda)}\int_a^b\int_a^b k(x,t)u_0^{m-1}(t)\left[\delta_0(t)-\alpha_0\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$u_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u_0^{m-1}(t)\left[u_0(t)+\alpha_1\right]\mathrm{d}t.$$

这就得到了第一次迭代解，后续迭代解采用皮卡尔迭代法处理

$$u_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_0^b k(x,t)u_n^m(x)\mathrm{d}t,\quad (n\geq 1).$$

4. 数值模拟

例 1 [17]求解如下第二类 Volerra 积分方程

$$u(x)=\int_0^x(x-t)u(t)\mathrm{d}t+f(x),$$

其中 $f(x)=1+x$，解析解 $u(x)=\mathrm{e}^x$。

令 $\xi=0$，由 3.1 节方法

$$u(0)=f(0),$$

且得到节点 0 处的精确值。

令 $\xi\in(0,x]$，有如下等式成立

$$u(\xi)=\int_0^\xi(\xi-t)u(t)\mathrm{d}t+f(\xi),\quad \xi\in(0,x],$$

则迭代格式为

$$u_n(\xi)=f(\xi)+\int_a^\xi k(\xi,t)\left[u_{n-1}(t)+\alpha_n\right]\mathrm{d}t.$$

取 $f(x)$ 为 0 次近似解

$$u_0(x)=1+x,\ C(\lambda)=\xi-\int_0^\xi\int_0^\xi(x-t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\xi,$$

$$\alpha_1=\frac{1}{\xi}\int_0^\xi\int_0^\xi(x-t)(1+t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\frac{1}{12}\xi^3,$$

$$u_1(\xi)=1+\xi+\int_0^\xi(\xi-t)\left(1+t-\frac{1}{12}\xi^3\right)\mathrm{d}t=1+\xi+\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3!}-\frac{\xi^5}{4!}.$$

由 ξ 的任意性可知 $u_1(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{4!}$，可以发现前 4 项与解析解泰勒展开一致，可见逼近效果较好。

例 2 求解如下第二类 Volterra 积分方程

$$u(x)=\lambda\int_0^x \sqrt{x}(t+10)u(t)\mathrm{d}t+f(x), \tag{11}$$

令 $x=1$，取 $\lambda=\frac{1}{10}, f(x)=\frac{22}{75}\sqrt{x}$，可得对应方程解析解 $u(x)=\sqrt{x}$ 。

取 $f(x)$ 为零次迭代解，有

$$u_0(x)=\frac{22}{75}\sqrt{x},$$

$$C(\lambda)=1-\frac{1}{10}\int_0^1\int_0^1\sqrt{x}(t+10)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{3}{10},$$

依次代入(10)式可得

$$\alpha_1=\frac{10}{3}\times\frac{1}{10}\int_0^1\int_0^1\frac{22}{75}\sqrt{x}(t+10)\sqrt{t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{4664}{10125},$$

并将之代入(11)式可得方程第一次近似解

$$u_1(x)=\frac{22}{75}\sqrt{x}+\frac{1}{10}\int_0^1\left(\frac{22}{75}\sqrt{t}+\frac{4664}{10125}\right)\sqrt{x}(t+10)\mathrm{d}t\approx 0.9843\sqrt{x}.$$

于是

$$\delta_1(x)=u_1(x)-u_0(x)\approx\frac{6910}{100000}\sqrt{x},$$

代入(10)式可得第二次修正值

$$\alpha_2=\frac{10}{3}\times\frac{1}{10}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{6910}{10000}\sqrt{t}-\frac{4664}{10125}\right)\sqrt{x}(t+10)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\approx 0.0103,$$

近一步可得第二次近似解

$$u_2(x)=\frac{22}{75}\sqrt{x}+\frac{1}{10}\int_0^1\left(\frac{9843}{10000}\sqrt{t}-\frac{103}{10000}\right)\sqrt{x}(t+10)\mathrm{d}t\approx 0.9997\sqrt{x}.$$

重复上述过程可得

$$\delta_2(x)=\frac{154}{1000}\sqrt{x},\ \ \alpha_3=\frac{15037}{100000},$$

从而第三次迭代近似解为

$$u_3(x)=\frac{22}{75}\sqrt{x}+\frac{1}{10}\int_0^1\left(\frac{9997\sqrt{t}}{10000}+\frac{15037}{100000}\right)\sqrt{x}(t+10)\mathrm{d}t\approx 0.99995\sqrt{x}.$$

多次迭代下皮卡尔迭代法与改进的皮卡尔迭代法所得近似解与解析解的比较见表 1。

从表 1 中数据可以看出使用改进的皮卡尔迭代法，第 1 次迭代解比皮卡尔迭代法的第 10 次迭代解还精确。第 3 次迭代解与皮卡尔迭代法的第 30 次迭代解的误差在同一数量级，由此可见修正后的皮卡尔迭代法收敛速度较皮卡尔迭代法的收敛速度要快得多，可以大幅减少迭代工作量。

Table 1. Comparison of approximate and analytical solutions of equation (11) under Picard iterative method and improved Picard iterative method

表 1. 方程(11)在皮卡尔迭代法与改进的皮卡尔迭代法下所得近似解与解析解的比较

皮卡尔迭代法			改进的皮卡尔迭代法		
迭代	近似解	相对误差	迭代	近似解	相对误差
1	$0.500622\sqrt{x}$	0.4993780	1	$0.984300\sqrt{x}$	0.0157000
2	$0.647106\sqrt{x}$	0.3528940	2	$0.999700\sqrt{x}$	0.0002999
3	$0.750621\sqrt{x}$	0.2493790	3	$0.999950\sqrt{x}$	0.0000499
4	$0.823772\sqrt{x}$	0.1762280			
5	$0.875466\sqrt{x}$	0.1245340			
⋮	⋮				
10	$0.978053\sqrt{x}$	0.0219470			
11	$0.984491\sqrt{x}$	0.0155090			
⋮	⋮				
20	$0.999318\sqrt{x}$	0.0006819			
⋮	⋮				
30	$0.999978\sqrt{x}$	0.0000219			

表 1 中相对误差按公式(12)计算，(相对误差节点计算为[0, 1]取含端点等距分布的 11 个节点)。

表 1 中相对误差按公式[19] (12)计算

$$RE = \frac{\sqrt{\sum_{j=0}^{10}\left|u\left(x_j\right)-u_n\left(x_j\right)\right|^2}}{\sqrt{\sum_{j=0}^{10}\left|u\left(x_j\right)\right|^2}}. \tag{12}$$

例 3 求解如下第二类 Fredholm 积分方程

$$u\left(x\right)=\lambda\int_0^1 xtu^m\left(t\right)\mathrm{d}t+f\left(x\right).$$

考虑若 $m=2$， $\lambda=1$， $f\left(x\right)=1-\frac{5x}{12}$， 得到方程[17] (13)

$$u\left(x\right)=\int_0^1 xtu^2\left(t\right)\mathrm{d}t+f\left(x\right), \tag{13}$$

其解析解 $u\left(x\right)=1+\frac{x}{3}$。

应用 3.2 节中方法，选择初始迭代解

$$u_0\left(x\right)=1,$$

利用皮卡尔迭代法可以得到如下解序列

$$u_1\left(x\right)=1+0.083x,\ u_2\left(x\right)=1+0.140x,\ u_3(x)=1+0.182x,\cdots,\ u_7\left(x\right)=1+0.269x,\cdots.$$

利用改进的皮卡尔迭代法，应用(10)得

$$u\left(x\right)=\int_0^1 xtu\left(t\right)\mathrm{d}t+1-\frac{5}{12}x.$$

由 $\lambda=1$，可得

$$C(\lambda)=\frac{3}{4},$$

$$\alpha_1=\frac{4}{3}\int_0^1\int_0^1 xt\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{3},$$

故得第一次近似解

$$u_1(x)=1-\frac{5}{12}x+\int_0^1 xt\left(1+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}t=1+\frac{x}{4}.$$

多次迭代下皮卡尔迭代法与改进的皮卡尔迭代法所得近似解与解析解的比较见表 2。

Table 2. Comparison of approximate solutions and analytical solutions obtained by taking different initial iterative solutions between Picard iterative method and improved Picard iterative method for equation (13)
表 2. 方程(13)皮卡尔迭代法与改进的皮卡尔迭代法取不同初始迭代解所得近似解与解析解的比较

解析解	迭代次数	$u_0(x)=1-5x/12$ 的皮卡尔迭代法	相对误差	$u_0(x)=1$ 的皮卡尔迭代法	相对误差	$u_0(x)=1$ 改进的皮卡尔迭代法	相对误差
$u(x)=1+\frac{1}{3}x$	0	$1-5x/12$	0.3788	1	0.1683	1	0.1683
	1	$1-0.151x$	0.1760	$1+0.083x$	0.1264	$1+0.250x$	0.0421
	2	$1-0.011x$	0.1739	$1+0.140x$	0.0976	$1+0.278x$	0.0279
	3	$1+0.075x$	0.1305	$1+0.181x$	0.0769	$1+0.288x$	0.0229
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	7	$1+0.234x$	0.0502	$1+0.269x$	0.0325	$1+0.312x$	0.0108

表 2 中相对误差按公式(12)计算，(相对误差节点计算为[0, 1]取含端点等距分布的 11 个节点)。

若考虑 $m=2$，$\lambda=\frac{1}{2}$，$f(x)=\frac{7}{8}x$，得到方程(14)

$$u(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 xtu^2(t)\mathrm{d}t+f(x), \tag{14}$$

解析解 $u(x)=x$。

两次迭代下皮卡尔迭代法与改进的皮卡尔迭代法所得近似解与解析解的比较见表 3。

Table 3. Comparison of approximate solution and exact solution of equation (14) under Picard iterative method and improved Picard iterative method
表 3. 方程(14)在皮卡尔迭代法与改进的皮卡尔迭代法下所得近似解与精确解的比较

解析解	迭代次数	皮卡尔迭代法	相对误差	改进的皮卡尔迭代法	相对误差
$u(x)=x$	1	$0.970703x$	0.0293	$0.978230x$	0.0218
	2	$0.992783x$	0.0072	$0.994616x$	0.0054

表 3 中相对误差按公式(12)计算，(相对误差节点计算为[0, 1]取含端点等距分布的 11 个节点)。

由表 2 对比方程(13)的求解结果可以发现改进的皮卡尔迭代法第一次迭代结果与皮卡尔迭代法第 7 次迭代结果精度相似，改进的方法加速迭代的效果明显。此外也可以发现合理选择初始迭代解也可以在相同的迭代次数下获得更精确的解。由表 3 对比方程(14)的求解结果可以发现改进的皮卡尔迭代法在相同

的迭代次数下其结果确实比皮卡尔迭代法的迭代结果更逼近解析解，但是效果不够明显。结合表 2，表 3 数据结果可以确定改进的皮卡尔迭代法对于方程(3)这类特殊形式的非线性 Fredholm 积分方程是可以加速迭代的，但是如果零次迭代解的误差不是太大的话，改进的皮卡尔迭代法的优化效果稍弱。

5. 结束语

本文在文献[17]提出的第二类线性 Fredholm 积分方程泛函修正平均法的基础上，首先将其推广到第二类线性 Volterra 积分方程，并加以改进应用到了一类特殊非线性方程的求解中，得到了两类特定积分方程的一种改进皮卡尔迭代法，来加速迭代并提高解的精度。通过 3 个数值算例 4 个方程的模拟结果与皮卡尔迭代法的比较，展示了改进皮卡尔迭代法的优化作用，说明了文中方法的可行性。部分积分方程优化效果不够明显的原因有待后续研究。

基金项目

国家自然科学青年基金项目：(11801456)。

博士启动基金项目：(17E083)。

参考文献

[1] Wang, K. and Wang, Q. (2014) Taylor Collocation Method and Convergence Analysis for the Volterra-Fredholm Integral Equations. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, **260**, 294-300. https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.09.050

[2] Ramm, A.G. (2009) A Collocation Method for Solving Integral Equations. *International Journal of Computing Science & Mathematics*, **2**, 222-228. https://doi.org/10.1504/IJCSM.2009.027874

[3] Saadatmandi, A. and Dehghan, M. (2008) A Collocation Method for Solving Abel's Integral Equations of First and Second Kinds. *Zeitschrift Für Naturforschung A*, **63**, 752-756. https://doi.org/10.1515/zna-2008-1202

[4] 徐建，黄晋. 新的 Nystrom 法解二维第二类 Fredholm 积分方程[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(5): 609-614.

[5] Soslash, R. K. (1990) Solution of Thin-Wire Integral Equations by Nystrom Methods. *Microwave and Optical Technology Letters*, **3**, 393-396. https://doi.org/10.1002/mop.4650031109

[6] 吕涛，黄晋. 第二类弱奇异积分方程的高精度 Nystrom 方法与外推[J]. 计算物理, 1997, 14(3):349-349.

[7] Kaneko, H. and Xu, Y. (1991) Numerical Solutions for Weakly Singular Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Applied Numerical Mathematics*, **7**, 167-177. https://doi.org/10.1016/0168-9274(91)90060-D

[8] Xiao, J.Y., Wen, L.H. and Zhang, D. (2006) Solving Second Kind Fredholm Integral Equations by Periodic Wavelet Galerkin Method. *Applied Mathematics and Computation*, **175**, 508-518. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.07.049

[9] Mahmoudi, Y. (2005) Wavelet Galerkin Method for Numerical Solution of Nonlinear Integral Equation. *Applied Mathematics & Computation*, **167**, 1119-1129. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.08.004

[10] Jafarian, A. (2014) Artificial Neural Network Approach to the Fuzzy Abel Integral Equation Problem. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **27**, 83-91. https://doi.org/10.3233/IFS-130980

[11] Jafarian, A. and Nia, S.M. (2013) Utilizing Feed-Back Neural Network Approach for Solving Linear Fredholm Integral Equations System. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 5027-5038. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.09.029

[12] Micula, S. (2015) An Iterative Numerical Method for Fredholm-Volterra Integral Equations of the Second Kind. *Applied Mathematics and Computation*, **270**, 935-942. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.110

[13] Leon, B., Schaefer, D. (1978) Volterra Series and Picard Iteration for Nonlinear Circuits and Systems. *IEEE Transactions on Circuits & Systems*, **25**, 789-793. https://doi.org/10.1109/TCS.1978.1084535

[14] Lian, C. and Duan, J. (2015) Multistage Numerical Picard Iteration Methods for Nonlinear Volterra integral Equations of the Second Kind. *Advances in Pure Mathematics*, **5**, 672-682. https://doi.org/10.4236/apm.2015.511061

[15] Xu, L. (2007) Variational Iteration Method for Solving Integral Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **54**, 1071-1078. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.12.053

[16] Yousefi, S.A., Lotfi, A. and Dehghan, M. (2009) He's Variational Iteration Method for Solving Nonlinear Mixed Vol-

terra-Fredholm Integral Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **58**, 2172-2176.
https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.03.083

[17] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 37-39.

[18] 王美娜. 巴拿赫(Banach)不动点定理的应用[J]. 吉林省教育学院学报, 2010, 26(1): 153-154.

[19] 闵涛, 晏立刚, 陈星. 一类 Fredholm-Volterra 型积分方程的数值求解[J]. 应用泛函分析学报, 2015, 17(2): 163-169.