Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(10), 1757-1762
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110198

Hans汉斯

一类条件代数不等式的注记

蒋鼎宏[1,2]，柏传志[2*]

[1]江苏省淮阴中学，江苏 淮安
[2]淮阴师范学院数学与统计学院，江苏 淮安

收稿日期：2021年9月13日；录用日期：2021年10月15日；发布日期：2021年10月22日

摘 要

本文主要讨论了一类条件代数不等式，主要结果是已有结果与方法的补遗和拓展。

关键词

代数不等式，指数，数学归纳法，导数

A Note on a Class of Conditional Algebraic Inequalities

Dinghong Jiang[1,2], Chuanzhi Bai[2*]

[1]Huaiyin High School in Jiangsu Province, Huai'an Jiangsu
[2]College of Mathematics and Statistics, Huaiyin Normal University, Huai'an Jiangsu

Received: Sep. 13th, 2021; accepted: Oct. 15th, 2021; published: Oct. 22nd, 2021

Abstract

This paper mainly discusses a class of conditional algebraic inequalities. The main results are the supplements and extensions of the existing results and methods.

Keywords

Algebraic Inequality, Exponent, Mathematical Induction, Derivative

*通讯作者。

文章引用: 蒋鼎宏, 柏传志. 一类条件代数不等式的注记[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1757-1762.
DOI: 10.12677/pm.2021.1110198

1. 引言

近年来一类条件代数不等式引起了许多作者的兴趣。在文献[1]中，作者对《数学通报》2009 年第 8 期数学问题 1808 [2]与 2010 年第 1 期数学问题 1833 [3]，从项数与指数出发进行了推广。在文献[4]中，作者对上述问题与《数学通报》2015 年第 4 期数学问题 2238 [5]，从指数出发进行了下列推广：

定理 1 设 $a,b>0$，且 $a+b=1$，对任意的正整数 m,n （$m\ge 2$），则有

$$\left(\frac{1}{a^m}-a^n\right)\left(\frac{1}{b^m}-b^n\right)\ge\left(\frac{2^{m+n}-1}{2^n}\right)^2 \tag{1}$$

等号当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时成立。

文献[6]中，作者从项数对定理 1 进行了推广，得到了下列关于一类条件代数不等式统一推广的定理。

定理 2 设 $n\in N^*$， $p\in N^*$， $q\in N^*$， $a_i>0$ （$i=1,\cdots,n;\ n>1$），且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$， $p\ge 2$，则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i^p}-a_i^q\right)\ge\left(n^p-\frac{1}{n^q}\right)^n \tag{2}$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时成立。

在定理 2 中，条件 $p\ge 2$ 是必要的。在文献[7]中，作者证明了当 $p=1$ 时，(2)式也成立，即有

定理 3 设 $q\in N^*$， $a_i>0$ （$i=1,\cdots,n;\ n>1$），且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，当 $q\ge 3$ 或 $n\ge 3$，有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-a_i^q\right)\ge\left(n-\frac{1}{n^q}\right)^n \tag{3}$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时成立。

(3)式可以看成是(2)式的补遗。(3)式中 $n=2$ 时 $q\ge 3$，一个自然的问题是如果 $n=2$， $q=2$，(3)式是否成立。另外，文献[7]在证明(3)式 $n=2$， $q\ge 3$ 的情形时证明技巧较高，也较复杂。本文将给出较直接与自然的证明。我们的结果可以看成是(1)与(3)式的补遗和扩展。我们的主要结论如下：

定理 4. 已知正数 a,b 满足 $a+b=1$，则

$$\left(\frac{1}{a}-a^2\right)\left(\frac{1}{b}-b^2\right)\le\left(\frac{7}{4}\right)^2 \tag{4}$$

证明 对于 $0<x<1$，令

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}-x^2\right)\left(\frac{1}{1-x}-(1-x)^2\right).$$

则

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{(1-x^3)\left(1-(1-x)^3\right)}{x(1-x)}=(1+x+x^2)\left(1+(1-x)+(1-x)^2\right)\\
&=x^4-2x^3+x^2+3
\end{aligned}
$$

对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=4x^3-6x^2+2x=2x(x-1)(2x-1)$$

令 $f'(x)=0$，得到 $f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的唯一零点 $x=\frac{1}{2}$，且

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f'(x)<0$。

故 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上取到最大值

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2^2}\right)^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

于是，(4)式成立。证毕。

定理 4 说明 $n=2$，$q=2$ 时，(3)式不成立，且(3)式不等式反号。

下面，我们给出 $n=2$，$q\geq 3$ 时的(3)式一个直接与自然的证明。

定理 5 已知 $a,b>0$，且 $a+b=1$。如果正整数 $p\geq 3$，

则

$$\left(\frac{1}{a}-a^p\right)\left(\frac{1}{b}-b^p\right)\geq\left(2-\frac{1}{2^p}\right)^2 \tag{5}$$

等号当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时成立。

证明 对于 $0<x<1$，令

$$f_p(x)=\left(\frac{1}{x}-x^p\right)\left(\frac{1}{1-x}-(1-x)^p\right), \tag{6}$$

则

$$
\begin{aligned}
f_p(x)&=\frac{(1-x^{p+1})\left(1-(1-x)^{p+1}\right)}{x(1-x)}\\
&=(1+x+\cdots+x^p)\left(1+(1-x)+\cdots+(1-x)^p\right).
\end{aligned}
$$

容易知道 $f_p(1-x)=f_p(x)$，即 $f_p(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 是对称的。

下面用数学归纳法证明当 $p\geq 3$

$$f_p'(x)=(1-2x)g_p(x) \tag{7}$$

其中 $g_p(x)<0$，$0<x<\frac{1}{2}$。事实上，当 $p=3$ 时

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= \left(1+2x+3x^2\right)\left(1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3\right) \\
&\quad -\left(1+x+x^2+x^3\right)\left(1+2(1-x)+3(1-x)^2\right) \\
&= 1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3-1-x-x^2-x^3 \\
&\quad +2x+2x(1-x)+2x(1-x)^2+2x(1-x)^3 \\
&\quad -2(1-x)-2x(1-x)-2x^2(1-x)-2x^3(1-x) \\
&\quad +3x^2+3x^2(1-x)+3x^2(1-x)^2+3x^2(1-x)^3 \\
&\quad -3(1-x)^2-3x(1-x)^2-3x^2(1-x)^2-3x^3(1-x)^2 \\
&= (1-2x)\left[3x^2(1-x)^2-2\right] = (1-2x)g_3(x)
\end{aligned}
$$

其中 $g_3(x)=3x^2(1-x)^2-2<\frac{3}{4}-2<0$， $0<x<\frac{1}{2}$。

假设 $p=k$ 时， $f_k'(x)=(1-2x)g_k(x)$， $g_k(x)<0$， $0<x<\frac{1}{2}$。则当 $p=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}'(x) &= \left[\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k+1}\right)\left(1+(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{k+1}\right)\right]' \\
&= \left[f_k(x)+\left(1+x+\cdots+x^k\right)(1-x)^{k+1}+\left(1+(1-x)+\cdots+(1-x)^k\right)x^{k+1}+x^{k+1}(1-x)^{k+1}\right]' \\
&= f_k'(x)+H_k(x)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
H_k(x) &= \left(1+2x+\cdots+kx^{k-1}\right)(1-x)^{k+1}-\left(1+2(1-x)+\cdots+k(1-x)^{k-1}\right)x^{k+1} \\
&\quad -(k+1)\left(1+x+\cdots+x^k\right)(1-x)^k+(k+1)\left(1+(1-x)+\cdots+(1-x)^k\right)x^k \\
&\quad +(k+1)x^k(1-x)^k(1-2x) \\
&= (1-2x)\left[(1-x)^k+(1-x)^{k-1}x+\cdots+x^k\right] \\
&\quad +2x(1-x)(1-2x)\left[(1-x)^{k-1}+(1-x)^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}\right] \\
&\quad +\cdots+kx^{k-1}(1-x)^{k-1}(1-2x) \\
&\quad -(k+1)(1-2x)\left[(1-x)^{k-1}+(1-x)^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}\right] \\
&\quad -(k+1)x(1-x)(1-2x)\left[(1-x)^{k-2}+(1-x)^{k-3}x+\cdots+x^{k-2}\right] \\
&\quad -\cdots-(k+1)x^{k-1}(1-x)^{k-1}(1-2x)+(k+1)x^k(1-x)^k(1-2x) \\
&= (1-2x)W_k(x)
\end{aligned}
$$

注意到 $0<x<\frac{1}{2}$ 时

$$
\begin{aligned}
&\left[(1-x)^k+(1-x)^{k-1}x+\cdots+x^k\right]-(k+1)\left[(1-x)^{k-1}+\cdots+x^{k-1}\right] \\
&< x^k-k\left[(1-x)^{k-1}+\cdots+x^{k-1}\right] < x^k-k^2x^{k-1} < -\left(k^2-1\right)x^k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2x(1-x)\left[(1-x)^{k-1}+\cdots+x^{k-1}\right]-(k+1)x(1-x)\left[(1-x)^{k-2}+\cdots+x^{k-2}\right]\\
&=x(1-x)\Big[2\left((1-x)^{k-2}+(1-x)^{k-3}x^2+\cdots+x^{k-1}\right)\\
&\quad-(k+1)\left((1-x)^{k-2}+(1-x)^{k-3}x+\cdots+x^{k-2}\right)\Big]<0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3x^2(1-x)^2\left[(1-x)^{k-2}+\cdots+x^{k-2}\right]-(k+1)x^2(1-x)^2\left[(1-x)^{k-3}+\cdots+x^{k-3}\right]\\
&=x^2(1-x)^2\Big[3\left((1-x)^{k-3}+(1-x)^{k-4}x^2+\cdots+x^{k-2}\right)\\
&\quad-(k+1)\left((1-x)^{k-3}+(1-x)^{k-4}x+\cdots+x^{k-3}\right)\Big]<0,
\end{aligned}
$$

$$\cdots,$$

$$
\begin{aligned}
&(k-1)x^{k-2}(1-x)^{k-2}\left[(1-x)^2+(1-x)x+x^2\right]\\
&-(k+1)x^{k-2}(1-x)^{k-2}\left[(1-x)+x\right]\\
&=x^{k-2}(1-x)^{k-2}\left[(k-1)\left((1-x)+x^2\right)-(k+1)\left((1-x)+x\right)\right]<0.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
W_k(x)&<-(k^2-1)x^k+(k+1)x^k(1-x)^k\\
&<-(k+1)(k-2)x^k.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

于是由(8)、(9)式，得

$$f'_{k+1}(x)=(1-2x)\left[g_k(x)+W_k(x)\right]=(1-2x)g_{k+1}(x),$$

而

$$g_{k+1}(x)=g_k(x)+W_k(x)<W_k(x)<-(k+1)(k-2)x^k<0,\ 0<x<\frac{1}{2}.$$

故由数学归纳法我们证明了(7)式成立。那么由(7)式，$f'_p\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$f'_p(x)<0$，$0<x<\frac{1}{2}$。即$f_p(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是单调递减的。又函数$f_p(x)$在$(0,1)$上关于$x=\frac{1}{2}$是对称的，故$f_p(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$上是单调递增的。于是在$(0,1)$上$f_p(x)$在$x=\frac{1}{2}$取到最小值。即

$$f_p(x)\ge f_p\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2^p}\right)^2.$$

证毕。

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 11571136)。

参考文献

[1] 宋志敏, 尹枥. 一道数学征解题的解后再思考[J]. 数学通报, 2010, 49(12): 32-34.

[2] 胡雷. 数学问题 1808 [J]. 数学通报, 2009, 48(8): 66.

[3] 杨先义. 数学问题 1833 [J]. 数学通报, 2010, 49(1): 65.

[4] 周兴伟, 姚丽, 赵震宇. 基于两道“姊妹题”结论与证明的思考[J]. 数学通报, 2016, 55(5): 61-62.
[5] 李良兵. 问题 2238 [J]. 数学通报, 2015, 54(4): 65.
[6] 郭要红, 刘其右. 一类条件代数不等式的统一推广[J]. 数学通报, 2017, 56(9): 58-59.
[7] 李汝雁, 郭要红, 孟庆利. 一类条件代数不等式统一推广的拾遗[J]. 数学通报, 2019, 58(2): 58-61.