Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(10), 1712-1719
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1110192

Hans汉斯

函数域上双重酉除数函数的均值

马顺琪

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2021年9月7日；录用日期：2021年10月7日；发布日期：2021年10月14日

摘　要

设 F_q 为q元有限域，在函数域 $F_q(T)$ 中，我们称首一多项式d为多项式f的酉因式，如果 $f=d\delta$ 且 $(d,\delta)=1$。若d同时为多项式f与g的酉因式，则称d是f与g的酉公因式。记 $(f,g)^{**}$ 为f与g的次数最大的首一酉公因式。我们称g是f的双重酉因式，如果 $f=gh$ 且 $(g,h)^{**}=1$。令 $\tau^{**}(f)$ 为f的双重酉因式的个数，本文研究了 $\tau^{**}(f)$ 的均值，并给出了相应的渐近公式。

关键词

双重酉除数函数，函数域，均值

The Average Value of Bi-Unitary Divisor Function in Function Fields

Shunqi Ma

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Sep. 7th, 2021; accepted: Oct. 7th, 2021; published: Oct. 14th, 2021

Abstract

Let F_q be the finite field with q elements. In the function field $F_q(T)$, a monic divisor d of a polynomial f is called unitary, if $f=d\delta$ and $(d,\delta)=1$. For polynomials f,g, if d is an unitary divisor of both f and g, it is called the common unitary divisor of them. Let $(f,g)^{**}$ be the common unitary monic divisor of f and g, whose degree is the largest. We say a divisor g of f is bi-unitary, if $f=gh$ and $(g,h)^{**}=1$. Let $\tau^{**}(f)$ denote the number of bi-unitary divisor of f. We consider the

文章引用: 马顺琪. 函数域上双重酉除数函数的均值[J]. 理论数学, 2021, 11(10): 1712-1719.
DOI: 10.12677/pm.2021.1110192

average value of $\tau^{**}(f)$ and give a corresponding asymptotic formula.

Keywords

Bi-Unitary Divisor Function, Function Fields, Average Value

1. 引言

对于正整数 n，除数函数 $\tau(n)$ 表示 n 的正除数的个数。1849 年，Dirichlet (见文献[1])考虑了 $\tau(n)$ 的均值并给出了以下渐近公式：

$$\sum_{n\le x}\tau(n)=x(\log x+2\gamma-1)+O\left(\sqrt{x}\right),$$

其中 $x\ge 2$，γ 是欧拉常数。1874 年，Mertens (见文献[2])考虑了酉除数函数的均值。如果正整数 $n=d\delta$ 且 $\gcd(d,\delta)=1$，则称 d 是 n 的一个酉除数。记 $\tau^{*}(n)$ 为 n 的全部酉除数的个数，Mertens 证明了

$$\sum_{n\le x}\tau^{*}(n)=\frac{x}{\zeta(2)}\left(\log x+2\gamma-1-\frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+O\left(\sqrt{x}\log x\right),$$

其中 $\zeta(s)$，$\zeta'(s)$ 分别表示 Riemann-zeta 函数及其导函数。1972 年，Suryanarayana [3]进一步考虑了双重酉除数函数的均值。若 d 是最大的 a 与 b 的公共酉除数，则称 d 为 a 与 b 的最大酉公因子，记作 $d=(a,b)^{**}$。如果 d 满足 $n=d\delta$ 且 $(d,\delta)^{**}=1$，则称 d 为 n 的双重酉除数。令 $\tau^{**}(n)$ 为 n 的全部双重酉除数的个数，Suryanarayana 得到

$$\sum_{n\le x}\tau^{**}(n)=Ax\left(\log x+2\gamma-1+2\sum_{p}\frac{(p-1)^{2}p^{2}\log p}{(p^{2}+1)(p^{4}+2p-1)}+2B\right)+O\left(x^{1/2}\log x\right),$$

其中 A 与 B 是常数，$\sum\limits_{p}$ 表示对所有素数求和。其他相关研究还可参见文献[4]与[5]。

设 F_q 为 q 元有限域，在函数域 $F_q(T)$ 中，类似的我们也可以考虑各类除数函数的均值。对于 $f\in F_q[T]$，令 $\tau(f)$ 表示 f 的全部首一因式的个数，我们有(见文献[6])

$$\sum_{f}\tau(f)=(n+1)q^{n},$$

其中 $\sum\limits_{f}$ 表示对所有 $n\ge 1$ 次首一多项式求和。最近，牛威[7]考虑了函数域上酉除数函数的均值。令 $\tau^{*}(f)$ 表示 f 的全部首一酉因式的个数，他证明了对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{f}\tau^{*}(f)=(n+1)q^{n}+O_{\varepsilon}\left(nq^{n-1/2+\varepsilon}\right),$$

其中 $\sum\limits_{f}$ 表示对所有 $n\ge 1$ 次首一多项式求和。

本文将讨论函数域上双重酉除数函数的均值，并给出相应的渐近公式。为简单起见，令 $\mathrm{A}=F_q[T]$ 表

示有限域 F_q 上的一元多项式环，令 M 表示 A 中所有首一多项式构成的集合，M_n 表示 A 中所有 n 次首一多项式构成的集合。

对于任意 $f,d,\delta\in\mathrm{A}$，若 $f=d\delta$ 且 $(d,\delta)=1$，则称 d 是 f 的酉因式，记作 $d\,\|\,f$。设 $f,g\in\mathrm{A}$ 且不全为 0，如果多项式 $d\in\mathrm{M}$ 满足：

1) $d\,\|\,f, d\,\|\,g$；

2) 若有任意的多项式 h 满足 $h\,\|\,f,h\,\|\,g$，则一定有 $h\,|\,d$。

那么称 d 是 f,g 的最大酉公因式，记作 $d=(f,g)^{**}$。容易证明，任意 $f,g\in\mathrm{A}$ 的最大酉公因式存在且唯一。若 $f=gh$ 且 $(g,h)^{**}=1$，则称 g 是 f 的双重酉因式。令 $\tau^{**}(f)$ 表示多项式 f 的所有双重酉因式的个数，我们有以下结果。

定理 1.1 对于任意整数 $n\ge1$ 以及 $0<\varepsilon<1/2$，我们有

$$\sum_{f\in\mathrm{M}_n}\tau^{**}(f)=(n+1)q^n+O_\varepsilon\left(nq^{n-1/2+\varepsilon}\right).$$

符号说明：

F_q	具有 q 个元素的有限域；
A	有限域 F_q 上的一元多项式环；
M	A 中首项系数为 1 的多项式构成的集合；
M_n	A 中所有 n 次首一多项式构成的集合；
$\|f\|$	多项式 f 的范数；
$\deg f$	多项式 f 的次数；
irr. P	P 是不可约多项式；
s	一个复数；
$\Re(s)$	复数 s 的实部；
$\zeta_{\mathrm{A}}(s)$	函数域上的 zeta 函数；
$\exp(x)$	指数函数 e^x；
Z	整数环；
C	全体复数构成的集合；
N	全体自然数构成的集合。

2. 预备知识与引理

2.1. 函数域上的 Zeta 函数

为证明定理 1.1，我们首先介绍函数域上 zeta 函数的定义与性质。函数域 $F_q(T)$ 中多项式 f 的范数定义为 $\|f\|:=q^{\deg f}$，其中 $\deg f$ 表示 f 的次数。函数域 $F_q(T)$ 上的 zeta 函数为(见文献[6])

$$\zeta_{\mathrm{A}}(s)=\sum_{f\in\mathrm{M}}\frac{1}{\|f\|^s},\quad \Re(s)>1, \tag{2.1}$$

其欧拉乘积为

$$\zeta_{\mathrm{A}}(s)=\prod_{\mathrm{irr.}\,P\in\mathrm{M}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^s}\right)^{-1},\quad \Re(s)>1, \tag{2.2}$$

其中无穷乘积历遍所有首一的不可约多项式。根据(2.1)式，我们可以得到

$$\zeta_{\mathrm{A}}(s)=\frac{1}{1-q^{1-s}},\ \Re(s)>1. \tag{2.3}$$

根据(2.3)式可知，函数$\zeta_{\mathrm{A}}(s)$可以解析延拓到整个复平面并且在$s=1$处为简单极点。为简单起见，令$u=q^{-s}$，则(2.3)式可写为

$$\hat{\zeta}_{\mathrm{A}}(u):=\frac{1}{1-qu},\ |u|<q^{-1}. \tag{2.4}$$

2.2. 双重酉除数函数的性质

我们首先证明双重酉除数函数$\tau^{**}(f)$是可乘的。

引理 2.2.1. 对任意$f,g\in\mathrm{M}-\{0\}$且$(f,g)=1$，有

$$\tau^{**}(fg)=\tau^{**}(f)\tau^{**}(g).$$

证明：由$\tau^{**}(f)$定义，有

$$\tau^{**}(fg)=\sum_{\substack{d\mid fg\\(d,fg/d)^{**}=1}}1.$$

因为$(f,g)=1$且$d\mid fg$，所以存在$d_1,d_2\in\mathrm{M}-\{0\}$，使$d=d_1d_2$，$(d_1,d_2)=1$，$d_1\mid f, d_2\mid g$。从而有

$$\tau^{**}(fg)=\sum_{\substack{d_1d_2\mid fg\\(d_1d_2,fg/(d_1d_2))^{**}=1}}1.$$

由此可见，若能证明当$(f,g)=1$且$(d_1,d_2)=1$时，

$$(d_1d_2,fg/(d_1d_2))^{**}=(d_1,f/d_1)^{**}(d_2,g/d_2)^{**} \tag{2.5}$$

成立，则有

$$\tau^{**}(fg)=\sum_{\substack{d_1d_2\mid fg\\(d_1,f/d_1)^{**}(d_2,g/d_2)^{**}=1}}1=\sum_{\substack{d_1\mid f\\(d_1,f/d_1)^{**}=1}}1\sum_{\substack{d_2\mid g\\(d_2,g/d_2)^{**}=1}}1=\tau^{**}(f)\tau^{**}(g),$$

即引理结论成立。

下证当$(f,g)=1$且$(d_1,d_2)=1$时，公式(2.5)成立。记

$$t=(d_1d_2,fg/(d_1d_2))^{**},\quad r=(d_1,f/d_1)^{**},\quad s=(d_2,g/d_2)^{**}.$$

由最大酉公因式定义可知$r\parallel d_1, r\parallel(f/d_1)$且$s\parallel d_2, s\parallel(g/d_2)$。因为$(d_1,d_2)=1$，所以$rs\parallel d_1d_2$。同理，由$(f,g)=1$可得$(f/d_1\ g/d_2)=1$，因此$rs\parallel fg/(d_1d_2)$。由此可得$rs$是$d_1d_2$和$fg/(d_1d_2)$的酉公因式。由最大酉公因式定义可得$rs\mid t$。

下证$t\mid rs$。由t的定义可得$t\parallel d_1d_2, t\parallel fg/(d_1d_2)$。因为$(d_1,d_2)=1$，所以存在$t_1,t_2$满足$t=t_1t_2$，并且$t_1\parallel d_1$，$t_2\parallel d_2$。由$(f/d_1,g/d_2)=1$，$t\parallel fg/(d_1d_2)$并根据函数域上的算术基本定理和最大酉公因式定义可得，对上述t_1,t_2，仍有$t_1\parallel(f/d_1)$，$t_2\parallel(g/d_2)$。从而$t_1\mid(d_1,f/d_1)^{**}$，$t_2\mid(d_2,g/d_2)^{**}$。由此可得$t_1t_2\mid(d_1,f/d_1)^{**}(d_2,g/d_2)^{**}$，即$t\mid rs$。

综上所述，我们有$t=rs$，因此引理得证。□

接下来我们计算 $\tau^{**}(f)$ 在不可约多项式幂次处的值。

引理 2.2.2. 设 α_i 为正整数，P 为 A 中首一的不可约多项式，则有

$$\tau^{**}\left(P^{\alpha_i}\right)=\begin{cases}\alpha_i & \alpha_i \text{ 是偶数},\\ \alpha_i+1 & \alpha_i \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

证明：对于正整数 α_i，易知 P^{α_i} 共有 (α_i+1) 个因式，其中 $P\in\mathrm{M}$ 且不可约。当 α_i 是奇数时，因为对于所有 $m,n\in\mathrm{N}$，$m+n=\alpha_i$，都有 $\left(P^m,P^n\right)^{**}=1$，所以 $\tau^{**}\left(P^{\alpha_i}\right)=\alpha_i+1$。当 α_i 是偶数时，因为有 $\left(P^{\alpha_i/2},P^{\alpha_i/2}\right)^{**}=P^{\alpha_i/2}\neq 1$，所以 $\tau^{**}\left(P^{\alpha_i}\right)=\alpha_i+1-1=\alpha_i$。引理得证。□

2.3. 其他所需引理

设 $s\in C$，我们定义

$$G(s)=\prod_{\text{irr. } P\in\mathrm{M}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^{2s}}+\frac{1}{\|P\|^{3s-1}\left(\|P\|-1\right)}\right), \tag{2.6}$$

其中无穷乘积历遍所有首一的不可约多项式。下面我们将考虑 $G(s)$ 的有界性。

引理 2.3.1. 对于任意 $\varepsilon>0$，当 $\Re(s)\geq\frac{1+\varepsilon}{2}$ 时，我们有 $G(s)=O(1)$。

证明：由 $G(s)$ 的定义，我们有

$$G(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\text{irr. } P\in\mathrm{M}_n}\left(1-\frac{1}{\|P\|^{2s}}+\frac{1}{\|P\|^{3s-1}\left(\|P\|-1\right)}\right).$$

由范数定义可得

$$G(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{\text{irr. } P\in\mathrm{M}_n}\left(1-\frac{1}{q^{2ns}}+\frac{1}{q^{n(3s-1)}\left(q^n-1\right)}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{q^{2ns}}+\frac{1}{q^{n(3s-1)}\left(q^n-1\right)}\right)^{a_n},$$

其中 a_n 表示 M_n 中首一的不可约多项式的个数。又因为

$$\frac{1}{q^{n(3\Re(s)-1)}\left(q^n-1\right)}<\frac{2}{q^{3n\Re(s)}}<\frac{2}{q^{2n\Re(s)}},$$

且存在常数 $C_1>0$，使得 $a_n\leq\frac{C_1q^n}{n}$ (见文献[6])，所以

$$\left|G(s)\right|\leq\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q^{2n\Re(s)}}\right)^{\left(C_1q^n\right)/n}. \tag{2.7}$$

利用换底公式及 $\log(1+x)$ 的泰勒展开式可得

$$\left|G(s)\right|\leq\exp\left\{O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nq^{n(2\Re(s)-1)}}\right)\right\}.$$

因为当 $\Re(s)\geq\frac{1+\varepsilon}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nq^{n(2\Re(s)-1)}}$ 收敛，所以存在 $C(\varepsilon)>0$，使得

$$\left|G(s)\right|\leq C(\varepsilon), \tag{2.8}$$

从而引理得证。□

下面我们将用 $G(s)$ 与 ζ_{A} 表示 $\tau^{**}(f)$ 的 Dirichlet 级数。

引理 2.3.2. 对于 $\Re(s) \ge \frac{1+\varepsilon}{2}$，我们有

$$\sum_{f \in \mathrm{M}} \frac{\tau^{**}(f)}{\|f\|^s} = \zeta_{\mathrm{A}}^2(s) G(s), \tag{2.9}$$

其中 ζ_{A} 是函数域上的 zeta 函数，$G(s)$ 由(2.6)式给出。

证明：记

$$F(s) = \sum_{f \in \mathrm{M}} \frac{\tau^{**}(f)}{\|f\|^s}, \tag{2.10}$$

由引理 2.2.1 $\tau^{**}(f)$ 是可乘函数可得 $F(s)$ 的欧拉乘积为

$$F(s) = \prod_{\mathrm{irr.}\, P \in \mathrm{M}} \left(1 + \frac{\tau^{**}(P)}{\|P\|^s} + \frac{\tau^{**}(P^2)}{\|P\|^{2s}} + \cdots\right),$$

其中无穷乘积历遍所有首一不可约多项式。由引理 2.2.2 可得

$$F(s) = \prod_{\mathrm{irr.}\, P \in \mathrm{M}} \left(1 + \frac{2}{\|P\|^s} + \frac{2}{\|P\|^{2s}} + \cdots + \frac{2k}{\|P\|^{(2k-1)s}} + \frac{2k}{\|P\|^{2ks}} + \cdots\right).$$

根据上式并利用 ζ_{A} 的欧拉乘积(2.2)式以及 $G(s)$ 的定义(2.6)式，可以得到

$$F(s) = \zeta_{\mathrm{A}}^2(s) G(s).$$

引理得证。□

当 $\Re(s) \ge \frac{1+\varepsilon}{2}$ 时，我们可以将 $G(s)$ 写成如下 Dirichlet 级数的形式

$$G(s) = \sum_{f \in \mathrm{M}} \frac{h(f)}{\|f\|^s}, \tag{2.11}$$

其中 $h(f)$ 是 $G(s)$ 的欧拉乘积(2.6)式确定的可乘函数。更进一步，我们有

$$G(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{f \in \mathrm{M}_l} h(f) q^{-ls}.$$

令 $u = q^{-s}$，上式可以写成

$$\hat{G}(u) := \sum_{l=0}^{\infty} h_l u^l, \quad |u| \le q^{-1/2-\varepsilon}, \tag{2.12}$$

其中

$$h_l := \sum_{f \in \mathrm{M}_l} h(f). \tag{2.13}$$

为证明定理 1.1，我们还需要 h_l 的上界。

引理 2.3.3. 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C(\varepsilon) > 0$ 使得

$$|h_l| \le C(\varepsilon) q^{(l+l\varepsilon)/2}.$$

证明：由 h_l 的定义(2.13)式，$\hat{G}(u)$ 的定义(2.12)式并且利用洛朗定理(见文献[8])可得

$$h_l = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{\hat{G}(u)}{u^{l+1}}\mathrm{d}u, \tag{2.14}$$

其中围道 Γ 由 $|u| = q^{-(1+\varepsilon)/2}$ 给出。对(2.14)式两边取模，由引理 2.3.1 以及围道 Γ 取法可得

$$|h_l| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\frac{|\hat{G}(u)|}{|u^{l+1}|}|\mathrm{d}u| \le \frac{1}{2\pi}C(\varepsilon)q^{(1+\varepsilon)(l+1)/2}\oint_{\Gamma}|\mathrm{d}u|.$$

从而有

$$|h_l| \le \frac{1}{2\pi}C(\varepsilon)q^{(1+\varepsilon)(l+1)/2}2\pi q^{-(1+\varepsilon)/2} = C(\varepsilon)q^{(l+l\varepsilon)/2}.$$

引理得证。□

3. 定理 1.1 的证明

由 $F(s)$ 定义(2.10)式可得

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in \mathrm{M}_n}\tau^{**}(f)q^{-ns}.$$

令 $u = q^{-s}$，上式可写为

$$\hat{F}(u) := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in \mathrm{M}_n}\tau^{**}(f)u^{n}, \tag{3.1}$$

同时(2.9)式可写为

$$\hat{F}(u) = \hat{\zeta}_{\mathrm{A}}^{2}(u)\hat{G}(u).$$

根据(2.4)式 $\hat{\zeta}_{\mathrm{A}}(u)$ 的泰勒展开式以及(2.12)式可得

$$\hat{F}(u) = \left(\sum_{r=0}^{\infty}q^{r}u^{r}\right)^{2}\sum_{l=0}^{\infty}h_l u^{l} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r+m+l=n}q^{r+m}h_l u^{r+m+l}. \tag{3.2}$$

由比较(3.1)式和(3.2)式右边幂级数的系数可得

$$\sum_{f\in \mathrm{M}_n}\tau^{**}(f) = \sum_{r+m+l=n}q^{r+m}h_l.$$

从而有

$$\sum_{f\in \mathrm{M}_n}\tau^{**}(f) = \sum_{r=0}^{n}q^{r}\sum_{m=0}^{n-r}q^{m}h_{n-r-m} = \sum_{r=0}^{n}q^{r}\sum_{m=0}^{n-r}q^{n-r-m}h_m.$$

由此可得

$$\sum_{f\in \mathrm{M}_n}\tau^{**}(f) = q^{n}\sum_{r=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-r}q^{-m}h_m. \tag{3.3}$$

由 $h_0 = 1$ 我们有

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-r}q^{-m}h_m = n+1+O\left(\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-r}q^{-m}h_m\right) = n+1+O\left(n\sum_{m=1}^{n}q^{-m}h_m\right). \tag{3.4}$$

下面估计(3.4)式最右边的 O 项。由 h_m 的定义(2.13)式以及引理 2.3.3 可得

$$\left|n\sum_{m=1}^{n}q^{-m}h_m\right|\le n\sum_{m=1}^{n}q^{-m}\left(C(\varepsilon)q^{m(1+\varepsilon)/2}\right)\le C(\varepsilon)nq^{(\varepsilon-1)/2}\sum_{m=0}^{n-1}q^{m(\varepsilon-1)/2}. \tag{3.5}$$

对于(3.5)式中 $\sum_{m=0}^{n-1}q^{m(\varepsilon-1)/2}$，当 $0<\varepsilon<1/2$ 时，我们有

$$\sum_{m=0}^{n-1}q^{m(\varepsilon-1)/2}\le\sum_{m=0}^{\infty}q^{-m/4}\le\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m/4},$$

从而

$$\sum_{m=0}^{n-1}q^{m(\varepsilon-1)/2}=O(1). \tag{3.6}$$

将(3.6)式代入(3.5)式我们有

$$n\sum_{m=1}^{n}q^{-m}h_m=O_\varepsilon\left(nq^{(\varepsilon-1)/2}\right). \tag{3.7}$$

将(3.7)式代入(3.4)式右边的 O 项我们有

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-r}q^{-m}h_m=n+1+O_\varepsilon\left(nq^{(\varepsilon-1)/2}\right). \tag{3.8}$$

将(3.8)式代入(3.3)式，可得当 $0<\varepsilon<1/2$ 时，

$$\sum_{f\in\mathrm{M}_n}\tau^{**}(f)=(n+1)q^n+O_\varepsilon\left(nq^{n+(\varepsilon-1)/2}\right).$$

定理得证。

参考文献

[1] Iwaniec, H. and Kowalski, E. (2004) Analytic Number Theory. Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, Vol. 53, p 22. https://doi.org/10.1090/coll/053

[2] Cohen, E. (1960) The Number of Unitary Divisors of an Integer. *American Mathematical Monthly*, **67**, 879-880. https://doi.org/10.2307/2309455

[3] Suryanarayana, D. (1975) The Number of Bi-Unitary Divisors of an Integer. Springer, Berlin, Heidelberg.

[4] Cohen, E. (1960) Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer. *Mathematische Zeitschrift*, **74**, 66-80. https://doi.org/10.1007/BF01180473

[5] Chidambaraswamy, J. (1967) Sum Functions of Unitary and Semi-Unitary Divisors. *Journal of the Indian Mathematical Society*, **31**, 117-126.

[6] Rosen, M. (2002) Number Theory in Function Fields. Springer-Verlag, New York, 1-19. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6046-0

[7] 牛威. 广义酉除数和函数在函数域上的均值[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1242-1249. https://doi.org/10.12677/pm.2021.116137

[8] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 185-188.