Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1788-1802
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111202

Hans汉斯

带弱阻尼项的二维MHD方程解的存在唯一性

骆　蓉

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州

收稿日期：2021年10月6日；录用日期：2021年11月9日；发布日期：2021年11月16日

摘　要

本文主要考虑有界区域上带弱阻尼项的二维不可压的MHD方程解的适定性。首先应用经典的Faedo-Galerkin方法，证明其强解和弱解的存在唯一性。进一步，得到强解满足的能量等式和能量不等式。

关键词

MHD方程，Faedo-Galerkin逼近，强解，弱解，存在唯一性

Existence and Uniqueness of Solutions for Two Dimensional MHD Equations with Weakly Dampping

Rong Luo

School of Mathematics and Information Sciences, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong

Received: Oct. 6th, 2021; accepted: Nov. 9th, 2021; published: Nov. 16th, 2021

Abstract

In this paper, we mainly consider the well-posedness of solutions of two dimensional incompressible MHD equations with weakly dampping defined on a bounded domain. First, the existence and uniqueness of strong and weak solutions are proved by using the classical Faedo-Galerkin approximation. Furthermore, the energy equation and energy inequality satisfied by the strong solution are obtained.

文章引用: 骆蓉. 带弱阻尼项的二维 MHD 方程解的存在唯一性[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1788-1802.
DOI: 10.12677/pm.2021.1111202

Keywords

MHD Equations, Faedo-Galerkin Approximation, Strong Solution, Weak Solution, Existence and Uniqueness

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

磁流体动力学(MHD)方程描述了一种导电流体在磁场存在下的运动，这是许多物理现象的基础，比如地球物理学中的地磁发电机和天体物理学中的太阳风和太阳耀斑[1]。磁流体动力学(MHD)方程是流体动力学中的纳维－斯托克斯(Navier-Stokes)方程和电磁动力学中的麦克斯韦(Maxwell)方程的耦合。虽然 MHD 方程与 Navier-Stokes 方程在结构上非常相似，但 MHD 方程中出现了未知的磁场以及更多的耦合项，因此对 MHD 方程的理论研究将比 Navier-Stokes 方程更加困难。

本文研究的模型是带弱阻尼项的二维 MHD 方程。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开集，方程的形式如下

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u+\nabla p+S\nabla\dfrac{|B|^2}{2}-S(B\cdot\nabla)B+\alpha u=\varepsilon f,\ (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_\tau,\\ \dfrac{\partial B}{\partial t}+(u\cdot\nabla)B-(B\cdot\nabla)u+\dfrac{1}{\mathrm{Rm}}\widetilde{\mathrm{curl}}(\mathrm{curl}\ B)=0,\ (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_\tau,\\ \nabla\cdot u=0,\quad \nabla\cdot B=0,\quad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_\tau,\\ u(\tau)=u_\tau,\quad B(\tau)=B_\tau,\quad x\in\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中，$u(x,t)$ 是速度场，$B(x,t)$ 是磁场，函数 p 表示压力，α 是正常数，αu 表示弱阻尼项，$\mathbb{R}_\tau\in[\tau,+\infty)$，$\tau\in\mathbb{R}$，$\varepsilon$ 是任意小的正常数，外力项 f 是关于时间的局部可积函数。

方程(1)满足以下边界条件

$$\begin{cases}u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega\\ B(x,t)\cdot\boldsymbol{n}=0\text{和}\ \mathrm{curl}\ B(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

阻尼效应常见于自然学科中的诸多领域，用于描述许多物理现象，如多孔介质流动，阻力或摩擦效应以及一些耗散机制。众所周知，带弱阻尼项的 MHD 方程在 $B=0$ 的情况下就简化成了带弱阻尼项的二维 Navier-Stokes 方程。Xiaojing Cai，Zujin Zhang 和 Xinguang Yang 等人研究了带弱阻尼项的二维 Navier-Stokes 方程解的动态行为，可参考文献[2] [3] [4] [5] [6]。比如 Xiaojing Cai [2]在 2008 年研究了带阻尼项 $\alpha|u|^{\beta-1}u\,(\alpha>0)$ 的 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题，证明了当 $\beta\ge1$ 时系统有弱解；Wuming Li [4]在 2011 年研究了带弱阻尼项 $\alpha|u|^{\beta-1}u\,(\alpha>0)$ 的不可压的 Navier-Stokes 方程分别在狄利克雷边界条件下和在非齐次边界条件下弱解的存在唯一性；Xinguang Yang [5]在 2013 年证明了带弱阻尼项 αu 的二维 Navier-Stokes 方程的一致吸引子的存在性，而对于带弱阻尼项的 MHD 方程也得到了许多研究成果，可参考文献[7] [8] [9] [10] [11]。本文主要参考文献[9]的方法研究了带弱阻尼项 αu 的二维 MHD 方程的强解

和弱解的存在唯一性，为研究其全局吸引子与拉回吸引子打好基础。

2. 预备知识

2.1. 函数空间

对任意$1 \le p \le \infty$，记

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left(L^p(\Omega)\right)^2, \qquad \mathbb{H}^1(\Omega) = \left(H^1(\Omega)\right)^2,$$
$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)^2, \qquad \mathbb{H}^{-1}(\Omega) = \left(H^{-1}(\Omega)\right)^2,$$

设方程在以下空间中

$$\mathcal{V}_1 = \left\{u \in \left(C_c^\infty(\Omega)\right)^2, \operatorname{div} u = 0\right\},$$
$$V_1 = \mathcal{V}_1 \text{在} \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{中的闭包} = \left\{u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} u = 0\right\},$$
$$H_1 = \mathcal{V}_1 \text{在} \mathbb{L}^2(\Omega) \text{中的闭包} = \left\{u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \operatorname{div} u = 0 \text{和} u \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$
$$\mathcal{V}_2 = \left\{B \in \left(C^\infty(\bar{\Omega})\right)^2, \operatorname{div} u = 0 \text{和} B \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$
$$V_2 = \mathcal{V}_2 \text{在} \mathbb{H}^1(\Omega) \text{中的闭包} = \left\{B \in \mathbb{H}^1(\Omega), \operatorname{div} B = 0 \text{和} B \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$
$$H_2 = \mathcal{V}_2 \text{在} \mathbb{L}^2(\Omega) \text{中的闭包} = H_1,$$

定义V_1的对偶空间为$V_1^* = \left\{u \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \operatorname{div} u = 0\right\}$，其中，$\boldsymbol{n}$是边界$\partial\Omega$上的单位法向量。

定义函数空间$H_1 = H_2, V_1, V_2$中的内积为

$$(u,v) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u^i(x) v^i(x) \mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in H_1 (\text{或} H_2),$$
$$(\nabla u, \nabla v) := \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u^i}{\partial x^j}(x) \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(x) \mathrm{d}x, \ \forall u, v \in V_1,$$
$$\left(\operatorname{curl} B, \operatorname{curl} \tilde{B}\right) := \sum_{i,j=1, i\ne j}^{2} \int_\Omega \frac{\partial B^i}{\partial x^j}(x) \left(\frac{\partial \widetilde{B^i}}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial \widetilde{B^j}}{\partial x^i}(x)\right) \mathrm{d}x, \ \forall B, \tilde{B} \in V_2.$$

记$V = V_1 \times V_2, H = H_1 \times H_2$，$V^*$是$V$的对偶空间。则$V \subset H = H^* \subset V^*$，且每一个空间都在后一个空间中稠密。

定义H和V上的内积为

$$(\xi, \psi) = (u, \varphi) + (B, \rho), \ \forall \xi = (u, B), \psi = (\varphi, \rho) \in H,$$
$$(\xi, \psi) + \frac{1}{\mathrm{Re}} (\nabla u, \nabla \varphi) + \frac{1}{\mathrm{Rm}} (\operatorname{curl} B, \operatorname{curl} \rho), \ \forall \xi = (u, B), \psi = (\varphi, \rho) \in V.$$

记空间H的范数为$\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$，空间$V$的范数$\|\cdot\|_* = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$。则

$$(-\Delta u, \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi), \quad \forall u, \varphi \in V_1,$$
$$\left(\widetilde{\operatorname{curl}}(\operatorname{curl} B), \rho\right) = (\operatorname{curl} B, \operatorname{curl} \rho), \quad \forall B, \rho \in V_2.$$

我们用$\langle \cdot,\cdot \rangle$表示$X$与$X^*$的对偶内积，其中，$X = V, V_1$或$V_2$。定义算子$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V^*), \mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(V_i, V_i^*)$，$i = 1, 2$为

$$\langle \mathcal{A}_1 u,\varphi\rangle = (\nabla u,\nabla\varphi),\ \forall u,\varphi\in V_1,\ \langle \mathcal{A}_2 B,\rho\rangle = (\mathrm{curl}\ B,\mathrm{curl}\ \rho),\ \forall B,\rho\in V_2,$$

$$\langle \mathcal{A}\xi,\psi\rangle = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla u,\nabla B)+\frac{1}{\mathrm{Rm}}(\mathrm{curl}\ B,\mathrm{curl}\ \rho),\ \forall \xi=(u,B),\psi=(\varphi,\rho)\in V.$$

分别定义 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}$ 为 H_1,H_2,H 上的无界算子，其中 $D(\mathcal{A}_1)=\{u\in V_1,\mathcal{A}_1 u\in H_1\}$，

$$D(\mathcal{A}_2)=\{B\in V_2,\mathcal{A}_2 B\in H_2\}，\ D(\mathcal{A})=D(\mathcal{A}_1)\times D(\mathcal{A}_2)。$$

从文献[12]可知

$$D(\mathcal{A}_1)=\mathbb{H}^2(\Omega)\cap V_1,\ D(\mathcal{A}_2)=\mathbb{H}^2(\Omega)\cap V_2,\ D(\mathcal{A})=\left(\mathbb{H}^2(\Omega)\right)^2\cap V.$$

2.2. 一些有用的结论

引理 1 设 X 为自反 Banach 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的有界点列，则 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列。

引理 2 (Alaoglu 弱*紧定理) 设 X 是可分的 Banach 空间，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X^* 中的有界序列，则 $\{f_n\}$ 有弱*收敛的子列。

引理 3 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开集，且边界 $\partial\Omega$ 是光滑的，如果 $h\in L^2\left(\tau,T;H^{m+2}(\Omega)\right)$ 和 $\frac{\partial h}{\partial t}\in L^2\left(\tau,T;H^m(\Omega)\right)$，则 $h\in C^0\left([\tau,T];H^{m+1}(\Omega)\right)$（可能在一些零测集上重新定义），这里对任意的 $m=0,1,2,\cdots$，$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$ 是 Sobolev 空间。

引理 4 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开集，g_u 和 g 是 $L^p(\Omega)(1<p<\infty)$ 中的函数，且有 $\|g_u\|_{L^p(\Omega)}(1<p<\infty)$，$g_u$ 在 Ω 中几乎处处收敛于 g，则 g_u 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛于 g。

3. 强解

定理 1 设 $\xi_\tau=(u_\tau,B_\tau)\in V$，$f\in L^2(\tau,T;H_1)$，如果 $\xi=(u,B)$ 满足

$$\xi\in L^2(\tau,T;D(A))\cap L^\infty(\tau,T;V)\cap L^2(\tau,T;V)\cap C([\tau,T];V),$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}\in L^2(\tau,T;H),$$

并且它在相应区域上几乎处处满足方程(1)~(2)，则我们称 $\xi=(u,B)$ 是方程(1)~(2)的强解。另外，对任意 $t\in[\tau,T]$，$\xi=(u,B)$ 满足下面的能量等式：

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|^2+S\|B(t)\|^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\int_\tau^t\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^t\|\mathrm{curl}\,B(s)\|^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_\tau^t\|u(s)\|^2\mathrm{d}s\\&=\|u_\tau\|^2+S\|B_\tau\|^2+2\varepsilon\int_\tau^t\langle f(s),u(s)\rangle\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{3}$$

和能量不等式：

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|^2+S\|B(t)\|^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\tau^t\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^t\|\mathrm{curl}\,B(s)\|^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_\tau^t\|u(s)\|^2\mathrm{d}s\\&\le\|u_\tau\|^2+S\|B_\tau\|^2+\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\int_\tau^t\|f(s)\|_{V_1^*}^2\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4}$$

证明：a. 存在性

第一步 构造近似解

设 $w_j(x)=(\sigma_j(x),\varsigma_j(x))\in\left(H^2(\Omega)\cap H^1(\Omega)\right)(j=1,2,\cdots)$ 是算子 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ 在 V 上满足边界条件(2)的特征函数，$\iota_1<\iota_2\le\iota_3\le\cdots$ 和 $0<\kappa_1<\kappa_2\le\kappa_3\le\cdots$ 分别是相应的特征值，并且

当 $n\to\infty$ 时，$\iota_n\to\infty$，$\kappa_n\to\infty$。

$\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 V 中的一组正交基，H 中的一组标准正交基。

由于 $w_j(x)\in V(j=1,2,\cdots)$，根据 V 的定义可知：

$\operatorname{div} w_j(x)=0$，即 $\operatorname{div}\sigma_j(x)=0$ 和 $\operatorname{div}\varsigma_j(x)=0$。

对任意固定的正整数 m，记

$$u_m(x,t):=\sum_{j=1}^{m}d_{jm}(t)\sigma_j,\ B_m(x,t):=\sum_{j=1}^{m}e_{jm}(t)\varsigma_j. \tag{5}$$

并考虑以下有限维近似系统

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial t},\sigma_j\right)+b(u_m,u_m,\sigma_j)-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta u_m,\sigma_j)-Sb(B_m,B_m,\sigma_j)+\alpha(u_m,\sigma_j)=\varepsilon(f,\sigma_j), & (x,t)\in\Omega\times R_\tau,\\ \left(\dfrac{\partial B_m}{\partial t},\varsigma_j\right)+b(u_m,B_m,\varsigma_j)-b(B_m,u_m,\varsigma_j)+\dfrac{1}{\mathrm{Rm}}\left(\widetilde{\operatorname{curl}}(\operatorname{curl}B_m),\varsigma_j\right)=0, & (x,t)\in\Omega\times R_\tau,\\ \operatorname{div}u_m(x,t)=0,\qquad \operatorname{div}B_m(x,t)=0, & (x,t)\in\Omega\times R_\tau,\\ d_{jm}(\tau)=(u_\tau,\sigma_j),\qquad e_{jm}(\tau)=(B_\tau,\varsigma_j), & x\in\Omega,\\ u_m(\tau)=P_m u_\tau,\qquad B_m(\tau)=Q_m B_\tau, & x\in\Omega\end{cases} \tag{6}$$

其中 $P_m u_\tau=\sum_{j=1}^{m}(u_\tau,\sigma_j)\sigma_j, Q_m B_\tau=\sum_{j=1}^{m}(B_\tau,\varsigma_j)\varsigma_j, j=1,2,\cdots$。并且，方程(6)满足以下边界条件

$$\begin{cases}u_m=0, & x\in\partial\Omega,\\ B_m\cdot\boldsymbol{n}=0\text{ 和 }\operatorname{curl}B_m=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{7}$$

因为 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 V 中的一组正交基，H 中的一组标准正交基。则对任意 $\xi_\tau\in V(\xi_\tau\in H)$，当 $m\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}&u_m(x,\tau)=u_{m\tau}=\sum_{j=1}^{m}(u_\tau,\sigma_j)\xrightarrow{\text{强}}u_\tau\quad \text{在}V_1(H_1)\text{中},\\ &B_m(x,\tau)=B_{m\tau}=\sum_{j=1}^{m}(B_\tau,\varsigma_j)\varsigma_j\xrightarrow{\text{强}}B_\tau\quad \text{在}V_2(H_2)\text{中},\end{aligned} \tag{8}$$

根据 ODEs 解的存在唯一性定理可知，对任意正整数 $m=1,2,\cdots$，方程(6)~(7)存在唯一的局部解 $\xi_m(x,t)=(u_m(x,t),B_m(x,t))$，其中 $\xi_m(x,t)$ 由(5)式给出，$t\in[\tau,t_m],\tau<t_m\le T$。

第二步 先验估计

① $(6)_1$ 式和 $(6)_2$ 式分别乘以 $d_{jm}(t)$ 和 $e_{jm}(t)$，并对 $j=1,\cdots,m$ 求和，对任意 $t\in[\tau,t_m]$，得

$$\begin{cases}\left\langle\dfrac{\partial u_m}{\partial t},u_m\right\rangle+b(u_m,u_m,u_m)-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\langle\Delta u_m,u_m\rangle-Sb(B_m,B_m,u_m)+\alpha(u_m,u_m)=\varepsilon\langle f,u_m\rangle,\\ \left\langle\dfrac{\partial B_m}{\partial t},B_m\right\rangle+b(u_m,B_m,B_m)-b(B_m,u_m,B_m)+\dfrac{1}{\mathrm{Rm}}\left\langle\widetilde{\operatorname{curl}}(\operatorname{curl}B_m),B_m\right\rangle=0,\end{cases} \tag{9}$$

由于 $b(u_m,u_m,u_m)=0$ 和 $b(u_m,B_m,B_m)=0$，所以有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\|\nabla u_m\|^2-Sb(B_m,B_m,u_m)+\alpha\|u_m\|^2=\varepsilon\langle f,u_m\rangle,\\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|B_m\|^2-b(B_m,u_m,B_m)+\frac{1}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\,B_m\|^2=0,\end{cases}\tag{10}$$

应用 $b(B_m,B_m,u_m)=-b(B_m,u_m,B_m)$，Hölder 不等式和 Young’s 不等式，对任意 $t\in[\tau,t_m]$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2+S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|B_m\|^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\|\nabla u_m\|^2+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\,B_m\|^2+2\alpha\|u_m\|^2\\&=2\varepsilon\langle f,u_m\rangle\le 2\varepsilon\|f\|_{V_1^*}\|\nabla u_m\|\le\frac{1}{\mathrm{Re}}\|\nabla u_m\|^2+\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\|f\|_{V_1^*}^2,\end{aligned}\tag{11}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2+S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|B_m\|^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\|\nabla u_m\|^2+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\,B_m\|^2+2\alpha\|u_m\|^2\le\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\|f\|_{V_1^*}^2.\tag{12}$$

对(12)式两边在 (τ,t) 上积分，可得

$$\begin{aligned}&\|u_m(t)\|^2+S\|B_m(t)\|^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\tau^t\|\nabla u_m(s)\|^2\,\mathrm{d}s+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^t\|\mathrm{curl}\,B_m(s)\|^2\,\mathrm{d}s+2\alpha\int_\tau^t\|u_m(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\&\le\|u_{m\tau}\|^2+S\|B_{m\tau}\|^2+\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\int_\tau^t\|f(s)\|_{V_1^*}^2\,\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{13}$$

结合 $f\in L^2(\tau,T;H_1)\subset L^2(\tau,T;V_1^*)$，可得

$$\|u_m(t)\|^2+S\|B_m(t)\|^2\le K_1,\tag{14}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\tau^t\|\nabla u_m\|^2\,\mathrm{d}s+\frac{S}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^t\|\mathrm{curl}\,B_m(s)\|^2\mathrm{d}s\le K_1,\tag{15}$$

其中 $K_1>0$ 与 $S,\mathrm{Re},\varepsilon,\tau,T$ 和 ξ_τ,f 的范数有关。

则我们可得

对任意 $m=1,2,\cdots,t_m=T$. 和

$$\begin{aligned}&\{u_m\}\text{在}L^2(\tau,T;V_1)\cap L^\infty(\tau,T;H_1)\text{中有界},\\&\{B_m\}\text{在}L^2(\tau,T;V_2)\cap L^\infty(\tau,T;H_2)\text{中有界},\end{aligned}\tag{16}$$

即

$$\{\xi_m\}\text{在}L^2(\tau,T;V)\cap L^\infty(\tau,T;H)\text{中有界}.\tag{17}$$

② 定义投影 $P_m=(P_m^1,P_m^2):H\to span\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$ 为

$$\begin{cases}P_m^1:H_1\to span\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m\},\\ P_m^2:H_2\to span\{\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots,\varsigma_m\},\end{cases}$$

并且满足

$$\begin{cases}P_m^1h_1=\sum_{j=1}^m(h_1,\sigma_j)\sigma_j,\\ P_m^2h_2=\sum_{j=1}^m(h_2,\varsigma_j)\varsigma_j,\end{cases}\tag{18}$$

其中 $w_j=(\sigma_j,\varsigma_j)$，$\|P_m^1\|_{\mathcal{L}(V_1,V_1)}\le1$，$\|P_m^1\|_{\mathcal{L}(V_2,V_2)}\le1$，$(P_m^i)^*=P_m^i,i=1,2$。

将$(6)_1$式和$(6)_2$式分别乘以 $\sigma_j(t)$ 和 $\varsigma_j(t)$，并且对 $j=1,\cdots,m$ 求和，则对任意 $t\in[\tau,T]$，可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}=-P_m^1\left(\left(u_m\cdot\nabla\right)u_m\right)+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}P_m^1\left(\Delta u_m\right)+SP_m^1\left(\left(B_m\cdot\nabla\right)B_m\right)-\alpha P_m^1u_m+\varepsilon P_m^1 f,\\ \dfrac{\partial B_m}{\partial t}=-P_m^2\left(\left(u_m\cdot\nabla\right)B_m\right)+P_m^2\left(\left(B_m\cdot\nabla\right)u_m\right)-\dfrac{1}{Rm}P_m^2\left(\widetilde{\mathrm{curl}}\left(\mathrm{curl}\,B_m\right)\right),\end{cases}\tag{19}$$

由(16)可知，$\{u_m\}$ 在 $L^2\left(\tau,T;V_1\right)$ 中有界，因此 $P_m^1\left(u_m\right)$，$P_m^1\left(\Delta u_m\right)$ 在 $L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)$ 中有界。又因 $f\in L^2\left(\tau,T;H_1\right)\subset L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)$ 可知，$P_m^1 f$ 在 $L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)$ 中有界。由(16)式可证得 $\left(u_m\cdot\nabla\right)u_m$，$\left(B_m\cdot\nabla\right)B_m$ 在 $L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)$ 中有界，$\left(u_m\cdot\nabla\right)B_m$，$\left(B_m\cdot\nabla\right)u_m$ 和 $\widetilde{\mathrm{curl}}\left(\mathrm{curl}\,B_m\right)$ 在 $L^2\left(\tau,T;V_2^*\right)$ 有界(详细证明可见文献[9])。因此有 $P_m^1\left(\left(B_m\cdot\nabla\right)B_m\right)$，$P_m^1\left(\left(u_m\cdot\nabla\right)u_m\right)$ 在 $L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)$ 中有界，$P_m^2\left(\left(u_m\cdot\nabla\right)B_m\right)$，$P_m^2\left(\left(B_m\cdot\nabla\right)u_m\right)$，和 $P_m^2\left(\widetilde{\mathrm{curl}}\left(\mathrm{curl}\,B_m\right)\right)$ 在 $L^2\left(\tau,T;V_2^*\right)$ 中有界。

结合(19)式可得

$$\left\{\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\}\text{在 }L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)\text{中是有界的},\tag{20}$$

$$\left\{\frac{\partial B_m}{\partial t}\right\}\text{在 }L^2\left(\tau,T;V_2^*\right)\text{中是有界的},\tag{21}$$

因此有

$$\left\{\frac{\partial \xi_m}{\partial t}\right\}\text{在 }L^2\left(\tau,T;V^*\right)\text{中是有界的},\tag{22}$$

③ 将(6)$_1$式和(6)$_2$式分别乘以 $\iota_j d_{jm}(t)$ 和 $\kappa_j e_{jm}(t)$，并对 $j=1,\cdots,m$ 求和。由于 $\mathcal{A}_1u_m=\sum_{j=1}^{m}\iota_j d_{jm}(t)\sigma_j$，$\mathcal{A}_1B_m=\sum_{j=1}^{m}\kappa_j e_{jm}(t)\varsigma_j$，则对任意的 $t\in[\tau,T]$，有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla u_m\right\|^2+b\left(u_m,u_m,-\Delta u_m\right)+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left\|\Delta u_m\right\|^2-Sb\left(B_m,B_m,-\Delta u_m\right)+\alpha\left(u_m,-\Delta u_m\right)=\varepsilon\left(f,-\Delta u_m\right),\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{curl}\,B_m\right\|^2+b\left(u_m,B_m,-\Delta B_m\right)-b\left(B_m,u_m,-\Delta B_m\right)+\dfrac{1}{\mathrm{Rm}}\left\|\Delta B_m\right\|^2=0,\end{cases}\tag{23}$$

由双线性算子 $\mathcal{B}$ 的性质，Hölder 不等式及 Young’s 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla u_m\right\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{curl}\,B_m\right\|^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left\|\Delta u_m\right\|^2+\frac{2}{\mathrm{Rm}}\left\|\Delta B_m\right\|^2+2\alpha\left\|\nabla u_m\right\|^2\\&=2\varepsilon\left(f,-\Delta u_m\right)-2\mathcal{B}_0\left(\xi_m,\xi_m,\mathcal{A}\xi_m\right)\\&\le 2\varepsilon\|f\|\left\|\Delta u_m\right\|+2C\left\|\xi_m\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|\xi_m\right\|_*\left\|\mathcal{A}\xi_m\right\|^{\frac{3}{2}}\\&\le\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\|\Delta u_m\right\|^2+\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\|f\|^2+\frac{3}{4}\left\|\mathcal{A}\xi_m\right\|^2+4C^4\left\|\xi_m\right\|^2\left\|\xi_m\right\|_*^4\\&\le\frac{7}{4\,\mathrm{Re}}\left\|\Delta u_m\right\|^2+\frac{3}{4\,\mathrm{Rm}}\left\|\Delta B_m\right\|^2+\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\|f\|^2+C\left\|\xi_m\right\|_*^4,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\nabla u_m\right\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{curl}\,B_m\right\|^2+\frac{1}{4\,\mathrm{Re}}\left\|\Delta u_m\right\|^2+\frac{5}{4\mathrm{Rm}}\left\|\Delta B_m\right\|^2+2\alpha\left\|\nabla u_m\right\|^2\\&\le\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\|f\|^2+C\left\|\xi_m\right\|_*^4,\quad\forall t\in[\tau,T],\end{aligned}\tag{24}$$

其中，$C>0$ 依赖于 Ω 的测度，ξ_τ,f 的范数和正参数 $S,\mathrm{Re},\mathrm{Rm}$。

对(24)式应用 Gronwall 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2+\left\|\operatorname{curl} B_m\right\|^2 \\
&\le e^{\int_\tau^t C\|\xi_m\|_*^2 \mathrm{d}s}\left(\left\|\nabla u_{m\tau}\right\|^2+\left\|\operatorname{curl} B_{m\tau}\right\|^2+\operatorname{Re}\varepsilon^2\int_\tau^t\left\|f(s)\right\|^2 \mathrm{d}s\right) \\
&\le e^{CK_1}\left(\left\|\nabla u_\tau\right\|^2+\left\|\operatorname{curl} B_\tau\right\|^2+\operatorname{Re}\varepsilon^2\int_\tau^t\left\|f(s)\right\|^2 \mathrm{d}s\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

由 $\xi_\tau=(u_\tau,B_\tau)\in V$，$f\in L^2(\tau,T;H_1)$ 和(17)式可知，存在正常数 K_2 (依赖于 Ω 的测度，ξ_τ,f 的范数和参数 $S,\operatorname{Re},\operatorname{Rm},\tau,T,\varepsilon$)，使得

$$
\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2+\left\|\operatorname{curl} B_m(t)\right\|^2\le K_2,\quad \forall t\in[\tau,T]. \tag{26}
$$

在 $[\tau,T]$ 上关于时间对(24)式积分，可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2+\left\|\operatorname{curl} B_m\right\|^2+\frac{1}{4\operatorname{Re}}\int_\tau^t\left\|\Delta u_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s+\frac{5}{4\operatorname{Rm}}\int_\tau^t\left\|\Delta B_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s+2\alpha\int_\tau^t\left\|\nabla u_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\le\left\|\Delta u_{m\tau}\right\|^2+\left\|\operatorname{curl} B_{m\tau}\right\|^2+\operatorname{Re}\varepsilon^2\int_\tau^t\left\|f(s)\right\|^2 \mathrm{d}s+C\int_\tau^t\left\|\xi_m(s)\right\|_*^4 \mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

根据 $\xi_\tau=(u_\tau,B_\tau)\in V$，$f\in L^2(\tau,T;H_1)$，(8)式，(16)式和(26)式可知，存在正常数 K_3 (依赖于 Ω 的测度，ξ_τ,f 的范数和参数 $S,\operatorname{Re},\operatorname{Rm},\tau,T,\varepsilon$)，使得

$$
\int_\tau^t\left\|\Delta u_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s\le K_3,\ \int_\tau^t\left\|\Delta B_m(s)\right\|^2 \mathrm{d}s\le K_3. \tag{28}
$$

由(26)式和(28)式可知

$$
\begin{aligned}
&\{u_m\}\text{ 在 }L^2(\tau,T;D(\mathcal{A}_1))\cap L^\infty(\tau,T;V_1)\text{ 中有界,}\\
&\{B_m\}\text{ 在 }L^2(\tau,T;D(\mathcal{A}_2))\cap L^\infty(\tau,T;V_2)\text{ 中有界,}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

即

$$
\{\xi_m\}\text{ 在 }L^2(\tau,T;D(\mathcal{A}))\cap L^\infty(\tau,T;V)\text{ 中有界.} \tag{30}
$$

④ 将$(6)_1$式和$(6)_2$式分别乘以 $\frac{\partial d_{jm}}{\partial t}(t)$ 和 $\frac{\partial e_{jm}}{\partial t}(t)$，并对 $j=1,\cdots,m$ 求和。对任意 $t\in[\tau,T]$，得

$$
\begin{cases}
\left\|\dfrac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+b\left(u_m,u_m,\dfrac{\partial u_m}{\partial t}\right)+\dfrac{1}{2\operatorname{Re}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u_m\right\|^2-Sb\left(B_m,B_m,\dfrac{\partial u_m}{\partial t}\right)+\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u_m\right\|^2=\varepsilon\left(f,\dfrac{\partial u_m}{\partial t}\right),\\
\left\|\dfrac{\partial B_m}{\partial t}\right\|^2+b\left(u_m,B_m,\dfrac{\partial B_m}{\partial t}\right)-b\left(B_m,u_m,\dfrac{\partial B_m}{\partial t}\right)+\dfrac{1}{2\operatorname{Rm}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\operatorname{curl} B_m\right\|^2=0,
\end{cases}
\tag{31}
$$

由双线性算子 $\mathcal{B}$ 的性质，(30)式，Hölder 不等式及 Young's 不等式可得，对任意 $t\in[\tau,T]$，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\operatorname{Re}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla u_m\right\|^2+\frac{1}{\operatorname{Rm}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\operatorname{curl} B_m\right\|^2+2\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+2\left\|\frac{\partial B_m}{\partial t}\right\|^2+\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u_m\right\|^2 \\
&=2\varepsilon\left(f,\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)-2\mathcal{B}_0\left(\xi_m,\xi_m,\frac{\partial \xi_m}{\partial t}\right) \\
&\le 2\varepsilon\left\|f\right\|\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|+C\left\|\xi_m\right\|^{\frac12}\left\|\xi_m\right\|_*\left\|\mathcal{A}\xi_m\right\|^{\frac12}\left\|\frac{\partial \xi_m}{\partial t}\right\| \\
&\le\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+2\varepsilon^2\left\|f\right\|^2+K_4\left\|\mathcal{A}\xi_m\right\|+\frac12\left\|\frac{\partial B_m}{\partial t}\right\|^2,
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_m\|^2+\frac{1}{\mathrm{Rm}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathrm{curl}\ B_m\|^2+\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+\frac{3}{2}\left\|\frac{\partial B_m}{\partial t}\right\|^2+\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2\\&\le 2\varepsilon^2\|f\|^2+K_4\|\mathcal{A}\xi_m\|,\end{aligned}\tag{32}$$

其中，$K_4>0$ 依赖于 Ω 的测度，ξ_τ, f 的范数和正参数 $S,\mathrm{Re},\mathrm{Rm},\tau,T,\varepsilon$。

在 (τ,t) 上关于时间对(32)式积分，并根据(6)式和 Hölder 不等式。对任意 $t\in[\tau,T]$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Re}}\|\nabla u_m(t)\|^2+\frac{1}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\ B_m(t)\|^2+\int_\tau^t\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}(s)\right\|^2\mathrm{d}s+\frac{3}{2}\int_\tau^t\left\|\frac{\partial B_m}{\partial t}(s)\right\|^2\mathrm{d}s+\alpha\|u_m(t)\|^2\\&\le\frac{1}{\mathrm{Re}}\|\nabla u_{m\tau}\|^2+\frac{1}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\ B_{m\tau}\|^2+2\varepsilon^2\int_\tau^t\|f(s)\|^2\mathrm{d}s+K_4(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\tau^t\|\mathcal{A}\xi_m(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}+\alpha\|u_{m\tau}\|^2,\end{aligned}\tag{33}$$

由 $\xi_\tau=(u_\tau,B_\tau)\in V\subset H,\ f\in L^2(\tau,T;H_1)$，(16)式和(30)式可知，存在正常数 K_5（依赖于 Ω 的测度，ξ_τ, f 的范数和参数 $S,\mathrm{Re},\mathrm{Rm},\tau,T,\varepsilon$），使得

$$\int_\tau^t\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}(s)\right\|^2\mathrm{d}s\le K_5,\quad\int_\tau^t\left\|\frac{\partial B_m}{\partial t}(s)\right\|^2\mathrm{d}s\le K_5.\tag{34}$$

由(34)式可知

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\}\text{在 }L^2(\tau,T;H_1)\text{ 中有界},\\&\left\{\frac{\partial B_m}{\partial t}\right\}\text{在 }L^2(\tau,T;H_2)\text{ 中有界},\end{aligned}\tag{35}$$

即

$$\left\{\frac{\partial \xi_m}{\partial t}\right\}\text{在 }L^2(\tau,T;H)\text{ 中有界}.\tag{36}$$

⑤ 由(30)式和(36)式可知，$\{\xi_m\}$ 在 $L^2(\tau,T;D(\mathcal{A}))$ 中有界，$\left\{\frac{\partial \xi_m}{\partial t}\right\}$ 在 $L^2(\tau,T;H)$ 中有界，应用引理 3 可推出

$$\xi_m\in C^0([\tau,T];V).\tag{37}$$

第三步 取极限

由(17)式可知

$$\frac{\partial\xi_m}{\partial t}=\left(\frac{\partial u_m}{\partial t},\frac{\partial B_m}{\partial t}\right)\xrightarrow{\text{强}}\frac{\partial\xi}{\partial t}=\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial B}{\partial t}\right)\quad\text{在 }\mathcal{D}'(\tau,T;H)\text{ 中},$$

因此序列 $\left\{\frac{\partial \xi_m}{\partial t}\right\}$ 的弱极限就等于 $\frac{\partial\xi}{\partial t}$。

根据(22)式和(36)式可得

$$\frac{\partial\xi_m}{\partial t}\xrightarrow{\text{弱}}\frac{\partial\xi}{\partial t}\quad\text{在 }L^2(\tau,T;V^*)\text{ 中},\tag{38}$$

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial t} \xrightarrow{\text{弱}} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad 在 L^2(\tau, T; H) 中, \tag{39}$$

由引理 1 和引理 2 可得，存在$\{\xi_m\}$的子序列$\{\xi_{mk}\}$，使得

$$\{\xi_{mk}\} \xrightarrow{\text{弱}} \xi \ \ 在 L^2(\tau, T; D(\mathcal{A})) 中, \tag{40}$$

$$\{\xi_{mk}\} \xrightarrow{\text{弱*}} \xi \ \ 在 L^\infty(\tau, T; V) 中, \tag{41}$$

由(39)式，(40)式和致密性定理可得

$$\{\xi_{mk}\} \xrightarrow{\text{强}} \xi \ \ 在 L^2(\tau, T; V) 中. \tag{42}$$

因此，ξ是方程(1)~(2)的强解。

b. 唯一性

设$\xi, \tilde{\xi}$分别是不同初值$\xi_\tau, \widetilde{\xi_\tau} \in V$和不同的外力$f, \tilde{f}$的方程(1)~(2)的强解。

记$\overline{\xi} = \xi - \tilde{\xi} = (\overline{u}, \overline{B})$，则$\overline{\xi}(x,t)$是以下方程的强解。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} - \dfrac{1}{\text{Re}} \Delta \overline{u} + (u \cdot \nabla) u - (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} + S \nabla \dfrac{|B|^2}{2} - S \nabla \dfrac{|\tilde{B}|^2}{2} - S(B \cdot \nabla) B \\ \quad + S(\tilde{B} \cdot \nabla) \tilde{B} + \alpha u - \alpha \tilde{u} = \varepsilon(f - \tilde{f}), \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau, T), \\ \dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \dfrac{1}{\text{Rm}} \widetilde{\text{curl}}(\text{curl}\, \overline{B}) + (u \cdot \nabla) B - (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{B} - (B \cdot \nabla) u + (\tilde{B} \cdot \nabla) \tilde{u} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau, T), \\ \text{div}\, \overline{u}(x,t) = 0, \ \text{div}\, \overline{B}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau, T), \\ \overline{\xi_\tau} = \xi_\tau - \widetilde{\xi_\tau}, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{43}$$

方程(43)满足以下边界条件

$$\begin{cases} \overline{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \overline{B} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ 和 } \text{curl}\, \overline{B} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{44}$$

其中，$\boldsymbol{n}$是边界$\partial\Omega$上的单位外法向量。

将$(43)_1$式乘以$\varphi(t)$，$(43)_2$式乘以$\rho(t)$，可得

$$\left(\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial t}, \psi\right) + ((\overline{\xi}, \psi)) + \mathcal{B}_0(\xi, \xi, \psi) - \mathcal{B}_0(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}, \psi) + \alpha(u, \varphi) - \alpha(\tilde{u}, \varphi) = \varepsilon((f - \tilde{f}), \varphi), \tag{45}$$

其中，

$$\left(\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial t}, \psi\right) = \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \rho\right),$$

$$((\overline{\xi}, \psi)) = \frac{1}{\text{Re}}(\nabla \overline{u}, \nabla \varphi) + \frac{1}{Rm}(\text{curl}\, \overline{B}, \text{curl}\, \rho),$$

$$\mathcal{B}_0(\xi, \xi, \psi) = b(u, u, \varphi) - Sb(B, B, \varphi) - b(u, B, \rho) - b(B, u, \rho),$$

$$\mathcal{B}_0(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}, \psi) = b(\tilde{u}, \tilde{u}, \varphi) - Sb(\tilde{B}, \tilde{B}, \varphi) - b(\tilde{u}, \tilde{B}, \rho) - b(\tilde{B}, \tilde{u}, \rho),$$

在(45)式中令$\psi(x,t) = \overline{\xi}(x,t)$，并利用 Hölder 不等式，Young’s 不等式和 Poincaré 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\bar{\xi}(t)\right\|^2+\left\|\bar{\xi}(t)\right\|_*^2\\
&=\mathcal{B}_0\left(\tilde{\xi},\tilde{\xi},\bar{\xi}\right)-\mathcal{B}_0\left(\xi,\xi,\bar{\xi}\right)+\alpha\left(\tilde{u},\bar{u}\right)-\alpha\left(u,\bar{u}\right)+\varepsilon\left(\left(f-\tilde{f}\right),\bar{u}\right)\\
&=-b\left(\bar{u},u,\bar{u}\right)-Sb\left(\bar{B},\bar{u},\tilde{B}\right)+Sb\left(B,\bar{B},\bar{u}\right)+b\left(\bar{u},\bar{B},\tilde{B}\right)+b\left(\bar{B},\tilde{u},\bar{B}\right)\\
&\quad+b\left(B,\bar{u},\bar{B}\right)+\alpha\left(\tilde{u}-u,\bar{u}\right)+\varepsilon\left(\left(f-\tilde{f}\right),\bar{u}\right)\\
&\le M_1\|\bar{u}\|\|\nabla\bar{u}\|\|\nabla u\|+M_2\|\bar{B}\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|\|\tilde{B}\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ \tilde{B}\|^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+M_3\|B\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ B\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|\|\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}+M_4\|\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|\|\tilde{B}\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ \tilde{B}\|^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+M_5\|\bar{B}\|\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|\|\nabla\tilde{u}\|+M_6\|B\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ B\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\bar{u}\|\|\bar{B}\|^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|^{\frac{1}{2}}\\
&\quad-\alpha\|\bar{u}\|^2+\varepsilon\left\|f-\tilde{f}\right\|_{V_1^*}\|\nabla\bar{u}\|\\
&\le\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\|\nabla\bar{u}\|^2+\frac{3}{8Rm}\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|^2+M_1'\|\bar{u}\|^2\|\nabla u\|^2+M_2'\|\bar{B}\|\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|\|\tilde{B}\|\|\mathrm{curl}\ \tilde{B}\|\\
&\quad+M_3'\|B\|\|\mathrm{curl}\ B\|\|\bar{u}\|\|\nabla\bar{u}\|+M_4'\|\bar{u}\|\|\nabla\bar{u}\|\|\tilde{B}\|\|\mathrm{curl}\ \tilde{B}\|+M_5'\|\bar{B}\|^2\|\nabla\tilde{u}\|^2\\
&\quad+M_6'\|B\|\|\mathrm{curl}\ B\|\|\bar{B}\|\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|+2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\left\|f-\tilde{f}\right\|_{V_1^*}^2\\
&\le\frac{3}{4\,\mathrm{Re}}\|\nabla\bar{u}\|^2+\frac{5}{8Rm}\|\mathrm{curl}\ \bar{B}\|^2+M'\|\bar{u}\|^2\|\nabla u\|^2+M_2^*\|\bar{B}\|^2\|\mathrm{curl}\ \tilde{B}\|^2\\
&\quad+M_3^*\|\mathrm{curl}\ B\|^2\|\bar{u}\|^2+M_4^*\|\bar{u}\|^2\|\mathrm{curl}\ \tilde{B}\|^2+M_5'\|\bar{B}\|^2\|\nabla\tilde{u}\|^2\\
&\quad+M_6^*\|\mathrm{curl}\ B\|^2\|\bar{B}\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\left\|f-\tilde{f}\right\|_{V_1^*}^2,
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\bar{\xi}(t)\right\|^2+\left\|\bar{\xi}(t)\right\|_*^2\\
&\le 2K_6\left(\|\bar{u}\|^2+\|\bar{B}\|^2\right)\left(\|\nabla u\|^2+\|\mathrm{curl}\ B\|^2+\|\nabla\tilde{u}\|^2+\|\mathrm{curl}\ \tilde{B}\|^2\right)+2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\left\|f-\tilde{f}\right\|_{V_1^*}^2\\
&\le K_7\left\|\bar{\xi}(t)\right\|^2\left(\left\|\xi(t)\right\|_*^2+\left\|\tilde{\xi}(t)\right\|_*^2\right)+2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\left\|f-\tilde{f}\right\|_{V_1^*}^2,
\end{aligned}
\tag{46}
$$

其中 $K_6=\max\left\{M_1',M_2^*,M_3^*,M_4^*,M_5',M_6^*\right\}$，且 $M_i,M_i'(i=1,2,\cdots,6)$ 是依赖于 Ω 的测度和正参数 $S,\mathrm{Re},\mathrm{Rm}$ 的正常数，$M_j^*(j=2,3,4,6)$ 和 K_7 是依赖于 Ω 的测度，ξ_τ,f 的范数和参数 $S,\mathrm{Re},\mathrm{Rm},\tau,T,\varepsilon$ 的正常数。

对(46)式应用 Gronwall 不等式可得

$$
\left\|\bar{\xi}(t)\right\|^2\le \mathrm{e}^{\int_\tau^t K_7\left(\|\xi(s)\|_*^2+\|\tilde{\xi}(s)\|_*^2\right)\mathrm{d}s}\left(\left\|\overline{\xi_\tau}\right\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\int_\tau^t\left\|f(s)-\tilde{f}(s)\right\|_{V_1^*}^2\mathrm{d}s\right),
\tag{47}
$$

由于 $\overline{\xi_\tau}=\xi_\tau-\widetilde{\xi_\tau}=0$，$f(t)-\tilde{f}(t)=0$，所以有 $\left\|\bar{\xi}(t)\right\|^2\le 0$。由此可证得强解的唯一性。

c. 能量等式(3)和不等式(4)

由方程(1)可得，对任意的 $\tau\le s\le t\le T$，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u(s)\|^2+S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|B(s)\|^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\|\nabla u(s)\|^2+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\ B(s)\|^2+2\alpha\|u(s)\|^2\\
&=2\varepsilon\left\langle f(s),u(s)\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{48}
$$

在(τ,t)上对上式积分，可得能量等式(3)

$$\|u(t)\|^2+S\|B(t)\|^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\int_\tau^t\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^t\|\mathrm{curl}\,B(s)\|^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_\tau^t\|u(s)\|^2\mathrm{d}s$$
$$=\|u_\tau\|^2+S\|B_\tau\|^2+2\varepsilon\int_\tau^t\langle f(s),u(s)\rangle\mathrm{d}s,$$

利用(48)式，Hölder 不等式及 Young’s 不等式，对任意的$\tau\le s\le t\le T$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u(s)\|^2+S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|B(s)\|^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\|\nabla u(s)\|^2+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\,B(s)\|^2+2\alpha\|u(s)\|^2\le\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\|f(s)\|_{V_1^*}^2.$$

在(τ,t)上对上式积分，可得能量不等式(4)

$$\|u(t)\|^2+S\|B(t)\|^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\tau^t\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^t\|\mathrm{curl}\,B(s)\|^2\mathrm{d}s+2\alpha\int_\tau^t\|u(s)\|^2\mathrm{d}s$$
$$\le\|u_\tau\|^2+S\|B_\tau\|^2+\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\int_\tau^t\|f(s)\|_{V_1^*}^2\mathrm{d}s.$$

4. 弱解

记$\mathbb{U}_{\tau,T}=\left\{\psi\in L^2(\tau,T;V):\frac{\partial\psi}{\partial t}\in L^2(\tau,T;H),\psi(T)=0\right\}$，其中$\psi(\varphi,\rho)$。

定义 1 设$\xi_\tau=(u_\tau,B_\tau)\in H$，$f\in L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)(-\infty<\tau\le T<\infty)$，如果$\xi=(u,B)$满足以下条件，

(1) $\xi\in L^\infty(\tau,T;H)\cap L^2(\tau,T;V)\cap C^0([\tau,T];H),\frac{\partial\xi}{\partial t}\in L^2\left(\tau,T;V^*\right)$，

(2) 存在序列$\xi_{m\tau}\in V$和$f_m\in L^2(\tau,T;H_1),m=1,2,\cdots$，满足

$$\xi_{m\tau}\xrightarrow{强}\xi_\tau\in H,\quad f_m\xrightarrow{强}f\in L^2\left(\tau,T;V_1^*\right),$$

并且

$$\xi_m\xrightarrow{强}\xi\in C^0([\tau,T];H),$$

其中，ξ_m是方程(1)~(2)对应于$(\xi_{m\tau},f_m)$的唯一的强解。

(3) 对任意的$\psi\in\mathbb{U}_{\tau,T}$，有

$$-\int_\tau^T\left(\xi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\int_\tau^T((\xi,\psi))\mathrm{d}t+\int_\tau^T\mathcal{B}_0(\xi,\xi,\psi)\mathrm{d}t+\int_\tau^T\alpha(u,\varphi)\mathrm{d}t=(\xi_\tau,\psi(\tau))+\varepsilon\int_\tau^T(f,\varphi)\mathrm{d}t,$$

其中

$$(\xi,\psi)=(u,\varphi)+(B,\rho),$$

$$\left(\xi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\left(u,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\left(B,\frac{\partial\rho}{\partial t}\right),$$

$$((\xi,\psi))=\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla u,\nabla\varphi)+\frac{1}{\mathrm{Rm}}(\mathrm{curl}\,B,\mathrm{curl}\,\rho),$$

$$\mathcal{B}_0(\xi,\xi,\psi)=b(u,u,\varphi)-Sb(B,B,\varphi)-b(u,B,\rho)-b(B,u,\rho),$$

则称$\xi=(u,B)$是方程(1)~(2)的弱解。

根据上述弱解的定义可知，方程(1)~(2)的强解必是弱解。

定理 2 设$-\infty<\tau\le T<+\infty$，$f\in L^2\left(\tau,T;V_1^*\right)$，则对任意的$\xi_\tau=(u_\tau,B_\tau)\in H$，方程(1)~(2)存在唯一的弱解$\xi=(u,B)$。另外，对任意的$\tau\le s\le t\le T$，$\xi=(u,B)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u(s)\|^2+S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|B(s)\|^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\|\nabla u(s)\|^2+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\|\mathrm{curl}\,B(s)\|^2+2\alpha\|u(s)\|^2=2\varepsilon\langle f(s),u(s)\rangle, \tag{49}$$

和

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|^2+S\|B(t)\|^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\tau^t\|\nabla u(s)\|^2\,\mathrm{d}s+\frac{2S}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^t\|\mathrm{curl}\,B(s)\|^2\,\mathrm{d}s+2\alpha\int_\tau^t\|u(s)\|^2\,\mathrm{d}s\\&\le\|u_\tau\|^2+S\|B_\tau\|^2+\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\int_\tau^t\|f(s)\|_{V_1^*}^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{50}$$

证明：a. 存在性

设 $\xi_{m\tau}\in V$， $f_m\in L^2(\tau,T;H_1)$，并当 $m\to\infty$ 时，有

$$\xi_{m\tau}\xrightarrow{强}\xi_\tau\in H,\quad f_m\xrightarrow{强}f\in L^2(\tau,T;V_1^*). \tag{51}$$

对任意的 $(\xi_{m\tau},f_m),m=1,2,\cdots$，则存在唯一的强解 $\xi_m=(u_m,B_m)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_m}{\partial t}+(u_m\cdot\nabla)u_m-\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u_m+\nabla p+S\nabla\dfrac{|B_m|^2}{2}-S(B_m\cdot\nabla)B_m+\alpha u_m=\varepsilon f_m, & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_\tau,\\ \dfrac{\partial B_m}{\partial t}+(u_m\cdot\nabla)B_m-(B_m\cdot\nabla)u_m+\dfrac{1}{\mathrm{Rm}}\widetilde{\mathrm{curl}}(\mathrm{curl}\,B_m)=0, & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_\tau,\\ \mathrm{div}\,u_m=0,\quad \mathrm{div}\,B_m=0,\quad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_\tau,\\ u_m(\tau)=u_{m\tau},\quad B_m(\tau)=B_{m\tau},\quad x\in\Omega,\end{cases} \tag{52}$$

和以下边界条件

$$\begin{cases}u_m=0,\quad x\in\partial\Omega,\\ B_m\cdot\boldsymbol{n}=0\,\text{和}\,\mathrm{curl}\,B_m=0,\quad x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{53}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

① 由(17)式可知，$\{\xi_m\}$ 在 $L^2(\tau,T;V)\cap L^\infty(\tau,T;H)$ 中有界。由引理 1 和引理 2 可知，我们可以选取子序列，仍记为 $\{\xi_m\}=\{(u_m,B_m)\}$，满足

$$\xi_m=(u_m,B_m)\xrightarrow{弱}\xi=(u,B)\quad 在\ L^2(\tau,T;V)\ 中, \tag{54}$$

$$\xi_m=(u_m,B_m)\xrightarrow{弱*}\xi=(u,B)\quad 在\ L^2(\tau,T;H)\ 中, \tag{55}$$

② (22)式可知

$$\left\{\frac{\partial\xi_m}{\partial t}\right\}在\ L^2(\tau,T;V^*)\ 中是有界的,$$

同样，我们也可以选取子序列，仍记为 $\left\{\dfrac{\partial\xi_m}{\partial t}\right\}=\left\{\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial t},\dfrac{\partial B_m}{\partial t}\right)\right\}$，满足

$$\frac{\partial\xi_m}{\partial t}=\left(\frac{\partial u_m}{\partial t},\frac{\partial B_m}{\partial t}\right)\xrightarrow{弱}\frac{\partial\xi}{\partial t}=\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial B}{\partial t}\right)\quad 在\ L^2(\tau,T;V^*)\ 中, \tag{56}$$

且由致密性定理可得

$$\xi_m=(u_m,B_m)\xrightarrow{强}\xi=(u,B)\quad 在\ L^2(\tau,T;H)\ 中且几乎处处在\ \Omega\times(\tau,T)\ 中强收敛. \tag{57}$$

③ (47)式可知，对任意的 $t\in[\tau,T]$，有

$$\left\|\xi_m(t)-\xi_n(t)\right\|^2 \le \mathrm{e}^{\int_\tau^t K_7\left(\|\xi_m(s)\|_*^2+\|\xi_n(s)\|_*^2\right)\mathrm{d}s}\left(\left\|\xi_{m\tau}-\xi_{n\tau}\right\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\int_\tau^t\left\|f_m(s)-f_n(s)\right\|_{V_1^*}^2\mathrm{d}s\right)$$
$$\le \mathrm{e}^{K_8}\left(\left\|\xi_{m\tau}-\xi_{n\tau}\right\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon^2\int_\tau^t\left\|f_m(s)-f_n(s)\right\|_{V_1^*}^2\mathrm{d}s\right), \tag{58}$$

则 $\{\xi_m\}$ 在 $C^0([\tau,T];H)$ 中是一柯西列。

因此，根据极限的唯一性和(54)式可推出

$$\xi_m=(u_m,B_m)\xrightarrow{强}\xi=(u,B) \quad 在 C^0([\tau,T];H)中 \tag{59}$$

④ 对任意的函数 $\psi=(\varphi,\rho)\in\mathbb{U}_{\tau,T}$， ξ_m 满足

$$\int_\tau^T\left(\frac{\partial\xi_m}{\partial t},\psi\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_\tau^T(\nabla u_m,\nabla\varphi)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{Rm}}\int_\tau^T(\mathrm{curl}\,B_m,\mathrm{curl}\,\rho)\mathrm{d}t$$
$$+\int_\tau^T\mathcal{B}_0(\xi_m,\xi_m,\psi)\mathrm{d}t+\alpha\int_\tau^T(u_m,\varphi)\mathrm{d}t=\varepsilon\int_\tau^T(f,\varphi)\mathrm{d}t, \tag{60}$$

由于 $\psi\in L^2(\tau,T;V)$，所以有

$$\int_\tau^T\mathcal{B}_0(\xi_m,\xi_m,\psi)\mathrm{d}t=-\int_\tau^T\mathcal{B}_0(\xi_m,\psi,\xi_m)\mathrm{d}t,$$

由(17)式可知

$$\xi_m\in L^4\left(\tau,T;L^4(\Omega)\times L^4(\Omega)\right),$$

则 $u_m^iu_m^j, B_m^iB_m^j, u_m^iB_m^j$ 和 $B_m^iu_m^j$ 在 $L^2\left(\tau.T;L^2(\Omega)\right)$ 中有界，所以，存在子序列，仍记为 $\{u_m^iu_m^j\},\{B_m^iB_m^j\},\{u_m^iB_m^j\}$ 和 $\{B_m^iu_m^j\}$，当 $m\to\infty$ 时，有

$$u_m^iu_m^j\xrightarrow{弱}\mathcal{X}_{i,j} \quad 在 L^2\left(\tau,T;L^2(\Omega)\right)中,$$

根据(57)式，当 $m\to\infty$ 时，可得

$$u_m^iu_m^j\xrightarrow{强}u^iu^j \quad 几乎处处在 \Omega\times[\tau,T]中,$$

根据引理 4，可得

$$\mathcal{X}_{i,j}=u^iu^j,$$

类似地，当 $m\to\infty$ 时，有 $B_m^iB_m^j\xrightarrow{弱}B^iB^j$，$u_m^iB_m^j\xrightarrow{弱}u^iB^j$，$B_m^iu_m^j\xrightarrow{弱}B^iu^j$ 在 $L^2\left(\tau,T;L^2(\Omega)\right)$ 中。对任意的 $\overline{w}\in\mathcal{D}(\Omega\times[\tau,T])$，当 $m\to\infty$ 时，可得

$$\int_\tau^T b(u_m,u_m,\varphi)\overline{w}\mathrm{d}t=-\int_\tau^T\overline{w}\left(\sum_{i,j=1}^2\int_\Omega u_m^i\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}u_m^j\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$
$$\xrightarrow{强}-\int_\tau^T\overline{w}\left(\sum_{i,j=1}^2\int_\Omega u^iu^j\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_\tau^T b(u,u,\varphi)\overline{w}\mathrm{d}t,$$

因此当 $m\to\infty$ 时，有

$$\int_\tau^T\mathcal{B}_0(\xi_m,\xi_m,\psi)\overline{w}\mathrm{d}t=\int_\tau^T\mathcal{B}_0(\xi,\xi,\psi)\overline{w}\mathrm{d}t,$$

由弱收敛的定义可知，当 $m\to\infty$ 时，有

$$\mathcal{B}_0(\xi_m,\xi_m,\psi)\xrightarrow{弱}\mathcal{B}_0(\xi,\xi,\psi) \quad 在 L^2(\tau,T)中. \tag{61}$$

⑤利用(54)式，(56)式，(59)式和(61)式，对(60)式取极限，可得对任意的 $\psi\in\mathbb{U}_{\tau,T}$， ξ 满足

$$-\int_{\tau}^{T}\left(\xi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{\tau}^{T}(\nabla u,\nabla\varphi)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{Rm}}\int_{\tau}^{T}(\mathrm{curl}\ B,\mathrm{curl}\ \rho)\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\tau}^{T}\mathcal{B}_0(\xi,\xi,\psi)\mathrm{d}t+\alpha\int_{\tau}^{T}(u,\varphi)\mathrm{d}t=(\xi_{\tau},\psi(\tau))+\varepsilon\int_{\tau}^{T}(f,\varphi)\mathrm{d}t,$$

因此ξ满足弱解的定义。

b. 唯一性

利用(58)式可证得弱解的唯一性。

另外，根据(4)式，(48)式，(51)式和(59)式，可推得(49)式和(50)式。

参考文献

[1] Davidson, P.A. (2001) Introduction to Magneto Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511626333

[2] Cai, X. and Jiu, Q. (2008) Weak and Strong Solutions for Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 799-809. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.041

[3] Cai, X. and Lei, L. (2010) L^2 Decay of the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Acta Mathematica Scientia*, **30**, 1235-1248. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(10)60120-8

[4] Li, W., Wang, X. and Jiu, Q. (2011) Existence and Uniqueness of the Weak Solutions for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *African Diaspora Journal of Mathematics New*, **12**, 57-72.

[5] 杨新光, 王红军, 李钧涛. 带弱耗散的两维非自治不可压 Navier-Stokes 方程的一致吸引子[J]. 数学物理学报, 2014, 34(4): 828-840.

[6] Zhang, Z., Wu, X. and Lu, M. (2011) On the Uniqueness of Strong Solution to the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **377**, 414-419. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.019

[7] Li, J., Yang, M. and Yu, Y. (2019) A Class Large Solution of the 2D MHD Equations with Velocity and Magnetic Damping. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, 031503. https://doi.org/10.1063/1.5088922

[8] Ma, C. and Zhang, Z. (2020) Global Regularity of 2D Generalized MHD Equations with Magnetic Damping. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **53**, 103066. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.103066

[9] 宋小亚. 几类流体动力学方程解的长时间行为研究[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2019.

[10] Ye, Z. (2010) Regularity and Decay of 3D Incompressible MHD Equations with Nonlinear Damping Terms. *Colloquium Mathematicum*, **139**, 185-203. https://doi.org/10.4064/cm139-2-3

[11] Ye, H., Jia, Y. and Dong, B. (2020) Sharp Time Decay Rates of H1 Weak Solutions for the 2D MHD Equations with Linear Damping Velocity. *Nonlinearity*, **33**, 4857-4877. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab8f7d

[12] Sermange, M. and Temam, R. (1983) Some Mathematical Questions Related to the MHD Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 635-664. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360506