

小直径单圈图的永久和指标的极值研究

白英刚

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2021年10月19日; 录用日期: 2021年11月23日; 发布日期: 2021年11月30日

摘 要

令 G 表示一个 n 个顶点的图。图的永久和是指图的积和多项式系数的绝对值之和。图的永久和的计算被证明是 $\#P$ -完全的。本文中, 刻画了直径为 3 和 4 单圈图的永久和的界, 并给出了达到该界的极图。

关键词

积和多项式, 永久和, Hosoya 指标, 单圈图

Extremal Unicyclic Graphs of the Small Diameter with Respect to Permanental Sum

Yinggang Bai

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Nationalities University, Xining Qinghai

Received: Oct. 19th, 2021; accepted: Nov. 23rd, 2021; published: Nov. 30th, 2021

Abstract

Let G be a graph with n vertex, the permanental sum of G is the sum of the absolute

values of the coefficients. Computing the permanental polynomials of graphs is $\#P$. In this paper, we will determine the graph minimizing the permanental sum among all unicyclic graphs with diameter 3 and 4, and the corresponding extremal bicyclic graphs are also determined.

Keywords

Permanental Polynomial, Permanental Sum, Hosoya Index, Unicyclic Graph

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 介绍

n 阶方阵 $M = (m_{ij})$ 的积和式定义如下:

$$\text{per}(M) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)}$$

这里和式取遍 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中的所有置换 σ 。令 $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵, 多项式 $\pi(G, x) = \text{per}(xI - A(G)) = \sum_{k=0}^n b_k(G)x^{n-k}$ 为图 G 的积和多项式, 其中 I 为单位矩阵。 $b_k(G)$ 表示图 G 的积和多项式的系数。 Merris [1] 等给出了下面计算积和多项式系数的 Sachs 公式,

$$b_k(G) = (-1)^k \sum_{H \in S_k(G)} 2^{C(H)} \quad (0 \leq k \leq n)$$

这里的和取遍图 G 的 k 个顶点的 Sachs 子图, $S_k(G)$ 是图 G 中 k 个顶点的 Sachs 子图。例如 $b_1(G) = 0$, 因为 $S_1(G)$ 是空集; $b_2(G) = n$, 因为 $S_2(G) = |E(G)|$ 。 $PS(G)$ 定义为图 G 的永久和, 即 $\pi(G, x)$ 的每一项系数的绝对值之和, 则

$$PS(G) = \sum_{k=0}^n |b_k(G)| = \sum_{k=0}^n \sum_{H \in S_k(G)} 2^{C(H)}$$

我们约定: 空图的永久和为 1。

由Kasum [2] 等人研究了化学文献中的图形的积和多项式, 他们分别计算路径和圈的积和多项式以及这些多项式的零点。Cash [3] 研究了化学图(包括苯, 邻二甲苯, 冠烯, C_{20} 富勒烯)的积和多项式。他指出研究积和多项式是有意义的。但是, 图的积和多项式的系数的计算是 $\#P$ 完全的。直到现在只有少数关于化学图的积和多项式的系数以及它的潜在应用被出版 [4]- [14]。那么如何研究化学图的积和多项式的系数即如何刻画化学图的永久和。永久和与化学现象之间有着紧密联系。对自然界的研究表明, C_{50} 中存在 271 个非同构的富勒烯。到目前为止, 在 C_{50} 中只有少数富勒烯被找到。2004 年 Xie [15] 等人得到了一个不稳定的富勒烯 C_{50} (C_{5h})。Tong 等人 [16] 计算了 C_{50} 中 271 个富勒烯的永久和, 他们发现 C_{50} 的永久和在 271 个富勒烯中达到最小值。他们还指出永久和与分子图的稳定性密切相关。永久和的计算是 $\#P$ 完全的 [17]。尽管如此, 近年来对永久和的研究引起了研究者的广泛关注。Chou 等人 [18] 研究了 C_{70} 的性质。李等人 [19] 刻画了六方链的永久和。Li 和 Wei [20] 等人刻画了特征八角链的永久和。Wu 和 Lai [21] 研究了一般图的永久和的基本性质, 他们指出了永久和与斐波那契数列有关系, 关于积和式的背景以及有关的结论请查阅 [22]- [25]。此外, 永久和与 Hosoya 指数有关系。图 G 的 Hosoya 指数用 $Z(G)$ 表示, 定义为图 G 的独立边集的总数 [26]。Hosoya 指数与化学图的沸点密切相关。Wu 和 Lai [21] 研究表明 $PS(G) \geq Z(G)$, 在图 G 是树的情况下等号成立。这表明永久和很可能解释化学分子的某些特征。

文献 [27] 刻画了 n 阶直径不超过 4 的单圈图的 Harary 指数的最小值。在此基础上, 本文刻画了 n 阶直径为 3 的单圈图 [27] 和直径为 4 [27] 的单圈图的永久和的界, 及达到改界的极图。

2. 基本概念

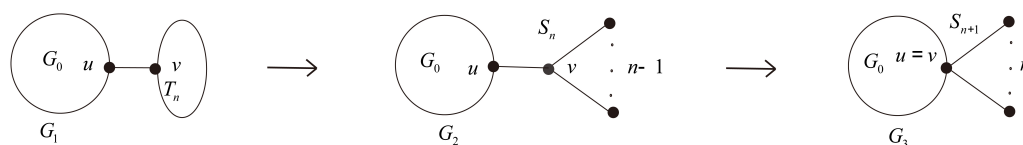
令 $G = (V(G), E(G))$ 表示一个图, 图 G 的顶点集记为 $V(G)$, 边集记为 $E(G)$, 顶点集大小称为图 G 的阶, 其中阶为 0 的图称为空图。 $N_G(v)$ 表示与顶点 v 的相邻顶点构成的集合, n 个顶点的星, 路, 圈分别表示为 S_n, P_n, C_n 。若 $W \subseteq V(G)$, 我们用 $G - W$ 表示从图 G 中删掉集合 W 中的全部顶点以及与这些点相关联的边的 G 的子图。类似的, 若 $E' \subseteq E(G)$, 用 $G - E'$ 表示从图 G 中删掉集合 E' 中的边的 G 的子图。Sachs 子图为由不交圈或孤立边组成的图。设 $v \in V(G)$, G 中与点 v 关联的边的条数称为 v 的度, 记为 $d_G(v)$ 或者 $d(v)$ 。我们把度为 1 的点称为悬挂点, 度为 0 的点称为孤立点。设 D 是无向图, $x, y \in V(D)$ 。从 x 到 y 的距离是指 D 中最短 (x, y) 路的长, 记为 $d_D(x, y)$ 。若图 D 中不存在 (x, y) 路, 则约定 $d_D(x, y) = +\infty$ 。一般地, $d_D(x, y) \neq +\infty$ 。图 D 的直径记为 $d(D)$, 定义为: $d(D) = \max\{d_D(x, y) : \forall x, y \in V(D)\}$ 。

3. 引理

定义 3.1 [28] 设 u 是图 G_0 的一个顶点, 图 G_1 (见图 1) 表示把图 G_0 的一个顶点 u 和树 T_n 的一个顶点 v 用一条边相连接的图, 图 G_2 (见图 1) 表示把的顶点 u 和星 S_n 的中心 v 用一条边相连接的图, 把从图 G_1 变换到图 G_2 称为变换一。

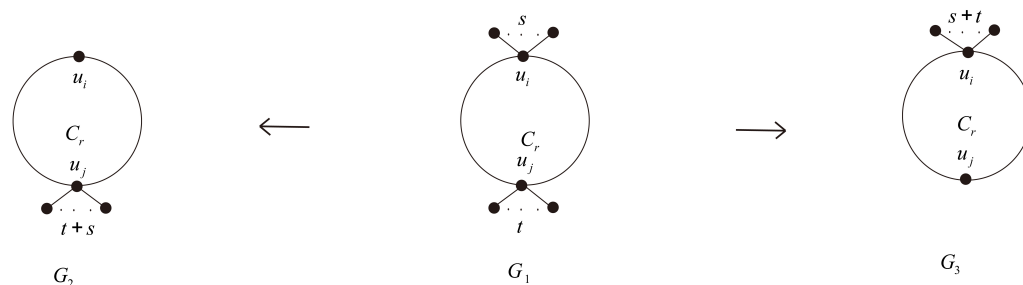
引理 3.2 [28] 设图 G_1 和图 G_2 如定义 2.1 所定义, 则 $PS(G_1) \geq PS(G_2)$, 等号成立当且仅当 T 是一个星并且 u 是 T 的中心。

定义 3.3 [28] 设图 G_2 (见图 1) 如定义 2.1 所定义, 用 G_3 (见图 1) 表示把星 S_{n+1} 的中心 v 和的顶点 u 黏在一起的图, 把图 G_2 变换到图 G_3 称为变换二。

Figure 1. G_1, G_2, G_3 图 1. G_1, G_2, G_3

引理 3.4 [28] 设图 G_2 如定义 2.1 所定义, 图 G_3 如定义 2.3 所定义, 则 $PS(G_2) \geq PS(G_3)$, 等号成立当且仅当 $T = K_1$ 或者 u 是 G_0 的孤立点。

定义 3.5 [28] 设 G_0 是一个单圈图且 $C_r = u_1 u_2 u_3 \cdots u_r$ 是唯一的圈, 设 u_i 和 u_j 是的两个度为 2 的顶点, $1 \leq i \leq j \leq r$ 。用 G_1 (见图 2) 表示分别把 $s \geq 1$ 和 $t \geq 1$ 个悬挂点连接到图的两个顶点 u_i 和 u_j 的图; 用 G_2 (见图 2) 表示把 $s+t$ 个悬挂点连接到 G_0 的顶点 u_j 的图; G_3 (见图 2) 表示把 $s+t$ 个悬挂点连接到 G_0 顶点 u_i 的图, 把从图 G_1 变换到图 G_2 , 或从图 G_1 变换到图 G_3 称为变换三。

Figure 2. G_2, G_1, G_3 图 2. G_2, G_1, G_3

引理 3.6 [28] 设图 G_1, G_2, G_3 如定义 2.5 所定义, 则 $PS(G_1) > PS(G_2)$ 或者 $PS(G_1) > PS(G_3)$ 。

引理 3.7 [28] $n \geq 5, 4 \leq r \leq n-1, G(r, n-r)$ (见图 3) 表示 C_r 的某一个顶点与 S_{n-r+1} 的中心相粘接的 n 阶单圈图, $PS(G(r, n-r)) > PS(G(r-1, n-r+1))$ 。

Figure 3. $G(r, n-r), G(r-1, n-r+1)$ 图 3. $G(r, n-r), G(r-1, n-r+1)$

引理 3.8 [28] 图的永久和满足如下性质:

(1) 图 G 和图 H 为连通图, $V(G)$ 与 $V(H)$ 分别表示图 G 和图 H 的顶点集, $V(G) \cap V(H) = \phi$, 则 $PS(G \cup H) = PS(G)PS(H)$ 。

(2) $e = uv \in E(G)$, 则

$$PS(G) = PS(G - e) + PS(G - u - v) + 2 \sum_{C \in C_G(e)} PS(G - V(C))$$

(3) $v \in V(G)$, 则

$$PS(G) = PS(G - v) + \sum_{u \in N_G(v)} PS(G - u - v) + 2 \sum_{C \in C_G(v)} PS(G - V(C))$$

$N_G(v)$ 表示 G 中 v 的邻接点的集合, $C_G(e)$ 表示 G 中包含边 e 的圈的集合, $C_G(v)$ 表示 G 中包含顶点 v 的圈的集合。

4. 直径为 3 的单圈图 (见图 4) 永久和极值研究

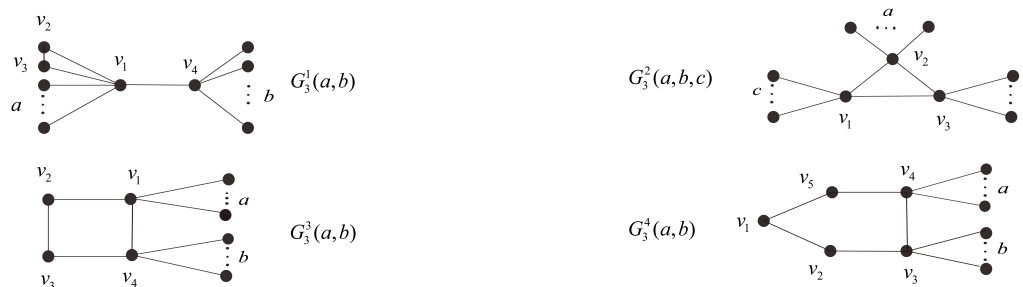


Figure 4. Single circle diagram $G_3^1(a, b)$, $G_3^2(a, b, c)$, $G_3^3(a, b)$, $G_3^4(a, b)$ with diameter 3

图 4. 直径为 3 的单圈图 $G_3^1(a, b)$, $G_3^2(a, b, c)$, $G_3^3(a, b)$, $G_3^4(a, b)$

图 $G_3^1(a, b)$, $G_3^2(a, b, c)$, $G_3^3(a, b)$, $G_3^4(a, b)$ 中的 a, b, c 需要满足以下条件:

$G_3^1(a, b)$ 中, a, b 均大于等于 0, $a + b + 5 = n$ 。

$G_3^2(a, b, c)$ 中 a, b, c 至少两个数大于等于 1, $a + b + c + 3 = n$ 。

$G_3^3(a, b)$ 中 a, b 至少一个数大于等于 1, $a + b + 4 = n$ 。

$G_3^4(a, b)$ 中 a, b 至少一个数大于等于 1, $a + b + 5 = n$ 。

以上 a, b, c 均为自然数, $n \geq 7$ 。

定理 4.1 令 $G_3(n) = \{G_3^1(a, b), G_3^2(a, b, c), G_3^3(a, b), G_3^4(a, b)\}$ 表示直径为 3 的 n 阶单圈图的集合, $G \in G_3(n)$, 则 $PS(G) \geq 3n - 4$, 当且仅当 $G \cong G_3^1(a + b + c - 1, 0, 1)$ (见图 5) 时等号成立。

证明

(I) 对 $G_3^2(a, b, c)$ 应用变换三, 变为 $G_3^1(a + b, 0, c)$, 即把与顶点 v_3 相连的所有悬挂点删除后和

顶点 v_2 相连, 由引理 3.6 得到

$$PS(G_3^1(a, b, c) \geq PS(G_3^1(a + b, 0, c)) \quad (1)$$

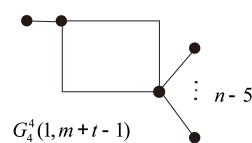
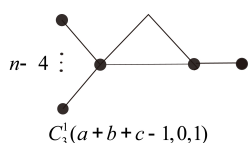


Figure 5. $G_3^2(a + b + c - 1, 0, 1)$, $G_4^4(1, m + t - 1)$

图 5. $G_3^2(a + b + c - 1, 0, 1)$, $G_4^4(1, m + t - 1)$

令 $a + b = s, c = t, s + t + 3 = n$, $PS(G_3^1(a + b, 0, c)) = PS(G_3^1(s, 0, t))$ ($s \geq 1, t \geq 1$), 由引理 3.8 得到

$$PS(G_3^1(s, 0, t)) = 2s + 2t + st + 6, PS(G_3^1(s + 1, 0, t - 1)) = 2(s + 1) + 2(t - 1) + (s + 1)(t - 1) + 6.$$

则 $PS(G_3^1(s, 0, t)) - PS(G_3^1(s + 1, 0, t - 1)) = PS(G_3^1(a + b, 0, c)) - PS(G_3^1(a + b + 1, 0, c - 1)) = s - t + 1$, 分两种情况。

情况一 $s - t + 1 \geq 0$ 时, $PS(G_3^1(s, 0, t)) \geq PS(G_3^1(s + 1, 0, t - 1))$ 。得到

$$PS(G_3^1(s + t - 1, 0, 1)) \leq PS(G_3^1(s + t - 2, 0, 2)) \leq \cdots \leq PS(G_3^1(s, 0, t))。$$

$$\text{所以 } PS(G_3^1(a + b, 0, c)) = PS(C_3(s, 0, t)) \geq PS(C_3(s + t - 1, 0, 1)) = 3n - 4。$$

情况二 $s - t + 1 < 0$ 时, $PS(G_3^1(s, 0, t)) < PS(G_3^1(s + 1, 0, t - 1))$ 。得到

$$PS(G_3^1(1, 0, s + t - 1)) < PS(G_3^1(2, 0, s + t - 2)) < \cdots < PS(G_3^1(s, 0, t))。$$

$$PS(G_3^1(a + b, 0, c)) = PS(G_3^1(s, 0, t)) \geq PS(G_3^1(1, 0, s + t - 1)) = 3n - 4。$$

得到:

$$PS(G_3^1(a + b, 0, c)) \geq 3n - 4 \quad (2)$$

由 (1) (2) 得到 $G \cong G_3^1(a, b, c)$, $PS(G) \geq 3n - 4$, 当 $G \cong G_3^1(a + b + c - 1, 0, 1)$ 等号成立。

(II) 对 $G_3^3(a, b)$ 应用变换三变成 $G_3^3(a + b, 0)$, 即把与顶点 v_1 相连的悬挂点全部删除和顶点 v_4 连接, 由引理 3.6 得到 $PS(G_3^3(a, b)) \geq PS(G_3^3(a + b, 0))$ 。

由引理 3.8 得到 $PS(G_3^2(a + b, 0)) = 3n - 3$ 。

所以

$$PS(G_3^2(a, b)) \geq 3n - 3 \quad (3)$$

(III) 对 $G_3^4(a, b)$ 应用变换三, 变成 $G_3^4(a + b, 0)$ 即把与顶点 v_3 相连的悬挂点删除和顶点 v_4 连接, 由引理 3.6 得到 $PS(G_3^4(a, b)) \geq PS(G_3^4(a + b, 0))$ 。

由引理 3.8 得到 $PS(G_3^4(a+b, 0)) = 5n - 12$ 。

所以

$$PS(G_3^4(a, b)) \geq 5n - 12 \quad (4)$$

(IV) 由引理 3.8 得到 $PS(G_3^1(a, b)) = 2(a+3)(b+2) + 2$ 。

$PS(G_3^1(a+1, b-1)) = 2(a+4)(b+1) + 2$, $PS(G_3^1(a, b)) - PS(G_3^1(a+1, b-1)) = a - b + 2$ 。
分两种情况。

情况一 $a - b + 2 \geq 0$ 时, $PS(G_3^1(a, b)) \geq G_3^1(a+1, b-1)$, 得到:

$$PS(G_3^1(a+b, 0)) \leq PS(G_3^1(a+b-1, 1)) \leq \cdots \leq PS(G_3^1(a, b))。$$

所以 $PS(G_3^1(a, b)) \geq PS(G_3^1(a+b, 0)) = 4n - 6$ 。

情况二 $a - b + 2 < 0$ 时, $PS(G_3^1(a, b)) < G_3^1(a+1, b-1)$, 得到:

$$PS(G_3^1(0, a+b)) \leq PS(G_3^1(1, a+b-1)) \leq \cdots \leq PS(G_3^1(a, b))。$$

所以 $PS(G_3^1(a, b)) \geq PS(G_3^1(0, a+b)) = 6n - 18$ 。

由于 $6n - 18 > 4n - 6$, 所以

$$G_3^1(a, b) \geq 4n - 6 \quad (5)$$

当 $G \cong G_3^2(a+b+c-1, 0, 1)$ 时, 由 (I) 得到 $PS(G) = 3n - 4$ 。

当 $G \not\cong G_3^2(a+b+c-1, 0, 1)$ 时, 分四种情况。

情况一 当 $G \cong G_3^2(a, b, c)$ 时, 由 (2) 得到 $PS(G) > 3n - 4$ 。

情况二 当 $G \cong G_3^3(a, b)$ 时, 由 (3) 得到 $PS(G) \geq 3n - 3 > 3n - 4$ 。

情况三 当 $G \cong G_3^4(a, b)$ 时, 由 (4) 得到 $PS(G) \geq 5n - 12 > 3n - 4$ 。

情况四 当 $G \cong G_3^1(a, b)$ 时, 由 (5) 得到 $PS(G) \geq 4n - 6 > 3n - 4$ 。

所以得到 $G \in G_3(n)$ ($n \geq 7$), 则 $PS(G) \geq 3n - 4$, 当且仅当 $G \cong G_3^2(a+b+c-1, 0, 1)$ 时等号成立。

5. 直径为 4 的单圈图 (见图 6) 永久和极值研究

图 $G_4^1, G_4^2, G_4^3, G_4^4, G_4^5, G_4^6, G_4^7, G_4^8, G_4^9$ 中的参数需要满足以下条件:

G_4^1 中, a_i 均大于等于 1, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。

G_4^2 中分两种情况: (1) p_1, p_2 至少一个数大于等于 1, a_i 均大于 1。 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。

(2) $p_1 = p_2 = 0$, a_i 至少有两个数大于等于 1, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。

(3) G_4^3 中当 $p_1 = p_2 = 0$, a_i 至少有一个数大于等于 1, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。

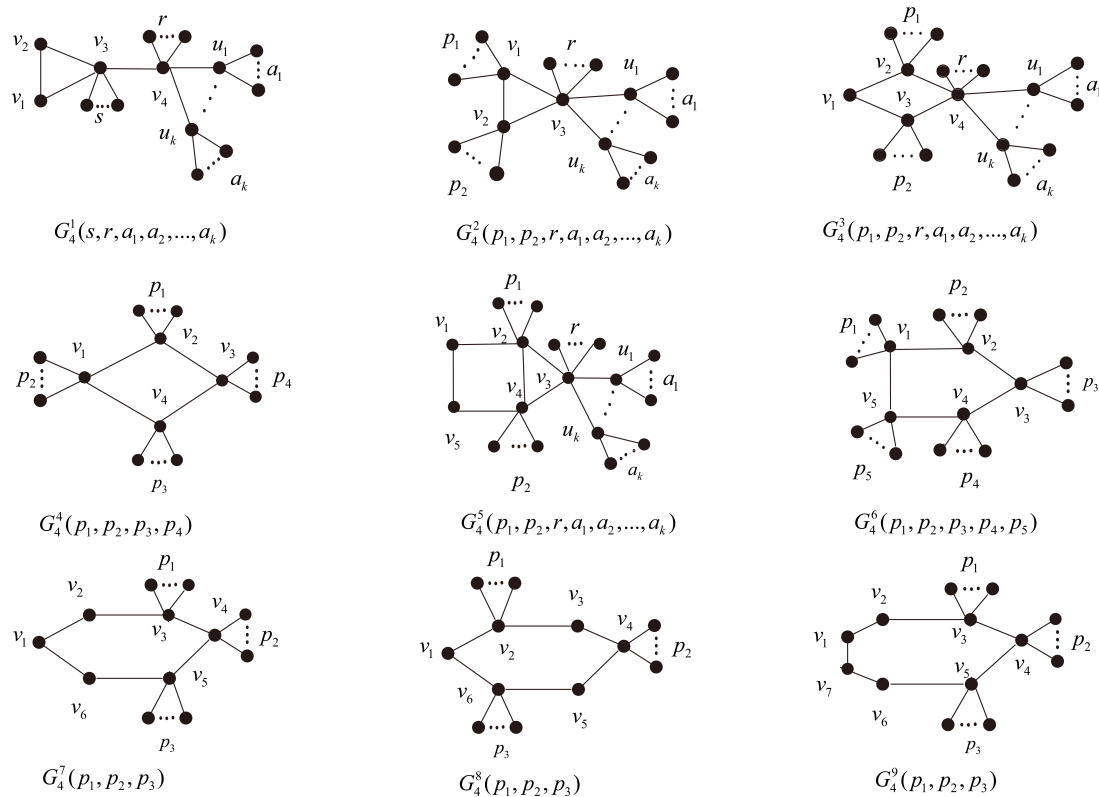


Figure 6. Diagram of a single circle with a diameter of 4

图 6. 直径为4的单圈图

(4) G_4^4 中满足 $p_1p_3 \neq 0$ 或者 $p_2p_4 \neq 0$ 。

(5) G_4^5 中, 当 $p_1 = p_2 = 0$, a_i 至少有一个数大于等于 1, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。

(6) G_4^6 中, $p_1p_3 \neq 0$, $p_1p_4 \neq 0$, $p_2p_4 \neq 0$, $p_2p_5 \neq 0$ 和 $p_3p_5 \neq 0$ 以上情况至少一种情况成立。

(7) G_4^7 , G_4^8 , G_4^9 至少有一个 p_i 大于等于 1, $i \in \{1, 2, 3\}$ 。

以上 $s, r, a_i, p_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 均为自然数, $n \geq 8$ 。

引理 5.1 $PS(G_4^1(s, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq 6n - 14$ 。

证明

(I) 当 $k \geq 2$ 时。

对图 $G_4^1(s, r, a_1, a_2, \dots, a_k)$, 应用**变换二**将和顶点 $u_2, u_3, \dots, u_k$ 相连的悬挂点删除后和顶点 v_4 连接。令 $m = r + (1 + a_2) + (1 + a_3) + \dots + (1 + a_k)$ ($m \geq 2$, $m + s \geq 2$), $t = a_1$ ($t \geq 1$), 由定理 3.4 得到

$$PS(G_4^1(s, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq PS(G_4^1(s, m, t)) \quad (6)$$

由引理 3.8 得到

$$PS(G_4^1(s, m, t)) = (6m + 8t + 4s) + (6tm + 2ts + 2ms) + 2tms + 14$$

$$PS(G_4^1(s, m, t)) - PS(G_4^1(s + 1, m - 1, t)) = 2(t + 1)(3 + s - m) - 2, \text{ 分两种情况。}$$

情况一 $3 + s > m$, $PS(G_4^1(s, m, t)) > PS(G_4^1(s + 1, m - 1, t))$, 得到

$$PS(G_4^1(s + m, 0, t)) < PS(G_4^1(s + m - 1, 1, t)) < \cdots < PS(G_4^1(s, m, t))$$

所以 $PS(G_4^1(s, m, t)) \geq PS(G_4^1(s + m, 0, t))$ 。

情况二 $3 + s \leq m$, $PS(G_4^1(s, m, t)) < PS(G_4^1(s + 1, m - 1, t))$, 得到

$$PS(G_4^1(0, s + m, t)) < PS(G_4^1(1, s + m - 1, t)) < \cdots < PS(G_4^1(s, m, t))$$

所以 $PS(G_4^1(s, m, t)) \geq PS(G_4^1(0, s + m, t))$ 。

$$PS(G_4^1(0, s + m, t)) - PS(G_4^1(s + m, 0, t)) = 2(m + s)(2t + 1) > 0。$$

所以

$$PS(G_4^1(s, m, t)) \geq PS(G_4^1(s + m, 0, t)) \quad (7)$$

(II) 当 $k = 1$ 时。

令 $m = r$, $m \geq 0$ 。

由 (7) 式得到 $PS(G_4^1(s, m, t)) \geq PS(G_4^1(s + m, 0, t))$ 。

$$PS(G_4^1(s + m, 0, t)) - PS(G_4^1(s + m + 1, 0, t - 1)) = 2(m + s + 3 - t), \text{ 分两种情况。}$$

情况一 $t \geq m + s + 3$, $PS(G_4^1(s + m, 0, t)) \leq PS(G_4^1(s + m + 1, 0, t - 1))$, 得到

$$PS(G_4^1(2, 0, s + m - 2)) \leq PS(G_4^1(3, 0, s + m - 3)) \leq \cdots \leq PS(G_4^1(s + m, 0, t))。$$

所以 $PS(G_4^1(s + m, 0, t)) \geq PS(G_4^1(2, 0, s + m - 2)) = 12n - 62$ 。

情况二 $t < m + s + 3$, $PS(G_4^1(s + m, 0, t)) > PS(G_4^1(s + m + 1, 0, t - 1))$, 得到

$$PS(G_4^1(s + m - 1, 0, 1)) \leq PS(G_4^1(s + m - 2, 0, 2)) \leq \cdots \leq PS(G_4^1(s + m, 0, t))$$

所以 $PS(G_4^1(s + m, 0, t)) \geq PS(G_4^1(s + m - 1, 0, 1)) = 6n - 14$ 。

由于 $12n - 62 > 6n - 14$, 得到

$$PS(G_4^1(s + m, 0, t)) \geq 6n - 14 \quad (8)$$

结合 (6) (7) 和 (8) 得到 $PS(G_4^1(s, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq 6n - 14$ 。

引理 5.2 $PS(G_4^2(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq 5n - 11$ 。

证明 (I) p_1, p_2 至少一个不为 0。

(i) 当 $k \geq 2$ 时, 对 $G_4^2(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)$, 应用**变换二**将和将和顶点 v_1 连接的悬挂点删除后和顶点 v_2 连接。再利用**变换三**将和顶点 $u_2, u_3, \dots, u_k$ 相连的悬挂点删除后和顶点 v_3 连接, 对应的

图记为 $G_4^2(s, t, m)$ 。令 $p_1 + p_2 = s, t = r + (a_2 + 1) + (a_3 + 1) + \dots + (a_k + 1) (t \geq 2), a_1 = m (m \geq 1)$, 由引理 3.4 和引理 3.7 得到

$$PS(G_4^2(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq PS(G_4^2(s, t, m)) \quad (9)$$

由引理 3.8 得到 $PS(G_4^2(s, t, m)) = (m + 1)(st + 2s + 2t + 4) + s + 2$ 。

$PS(G_4^2(s, t, m)) - PS(G_4^2(s, t + 1, m - 1)) = (s + 2)(t + 2 - m)$, 分两种情况。

情况一 $m \leq t + 2$, $PS(G_4^2(s, t, m)) \geq PS(G_4^2(s, t + 1, m - 1))$, 得到

$$PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) \leq PS(G_4^2(s, t + m - 2, 2)) \leq \dots \leq PS(G_4^2(s, t, m))。$$

所以 $PS(G_4^2(s, t, m)) \geq PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1))$ 。

情况二 $m > t + 2$, $PS(G_4^2(s, t, m)) < PS(G_4^2(s, t + 1, m - 1))$, 得到

$$PS(G_4^2(s, 0, t + m)) < PS(G_4^2(s, 1, t + m - 1)) \leq \dots \leq PS(G_4^2(s, t, m))。$$

所以

$$PS(G_4^2(s, t, m)) \geq PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) \quad (10)$$

(ii) 当 $k = 1, t \geq 0$ 时。

由引理 3.8 得到 $PS(G_4^2(s, t, m)) = (m + 1)(st + 2s + 2t + 4) + s + 2$ 。由 (10) 得到

$$PS(G_4^2(s, t, m)) \geq PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1))。$$

$PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) - PS(G_4^2(s - 1, t + m, 1)) = 2(m + t - s + 1) - 1$, 分两种情况。

情况一 $s < m + t + 1$, $PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) > PS(G_4^2(s - 1, t + m, 1))$, 得到

$$PS(G_4^2(1, s + t + m - 2, 1)) < PS(G_4^2(2, s + t + m - 3, 1)) < \dots < PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1))$$

所以 $PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) \geq PS(G_4^2(1, s + t + m - 2, 1)) = 6n - 21$ 。

情况二 $s \geq m + t + 1$, $PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) < PS(G_4^2(s - 1, t + m, 1))$, 得到

$$PS(G_4^2(s + t + m - 1, 0, 1)) < PS(G_4^2(s + t + m - 2, 1, 1)) < \dots < PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1))$$

所以 $PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) \geq PS(G_4^2(s + t + m - 1, 0, 1)) = 5n - 11$ 。

由于 $6n - 21 > 5n - 11$, 结合 (8) 和 (9) (10) 得到

$$PS(G_4^2(s, t + m - 1, 1)) \geq 5n - 11 \quad (11)$$

(II) 当 $p_1 = p_2 = 0$ 时,

(i) $k \geq 3$ 应用变换二将与顶点 $u_3, u_4, \dots, u_k$ 连接的悬挂点删除和顶点 v_3 相连, 得到的图记为 $G_4^{2*}(m, s, t)$, 令 $r + (a_3 + 1) + (a_4 + 1) + \dots + (a_k + 1) = m, a_1 = s, a_2 = t (s \geq 1, t \geq 1, m \geq 2)$, 由

引理 3.4 得到

$$PS(G_4^2(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq PS(G_4^{2*}(m, s, t)) \quad (12)$$

由引理 3.8 得到 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) = 2(m+3)(t+1)(s+1) + 2(s+1) + 2(t+1)$ 。

$PS(G_4^{2*}(m, s, t) - PS(G_4^{2*}(m+1, s-1, t) = 2[(t+1)(m+3-s) + 1]$, 分两种情况。

情况一 $s \leq m+3$, $PS(G_4^{2*}(m, s, t) > PS(G_4^{2*}(m+1, s-1, t)$, 得到

$$PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) < PS(G_4^{2*}(m+s-2, 2, t) < \dots < PS(G_4^{2*}(m, s, t)$$

所以 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) \geq PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t)$ 。

情况二 $s > m+3$, $PS(G_4^{2*}(m, s, t) < PS(G_4^{2*}(m+1, s-1, t)$, 得到

$$PS(G_4^{2*}(2, m+s-2, t) < PS(G_4^{2*}(3, m+s-3, t) < \dots < PS(G_4^{2*}(m, s, t)$$

所以 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) \geq PS(G_4^{2*}(2, m+s-2, t)$ 。

$$PS(G_4^{2*}(2, m+s-2, t) - PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) = 2(3t+4)(m+s-3) \geq 0。$$

所以 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) \geq PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t)$ 。

(ii) 当 $k=2$ 时, $r=m \geq 0$, $a_1=s$, $a_2=t$

由引理 3.8 得到 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) = 2(m+3)(t+1)(s+1) + 2(s+1) + 2(t+1)$ 。

$PS(G_4^{2*}(m, s, t) - PS(G_4^{2*}(m+1, s-1, t) = 2[(t+1)(m+3-s) + 1]$, 分两种情况。

情况一 $s \leq m+3$, $PS(G_4^{2*}(m, s, t) > PS(G_4^{2*}(m+1, s-1, t)$, 得到

$$PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) < PS(G_4^{2*}(m+s-2, 2, t) < \dots < PS(G_4^{2*}(m, s, t)$$

所以 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) \geq PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t)$ 。

情况二 $s > m+3$, $PS(G_4^{2*}(m, s, t) < PS(G_4^{2*}(m+1, s-1, t)$, 得到

$$PS(G_4^{2*}(0, m+s, t) < PS(G_4^{2*}(1, m+s-1, t) < \dots < PS(G_4^{2*}(m, s, t)$$

所以 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) \geq PS(G_4^{2*}(0, m+s, t)$ 。

$$PS(G_4^{2*}(0, m+s, t) - PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) = 2(t+2)(m+s-1) \geq 0。$$

所以 $PS(G_4^{2*}(m, s, t) \geq PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t)$ 。

所以综合 (i) 和 (ii) 得到

$$PS(G_4^{2*}(m, s, t) \geq PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t)) \quad (13)$$

$PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) - PS(G_4^{2*}(m+s, 1, t-1) = 4(m+s-t) + 10$, 分两种情况。

情况一 $m+s \geq t-2$, $PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) > PS(G_4^{2*}(m+s, 1, t-1)$, 得到

$$PS(G_4^{2*}(m+s-2, 1, 1) < PS(G_4^{2*}(m+s-3, 1, 2) < \dots < PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t)$$

所以

$$PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) \geq PS(G_4^{2*}(m+s-2, 1, 1) = 8n-24 \quad (14)$$

情况二 $m+s < t-2$, $PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) < PS(G_4^{2*}(m+s, 1, t-1)$, 得到

$$PS(G_4^{2*}(0, 1, m+s-1) < PS(G_4^{2*}(1, 1, m+s-2) < \cdots < PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t)$$

所以 $PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) \geq PS(G_4^{2*}(0, 1, m+s-1) = 14n-66$ 。

因为 $14n-66 > 8n-24$, 根据 (11) (12) (13) (14) 得到

$$PS(G_4^{2*}(m+s-1, 1, t) \geq 8n-24$$

由于 $8n-24 > 5n-11$, 结合 (I) (II) 的结论得出 $PS(G_4^2) \geq 5n-11$ 。

引理 5.3 $PS(G_4^3(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \cdots, a_k)) \geq 6n-15$ 。

证明 (I) 当 p_1, p_2 至少一个不为 0, 通过变化三, 将与 v_2 相连的悬挂点删除后和顶点 v_3 相连。再通过变化二将 $u_2, \dots, u_k$ 相连的悬挂点删除和顶点 v_4 连接。令 $p_1 + p_2 = t, r + (a_2 + 1) + (a_3 + 1) + \dots + (a_{k-1} + 1) = m, a_1 = s$ ($t \geq 1, s \geq 1, m \geq 1, m+t+s+5 = n$)。

由引理 3.4 和 3.6 得到 $PS(G_4^3(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \cdots, a_k)) \geq PS(G_4^1(s, m, t))$ 。

由引理 3.8 得到

$$PS(G_4^3(s, m, t)) = (3m + 3t + 2mt + 9)(s + 1) + 2t + 3。$$

对 $G_4^3(s, m, t)$ 应用变换三, 将与顶点 v_3 连接的悬挂点删掉和顶点 v_4 连接对应的图记为 $G_4^3(s, m+t, 0)$ 。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^3(s, m, t)) \geq G_4^3(s, m+t, 0)$ 。

对 $G_4^3(s, m, t)$ 应用变换三, 将与顶点 v_4 连接的悬挂点删掉和顶点 v_3 连接对应的图记为 $G_4^3(s, 0, m+t)$ 。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^3(s, m, t)) \geq G_4^3(s, 0, m+t)$ 。

由引理 3.8 得到 $G_4^3(s, 0, m+t) - G_4^3(s, m+t, 0) = 2(m+t) > 0$ 。

所以 $PS(G_4^3(s, m, t)) \geq G_4^3(s, m+t, 0)$ 。

(II) 当 $p_1 = p_2 = 0$ 时, 通过变化二将 $u_2, \dots, u_k$ 相连的悬挂点删除和顶点 v_4 连接。令 $p_1 + p_2 = t = 0, r + (a_2 + 1) + (a_3 + 1) + \dots + (a_{k-1} + 1) = m, a_1 = s$ ($s \geq 1, m \geq 1, m+t+s+5 = n$)。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^3(s, m, t)) \geq G_4^3(s, m, 0) = G_4^3(s, m+t, 0)$ 。

由引理 3.8 得到

$PS(G_4^3(s, m+t, 0)) = (9+3m+3t)(s+1)+3$, $PS(G_4^3(s, m+t, 0)) - PS(G_4^3(s-1, m+t+1, 0)) = 3(m+t+3-s)$, 分两种情况。

情况一 $s \leq m+t+3$, $PS(G_4^3(s, m+t, 0)) \geq PS(G_4^3(s-1, m+t+1, 0))$, 得到

$$PS(G_4^3(1, m+t+s-1, 0)) \leq PS(G_4^3(2, m+t+s-2, 0)) \leq \cdots \leq PS(G_4^3(s, m+t, 0))$$

所以 $PS(G_4^3(s, m+t, 0)) \geq PS(G_4^3(1, m+t+s-1, 0)) = 6n-15$ 。

情况二 $s > m+t+3$, $PS(G_4^3(s, m+t, 0)) < PS(G_4^3(s-1, m+t+1, 0))$, 得到

$$PS(G_4^3(s+m+t, 0, 0)) < PS(G_4^3(s+m+t-1, 1, 0)) \leq \cdots \leq PS(G_4^3(s, m+t, 0))$$

所以 $PS(G_4^3(s, m+t, 0)) \geq PS(G_4^3(s+m+t, 0, 0)) = 9n-33$ 。

由于 $9n-33 > 6n-15$, 所以 $PS(G_4^3(s, m+t, 0)) \geq PS(G_4^3(1, m+t+s-1, 0)) = 6n-15$ 。

引理 5.4 $G \cong G_4^4(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $PS(G) \geq 4n-8$, 等号成立当且仅当 $G \cong G_4^4(1, m+t-1)$ 。

证明 对图 $G_4^4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 运用**变换三**, 将与 v_1 连接的悬挂点删除和顶点 v_2 连接, 令 $p_1 + p_2 = m \geq 1$, 将与 v_3 连接的悬挂点删除和顶点 v_4 连接, 令 $p_3 + p_4 = t \geq 1$, 对应的图记为 $G_4^4(m, t)$, $m+t+4 = n$ 。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^4(p_1, p_2, p_3, p_4)) \geq PS(G_4^4(m, t))$ 。

由引理 3.8 得到

$PS(G_4^2(m, t)) = 3m + 3t + mt + 9$, $PS(G_4^2(m, t)) - PS(U_4^2(m+1, t-1)) = m-t+1$, 分两种情况

情况一 当 $t \leq m+1$ 时, $PS(G_4^4(m, t)) \geq PS(G_4^4(m+1, t-1))$, 得到

$$PS(G_4^4(m+t-1, 1)) < PS(G_4^4(m+t-2, 2)) < \cdots < PS(G_4^4(m, t))$$

所以 $PS(G_4^4(m, t)) \geq PS(G_4^4(m+t-1, 1)) = 4n-8$ 。

情况二 当 $t > m+1$ 时, $PS(G_4^4(m, t)) < PS(G_4^4(m+1, t-1))$, 得到

$$PS(G_4^4(1, m+t-1)) < PS(G_4^4(2, m+t-2)) < \cdots < PS(G_4^4(m, t))$$

所以 $PS(G_4^4(m, t)) \geq PS(G_4^4(1, m+t-1)) = 4n-8$ 。

根据 (i) 和 (ii) 得到 $PS(G_4^4(m, t)) \geq 4n-8$ 。

$$PS(G_4^4(p_1, p_2, p_3, p_4)) \geq 4n-8。$$

引理 5.5 $PS(G_4^5(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \cdots, a_k)) > 5n-12$ 。

证明 对图 $G_4^5(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 应用**变换二**和**变换三**得到图 $G(5, n-5)$ 。

由引理 3.4 和 3.6 得到 $PS(G_4^5(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \cdots, a_k)) > PS(G(5, n-5))$ 。

引理 5.6 $PS(G_4^6(p_1, p_2, p_3, p_4)) > 5n-12$ 。

证明 对图 $G_4^6(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 应用**变换三**得到图 $G(5, n-5)$ 。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^6(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \cdots, a_k)) > PS(G(5, n-5))$ 。

引理 5.7 $PS(G_4^7(p_1, p_2, p_3)) > 5n-12$ 。

证明 对图 $G_4^7(p_1, p_2, p_3)$ 应用**变换三**得到图 $G(6, n-6)$ 。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^7(p_1, p_2, p_3)) > PS(G(6, n-6))$ 。

由引理 3.7 得到 $PS(G(6, n-6)) > PS(G(5, n-5)) = 5n-12$ 。

所以 $PS(G_4^7(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12$ 。

引理 5.8 $PS(G_4^8(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12$ 。

证明 对图 $G_4^8(p_1, p_2, p_3)$ 应用变换三得到图 $G(6, n - 6)$ 。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^8(p_1, p_2, p_3)) > PS(G(6, n - 6))$ 。

由引理 3.7 得到 $PS(G(6, n - 6)) > PS(G(5, n - 5)) = 5n - 12$ 。

所以 $PS(G_4^8(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12$ 。

引理 5.9 $PS(G_4^9(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12$ 。

证明 对图 $G_4^9(p_1, p_2, p_3)$ 应用变换三得到图 $G(7, n - 7)$ 。

由引理 3.6 得到 $PS(G_4^9(p_1, p_2, p_3)) > PS(G(7, n - 7))$ 。

由引理 3.7 得到 $PS(G(7, n - 7)) > PS(G(6, n - 6)) > PS(G(5, n - 5)) = 5n - 12$ 。

所以 $PS(G_4^9(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12$ 。

定理 5.10 令 $G_4(n)$ 表示 n 个顶点直径为 4 的所有单圈图的集合, $G \in G_4(n)$, 则 $PS(G) \geq 4n - 8$, 等号成立当且仅当 $G \cong G_4^4(1, m + t - 1)$ (见图 5)。

证明 $G \in G_4(n)$, 当 $G \cong G_4^4(1, m + t - 1)$ 时, 由引理 4.1 得到 $PS(G) = 4n - 8$ 。当 $G \in G_4(n) - \{G_4^4(1, m + t - 1)\}$, 对图 G 分九种情况。

情况一 $G \cong G_4^1(s, r, a_1, a_2, \dots, a_k)$, 由引理 5.1 得到 $PS(G_4^1(s, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq 6n - 14 > 4n - 8$ 。

情况二 $G \cong G_4^2(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)$, 由引理 5.2 得到 $PS(G_4^2(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq 5n - 11 > 4n - 8$ 。

情况三 $G \cong G_4^3(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)$, 由引理 5.3 得到 $PS(G_4^3(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) \geq 6n - 15 > 4n - 8$ 。

情况四 $G \cong G_4^4(p_1, p_2, p_3, p_4)$, 由引理 5.4 得到 $PS(G) > 4n - 8$ 。

情况五 $G \cong G_4^5(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)$, 由引理 5.5 得到 $PS(G_4^5(p_1, p_2, r, a_1, a_2, \dots, a_k)) > 5n - 12 > 4n - 8$ 。

情况六 $G \cong G_4^6(p_1, p_2, p_3, p_4)$, 由引理 5.6 得到 $PS(G_4^6(p_1, p_2, p_3, p_4)) > 5n - 12 > 4n - 8$ 。

情况七 $G \cong G_4^7(p_1, p_2, p_3)$, 由引理 5.7 得到 $PS(G_4^7(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12 > 4n - 8$ 。

情况八 $G \cong G_4^8(p_1, p_2, p_3)$, 由引理 5.8 得到 $PS(G_4^8(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12 > 4n - 8$ 。

情况九 $G \cong G_4^9(p_1, p_2, p_3)$, 由引理 5.9 得到 $PS(G_4^9(p_1, p_2, p_3)) > 5n - 12 > 4n - 8$ 。

所以 $G \in G_4(n)$, 则 $PS(G) \geq 4n - 8$, 等号成立当且仅当 $G \cong G_4^4(1, m + t - 1)$ 。

基金项目

青海民族大学研究生创新项目, 项目编号: 07M2021006。

参考文献

- [1] Merris, R., Rebman, K.R. and Watkins, W. (1981) Permanental Polynomials of Graphs. *Linear Algebra and Its Applications*, **38**, 273-288. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(81\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0024-3795(81)90026-4)
- [2] Kasum, D., Trinajstić, N. and Gutman, I. (1981) Chemical Graph Theory. III. On Permanental Polynomial. *Croatica Chemica Acta*, **54**, 321-328.
- [3] Cash, G.G. (2000) The Permanental Polynomial. *Journal of Chemical Information and Modeling Sciences*, **40**, 1203-1206. <https://doi.org/10.1021/ci000031d>
- [4] Cash, G.G. (2000) Permanental Polynomials of Smaller Fullerenes. *Journal of Chemical Information and Modeling Sciences*, **40**, 1207-1209. <https://doi.org/10.1021/ci0000326>
- [5] Chen, R. (2004) A Note on the Relations between the Permanental and Characteristic Polynomials of Coronoid Hydrocarbons. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **51**, 137-148.
- [6] Chou, Q., Liang, H. and Bai, F. (2011) Remarks on the Relations between the Permanental and Characteristic Polynomials of Fullerenes. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **66**, 743-750.
- [7] Dehmer, M., *et al.* (2017) Highly Unique Network Descriptors Based on the Roots of the Permanental Polynomial. *Information Sciences*, **408**, 176-181. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.04.041>
- [8] Gutman, I. and Cash, G.G. (2002) Relations between the Permanental and Characteristic Polynomials of Fullerenes and Benzenoid Hydro-Carbons. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **45**, 55-70.
- [9] Liang, H., Tong, H. and Bai, F. (2008) Computing the Permanental Polynomial of C_{60} in Parallel. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **60**, 349-358.
- [10] Shi, Y., Dehmer, M., Li, X. and Gutman, I. (2016) Graph Polynomials. CRC Press, Boca Raton. <https://doi.org/10.1201/9781315367996>
- [11] Wu, T. and Lai, H. (2018) On the Permanental Nullity and Matching Number of Graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, **66**, 516-524. <https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1302403>
- [12] Yan, W. and Zhang, F. (2004) On the Permanental Polynomial of Some Graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, **35**, 175-188. <https://doi.org/10.1023/B:JOMC.0000033254.54822.f8>
- [13] Yu, G. and Qu, H. (2018) The Coefficients of the Immanantal Polynomial. *Applied Mathematics and Computation*, **339**, 38-44. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.06.057>
- [14] Zhang, H. and Li, W. (2012) Computing the Permanental Polynomials of Bipartite Graphs by Pfaffian Orientation. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 2069-2074. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.04.007>

- [15] Xie, S., *et al.* (2004) Capturing the Labile Fullerene[50] as $C_{50}Cl_{10}$. *Science*, **304**, 699.
<https://doi.org/10.1126/science.1095567>
- [16] Tong, H., Liang, H. and Bai, F. (2006) Permanental Polynomials of the Larger Fullerenes. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **56**, 141-152.
- [17] Wu, T. and So, W. (2019) Unicyclic Graphs with Second Largest and Second Smallest Permanental Sums. *Applied Mathematics and Computation*, **351**, 168-175.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.01.056>
- [18] Chou, Q., Liang, H. and Bai, F. (2015) Computing the Permanental Polynomial of the High Level Fullerene C_{70} with High Precision. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **73**, 327-336.
- [19] Li, W., Qin, Z. and Zhang, H. (2016) Extremal Hexagonal Chains with Respect to the Coefficients Sum of the Permanental Polynomial. *Applied Mathematics and Computation*, **291**, 30-38. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.06.025>
- [20] Li, S. and Wei, W. (2018) Extremal Octagonal Chains with Respect to the Coefficients Sum of the Permanental Polynomial. *Applied Mathematics and Computation*, **328**, 45-57.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.033>
- [21] Wu, T. and Lai, H. (2018) On the Permanental Sum of Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **331**, 334-340. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.026>
- [22] Li, W., Qin, Z. and Wang, Y. (2020) Enumeration of Permanental Sums of Lattice. *Applied Mathematics and Computation*, **370**, Article ID: 124914.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124914>
- [23] Wu, T. and Lü, H. (2019) The Extremal Permanental Sum for a Quasi-Tree Graph. *Complexity*, **2019**, Article ID: 4387650. <https://doi.org/10.1155/2019/4387650>
- [24] Wu, T., Ren, S. and Das, K. (2019) Some Extremal Graphs with Respect to Permanental Sum. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 2947-2961.
<https://doi.org/10.1007/s40840-018-0642-9>
- [25] Wu, T. and Das, K. (2020) On the Permanental Sum of Bicyclic Graphs. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 72. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-1108-x>
- [26] Hosoya, H. (1971) Topological Index, a Newly Proposed Quantity Characterizing the Topological Nature of Structural Isomers of Saturated Hydrocarbons. *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, **44**, 2332-2339. <https://doi.org/10.1246/bcsj.44.2332>
- [27] Feng, L., Li, Z., Liu, W., Lu, L. and Stevanović, D. (2020) Minimal Harary Index of Unicyclic Graphs with Diameter at Most 4. *Applied Mathematics and Computation*, **381**, Article ID: 125315. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125315>
- [28] Wu, T.Z. and So, W. (2019) Unicyclic Graphs with Second Largest and Second Smallest Permanental Sums. *Applied Mathematics and Computation*, **351**, 168-175.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.01.056>