

# 多元累积函数变化率及其应用

韩天勇<sup>1</sup>, 党瑞雨<sup>2</sup>

<sup>1</sup>成都大学计算机学院, 四川 成都

<sup>2</sup>香港大学经管学院, 香港

收稿日期: 2021年10月16日; 录用日期: 2021年11月17日; 发布日期: 2021年11月24日

---

## 摘要

利用数学分析理论, 建立了一类涉及参数函数的多元累积函数变化率的结论, 并给出了其在多元积分、概率论与经济管理科学中的应用实例。

---

## 关键词

多元累积函数, 参数函数, 变化率, 概率论, 经济管理科学

---

# Variation Rate of Multivariate Cumulative Function and Its Applications

Tianyong Han<sup>1</sup>, Ruiyu Dang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>College of Computer Science, Chengdu University, Chengdu Sichuan

<sup>2</sup>Faculty of Business and Economics, University of Hong Kong, Hong Kong

Received: Oct. 16<sup>th</sup>, 2021; accepted: Nov. 17<sup>th</sup>, 2021; published: Nov. 24<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

By methods of mathematical analysis theory, some results of the variation rate of multivariate cumulative function with respect to functional parametric are established. Some applications in the fields of multiple integrals, probability theory and economic management science illustrating the usefulness of the results are also provided.

## Keywords

**Multivariate Cumulative Function, Functional Parametric, Variation Rate, Probability Theory, Economic Management Science**

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 背景

微积分是一门重要的认识世界、改造世界的基础科学,很多结论从哲学高度揭示了各种现象的本质。自诞生之日起,一直广受关注,虽然时至今日发展已经非常完善,然而相关主题及其在其他相关学科中应用的研究课题一直没有停止过[1]-[7]。

设有线密度为  $f(x)$  的直线型物体占有区间  $[a, u(t)]$ , 其中  $a < u(t) \leq b$ , 那么物体在  $[a, u(t)]$  的质量相对于参数  $t$  的变换率为:  $\frac{d}{dt} \int_a^{u(t)} f(x) dx = f[u(t)]u'(t)$ 。

这个结论的特例:  $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$  是微积分中的经典结论[1], 是建立微积分基本公式——牛顿-莱布尼茨公式的基础。如果抛开密度与质量这个背景,这个公式则给出了函数  $f(x)$  相对于参数  $t$  的变化率。

一个自然的推广:在区域  $D$  上连续的二元函数  $f(x, y)$  相对于可导函数  $z = \varphi(x, y)$  给出的参数  $z$  的变化率又会呈现怎样的关系呢?该问题的物理背景是:对于占有平面区域  $D$ 、面密度为连续函数  $f(x, y)$  的物体,能否求得其质量关于参数  $z = \varphi(x, y)$  的变化率呢?这个问题结论可以很自然地应用到数理科学、工程实践、经济管理、生态学、传染病等众多涉及多元函数变化率的学科或领域中,具有一定的实践价值。

先给出一些相关引理和推论。

**引理 1 [1]** 设  $f(x, y)$  与  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  在矩形域  $(a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta)$  上连续, 则积分  $\int_a^b f(x, y) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上可导, 且  $\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ 。

根据这个引理可以得到更一般的情形:

**推论 1 [1]** 设  $f(x, y)$  与  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  在矩形域  $(a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta)$  上连续, 而函数  $a(y), b(y)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可导, 且  $a \leq a(y) \leq b, \alpha \leq b(y) \leq \beta$ , 那么函数  $\gamma(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$  对任意  $y \in (\alpha, \beta)$  可导, 且  $\frac{d\gamma(y)}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f[b(y), y]b'(y) - f[a(y), y]a'(y)$ .

**推论 2** 设  $z \in [\alpha, \beta]$ , 函数  $f(x, y)$  在矩形域  $(a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta)$  上连续,  $\varphi(x, z)$  与  $\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}$  在  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 那么

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_a^b dx \int_{\varphi(x, z)}^{\varphi(x, z + \Delta z)} f(x, y) dy = \int_a^b f[x, \varphi(x, z)] \frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, z) dx.$$

定义 1 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  内有定义,  $D' = \{(s, t) \in D \mid s \leq x, t \leq y, (x, y) \in D\}$ , 称  $\iint_{D'} f(s, t) ds dt$  为区域  $D$  内关于二元函数  $f(x, y)$  的累积函数, 记为  $\llbracket f_{(x, y)} \rrbracket$ , 简记为  $\llbracket f \rrbracket$ 。特别地,  $\llbracket f_D \rrbracket = \iint_D f(x, y) dx dy$ 。

若  $D' = \{(s, t) \in D \mid (s, t) \leq \varphi(x, y, z), (x, y) \in D\}$ , 则称  $\iint_{D'} f(s, t) ds dt$  为  $D$  内二元函数  $f(x, y)$  关于参数曲线  $\varphi(x, y, z) = 0$  的累积函数, 记为  $\llbracket f_{\varphi(x, y, z)} \rrbracket$ , 简记为  $\llbracket f_\varphi \rrbracket$ 。

若  $\Delta D$  为  $D$  内由  $\varphi(x, y) = z$  与  $\varphi(x, y) = z + \Delta z$  围成的区域, 则称  $\iint_{\Delta D} f(s, t) ds dt$  为  $D$  内二元函数  $f(x, y)$  关于参数曲线  $\varphi(x, y) = z$  的增量累积函数, 记为  $\Delta \llbracket f_\varphi \rrbracket$ , 即  $\Delta \llbracket f_\varphi \rrbracket = \llbracket f_{\varphi(x, y, z + \Delta z)} \rrbracket - \llbracket f_{\varphi(x, y, z)} \rrbracket$ 。

我们的主要任务是讨论累积函数  $m_{\varphi(x, y) \leq z}$  对参数  $z$  的变化率, 即欲求:

$$\frac{d \llbracket f_\varphi \rrbracket}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \llbracket f_\varphi \rrbracket}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta D} f(x, y) dx dy}{\Delta z}.$$

## 2. 主要结论

**定理 1** 假设区域  $D$  边界逐段光滑, 函数  $f(x, y)$  是  $D$  上的连续函数,  $\varphi(x, y) - z = 0$  是  $D$  上的可微函数,  $\varphi(x, y)$  在  $D$  上的最小值和最大值分别为  $\alpha, \beta$ 。如果  $|\text{grad} \varphi(x, y)| \neq 0$ , 那么对于  $\alpha \leq z \leq \beta$  有

$$\frac{d \llbracket f_{\varphi-z} \rrbracket}{dz} = \int_{\varphi(x, y)=z} \frac{f(x, y)}{|\text{grad} \varphi(x, y)|} ds. \quad (1)$$

证明: 因  $|\text{grad} \varphi(x, y)| \neq 0$ , 不妨设  $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$ , 也即是说  $\frac{\partial z}{\partial y} > 0$  或  $\frac{\partial z}{\partial y} < 0$ , 不失一般性, 设  $\frac{\partial z}{\partial y} > 0$ 。用

记号  $D_z$  表示区域  $D$  内由曲线  $z = \varphi(x, y)$  与  $z + \Delta z = \varphi(x, y)$  所围成的部分, 如图 1 所示。

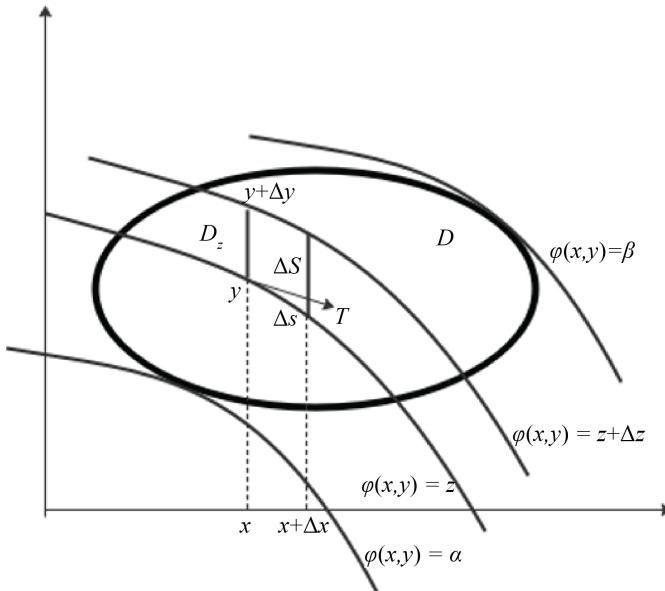


Figure 1. Cumulative rate of change of multivariate function  
图 1. 多元函数的累积变化率

注意到:  $\Delta \llbracket f_{\varphi-z} \rrbracket = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$ 。

再将区域  $D_z$  用  $x$  与  $x+\Delta x$  分割成小区域  $\Delta S$ ，其面积也记为  $\Delta S$ 。设垂线  $x$  与  $\varphi(x, y) = z$ 、 $\varphi(x, y) = z + \Delta z$  的交点纵坐标分别为  $y$  与  $y + \Delta y$ 。

注意到交点处切向量为  $\mathbf{T}(x, y) = \{\varphi_y(x, y), -\varphi_x(x, y)\}$ 。那么

$$\Delta S = \Delta y \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \Delta s = \frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \Delta s \Delta z, \quad (2)$$

其中， $\Delta s$  是曲线  $z = \varphi(x, y)$  被  $x$  与  $x + \Delta x$  截得的弧长。

注意到  $z = \varphi(x, y)$  的可微性，可得  $\varphi_y = \frac{\Delta z}{\Delta y} + o(\Delta y)$ ，所以

$$\varphi_y \frac{\Delta y}{\Delta z} = 1 + o(\Delta y). \quad (3)$$

由(2)、(3)可得

$$\Delta S = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \Delta s \Delta z = \frac{1}{|\operatorname{grad} \varphi(x, y)|} \Delta s \Delta z. \quad (4)$$

由积分的元素法可得：

$$\Delta \llbracket f_{\varphi-z} \rrbracket = \int_z^{z+\Delta z} dz \int_{\varphi(x, y)=z} \frac{f(x, y)}{|\operatorname{grad} \varphi(x, y)|} ds. \quad (5)$$

因此，由定义 2、推论 2 及(5)可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \llbracket f_{\varphi-z} \rrbracket &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \llbracket f_{\varphi-z} \rrbracket}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} dz \int_{\varphi(x, y)=z} \frac{f(x, y)}{|\operatorname{grad} \varphi(x, y)|} ds \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \Delta z \int_{\varphi(x, y)=\xi} \frac{f(x, y)}{|\operatorname{grad} \varphi(x, y)|} ds \\ &= \int_{\varphi(x, y)=z} \frac{f(x, y)}{|\operatorname{grad} \varphi(x, y)|} ds \end{aligned}$$

其中  $\xi$  是  $z$  与  $z + \Delta z$  之间的一个点。证毕。  $\square$

**推论 3** 设区域  $D$  边界逐段光滑，函数  $f(x, y)$  是  $D$  上的连续函数， $z = x$ ，其中  $z$  的最小值和最大值分别为  $\alpha, \beta$ ，那么对于  $\alpha \leq z \leq \beta$  有

$$\frac{d}{dz} \llbracket f_{x-z} \rrbracket = \int_{z=x} f(x, y) ds = \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} f(z, y) dy.$$

其中  $y_1(z), y_2(z)$  分别是区域  $D$  在  $z = x$  处的下边界和上边界的纵坐标。

**推论 4** 设区域  $D$  边界逐段光滑，函数  $f(x, y)$  是  $D$  上的连续函数， $z = y$ ，其中  $z$  的最小值和最大值分别为  $\alpha, \beta$ ，那么对于  $\alpha \leq z \leq \beta$  有

$$\frac{d}{dz} \llbracket f_{y-z} \rrbracket = \int_{z=y} f(x, y) ds = \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} f(x, x) dx.$$

其中  $x_1(z), x_2(z)$  分别是区域  $D$  在  $z = y$  处的左边界和右界的横坐标。

**定理2** 设凸区域  $D$  边界逐段光滑, 函数  $f(x, y)$  是  $D$  上的连续函数, 函数  $G(x, y, z) = y - \varphi(x, z) \cdot \frac{\partial G}{\partial x}$ 、  
 $\frac{\partial G}{\partial z}$  在  $D \times [\alpha, \beta]$  内连续,  $\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ ,  $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ , 其中  $z$  的取值为  $[\alpha, \beta]$ 。曲线  $y = \varphi(x, z)$  与区域  $D$  的边界交  
点为  $(a(z), \varphi(a(z), z))$  和  $(b(z), \varphi(b(z), z))$ , 其中  $\alpha \leq z \leq \beta$ ,  $a(z) < b(z)$ 。那么

$$\frac{d}{dz} \llbracket f_G \rrbracket = \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, \varphi(x, z)) \left| \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} \right| dx.$$

**定理3** 设凸区域  $D$  边界逐段光滑, 函数  $f(x, y)$  是  $D$  上的连续函数, 函数  $G(x, y, z) = x - \varphi(y, z) \cdot \frac{\partial G}{\partial y}$ 、  
 $\frac{\partial G}{\partial z}$  在  $D \times [\alpha, \beta]$  内连续,  $\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ ,  $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ , 其中  $z$  的取值为  $[\alpha, \beta]$ 。曲线  $x = \varphi(y, z)$  与区域  $D$  的边界交  
点为  $(\varphi(c(z), z), c(z))$  和  $(\varphi(d(z), z), d(z))$ , 其中  $\alpha \leq z \leq \beta$ ,  $c(z) < d(z)$ 。那么

$$\frac{d}{dz} \llbracket f_G \rrbracket = \int_{c(z)}^{d(z)} f(\varphi(y, z), y) \left| \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z} \right| dy.$$

### 3. 实例与应用

#### 3.1. 算例

例 1 设密度为  $f(x, y) = x^2 + y^2$  的物体, 其分布区域  $D$  是  $x \geq 0, 0 \leq y \leq x$  包含于  $x^2 + y^2 \leq 4$  的部分, 求该物体质量相对于  $z = x^2 + y^2$  的累积变化率。

解: 这里  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ , 因此  $\text{grad} \varphi(x, y) = 2\{x, y\}$ ,  $|\text{grad} \varphi(x, y)| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ 。

当  $0 \leq z \leq 4$  时, 由(1)可得

$$\frac{d}{dz} \llbracket f_{D_z} \rrbracket = \int_{z=x^2+y^2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds.$$

令  $x = \sqrt{z} \cos \theta, y = \sqrt{z} \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。故  $ds = \sqrt{z} d\theta$ , 由曲线积分的计算法可知

$$\frac{d}{dz} \llbracket f_{D_z} \rrbracket = \int_0^{\frac{\pi}{4}} z d\theta = \frac{\pi}{4} z.$$

#### 3.2. 概率论中的应用

设二元连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为  $\rho_{(X,Y)}(x, y)$ , 随机变量的函数  $Z = Z(X, Y)$ , 随机变量  $Z = Z(X, Y)$  的概率密度为:

$$\rho_Z(z) = \frac{d}{dz} \llbracket \rho \rrbracket = \int_{z(x,y)=z} \frac{\rho(x, y)}{|\text{grad} z(x, y)|} ds.$$

作为定理 1 的简单应用, 容易求得概率论中常见随机变量  $Z = X + Y$  密度函数:

**定理 4** 设二元连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为  $\rho_{(X,Y)}(x, y)$ , 随机变量  $Z = X + Y$  的概率密度函数为

$$\rho_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{(X,Y)}(x, z-x) dx.$$

事实上, 由于  $Y = X - Z$ , 由定理 2 可得

$$\rho_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x, z-x)}{\sqrt{2}} \sqrt{2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, z-x) dx.$$

特别地, 若随机变量  $(X, Y)$  相互独立,  $\rho_{(X,Y)}(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y(y)$ , 随机变量  $Z = X + Y$  的概率密度函数为

$$\rho_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(x)\rho_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_X(z-y)\rho_Y(y) dy.$$

这就是卷积公式[8]。

例 2 设随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为  $\rho_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 求  $Z = X + Y$

的概率密度函数。

解: 由题意可知曲线  $z = x + y$  与  $(X, Y)$  的非零概率区域交点为  $(z, 0)$  和  $(0, z)$ ,  $z$  的取值范围是  $z > 0$ 。

由定理 4, 在非零概率区域  $z > 0$  内  $\rho_Z(z) = \int_0^z \frac{z}{2} e^{-z} dx = \frac{1}{2} z^2 e^{-z}$ 。

综上可知,  $\rho_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} z^2 e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

例 3 设均匀分布随机变量  $(X, Y)$  的取值满足  $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 。求  $Y = |X| + Z$  的概率密度函数。

解: 由题意可得概率密度为

$$\rho_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

容易知道  $-1 \leq z \leq 1$ 。

注意到  $z = \begin{cases} y - x, & x \geq 0 \\ y + x, & x < 0 \end{cases}$ , 及  $z = \varphi(x, y)$  分别在  $x \geq 0$  和  $x < 0$  时可微(如图 2), 满足定理 1 的条件。

结合  $z = \varphi(x, y)$  的奇偶性及区域的对称性可得:

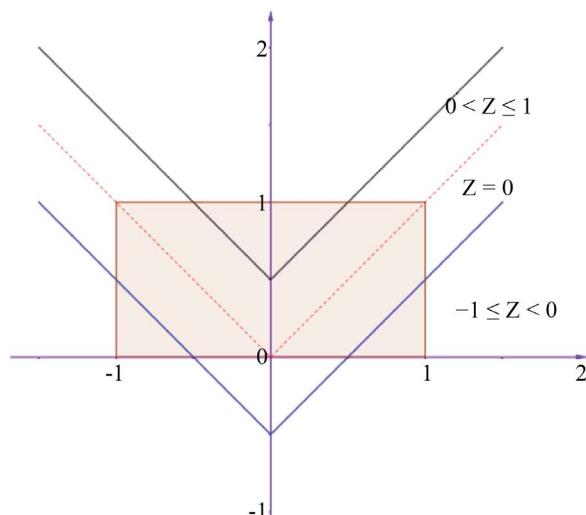


Figure 2. Schematic diagram of random variable value  
图 2. 随机变量取值示意图

记  $G = |X| - Y + Z$ 。

当  $-1 \leq z < 0$  时,

$$\rho_Z(z) = 2 \frac{d[\rho_G]}{dz} = 2 \int_{y-x=z} \frac{2}{\sqrt{2}} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-z}^1 \sqrt{2} dx = 1 + z;$$

当  $0 \leq z < 1$  时,

$$\rho_Z(z) = 2 \frac{d[\rho_G]}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{y-x=z} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{1-z} \sqrt{2} dx = 1 - z;$$

因此  $Y = |X| + Z$  的概率密度函数为

$$\rho_Z(z) = \begin{cases} 1+z, & -1 \leq z < 0 \\ 1-z, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

### 3.3. 经济管理科学中的应用

在经济管理中, 经常要研究多因素成本控制或利润问题。可以通过单位销售量、价格和成本得到收益的“密度”函数, 而不同的销售组合就对应了不同的参数曲线, 由本文理论可以求得不同的参数曲线对应的收益预期。

例 3 [9] 设某公司销售 A 类商品  $x$  单位和 B 类商品  $y$  的利润

$$P(x, y) = -(x-200)^2 - (y-100)^2 + 5000.$$

假设一周销售 A 类商品个数在 150~200 内变化, 销售 B 类商品个数在 80~100 内变化。若某控制变量与销量间满足  $z = \frac{x}{5} + \frac{y}{2}$ , 求利润相对于  $z$  的变化率。

解 用  $L$  表示利润。函数  $P(x, y)$  的取值范围  $D: 150 \leq x \leq 200, 80 \leq y \leq 100$ 。销量函数可改写为  $y = \varphi(x, z) = \frac{10z - 2x}{5}$ , 显然  $70 \leq z \leq 90, \frac{\partial y}{\partial z} = 2$ 。

由定理 1 可知, 当  $70 \leq z < 80$  时,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dz} &= \int_{150}^{5z-200} P(x, \varphi(x, z)) \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} dx \\ &= \int_{150}^{5z-200} \left( -(x-200)^2 - \left( 2z - \frac{2}{5}x - 100 \right)^2 + 5000 \right) \cdot 2 dx \\ &= -\frac{290}{3} z^3 + 23200 z^2 - 1806000 z + \frac{137690000}{3} \end{aligned}$$

当  $80 \leq z \leq 90$  时,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dz} &= \int_{5z-250}^{200} P(x, \varphi(x, z)) \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} dx \\ &= \int_{5z-250}^{200} \left( -(x-200)^2 - \left( 2z - \frac{2}{5}x - 100 \right)^2 + 5000 \right) \cdot 2 dx \\ &= \int_{5z-250}^{200} \left( -(x-200)^2 - \left( 2z - \frac{2}{5}x - 100 \right)^2 + 5000 \right) \cdot 2 dx \\ &= \frac{290}{3} z^3 - 26100 z^2 + 2299000 z - 65970000 \end{aligned}$$

$$\text{综上, } \frac{dL}{dz} = \begin{cases} -\frac{290}{3}z^3 + 23200z^2 - 1806000z + \frac{137690000}{3}, & 70 \leq z < 80 \\ \frac{290}{3}z^3 - 26100z^2 + 2299000z - 65970000, & 80 \leq z \leq 90 \end{cases}.$$

## 致 谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

## 基金项目

全国教育科学“十三五”规划 2019 年度教育部重点课题子课题(DCA190331-1011); 教育部产学合作协同育人项目(202002267007, 202101097002); 成都大学教改项目(CDJGB2017034)、课程思政项目(CDKCSZKC202002)。

## 参考文献

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析下册[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [2] 韩天勇, 文家金, 宋安超, 叶建华. k-正态分布及其应用(英文) [J]. 数学杂志, 2017, 37(4): 737-750.
- [3] 韩天勇, 文家金. 正态分布与分层教学[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(6): 183-193.
- [4] 韩天勇, 叶建华. 一类无穷项和数列的极限[J]. 成都大学学报(自然科学版), 2014, 33(3): 222-225.
- [5] Wen, J.J., Han, T.Y. and Gao, C.B. (2011) Convergence Tests on Constant Dirichlet Series. *Computers & Mathematics with Applications*, **62**, 3472-3489. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.08.064>
- [6] 隋允康. 高阶方向导数及其应用[J]. 北京工业大学学报, 2010, 36(8): 1135-1140.
- [7] 常呈云. 简论用多元函数的微分法分析生产函数[J]. 河南财经学院学报, 1990(3): 58-65.
- [8] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [9] 谢季坚, 邓小炎. 微积分及其在生命科学、经济管理中的应用[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2015.