Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1803-1809
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111203

Hans汉斯

带线性项Carrier型问题的无穷多解

钟荣花，王　跃*

贵州大学，数学与统计学院，贵州　贵阳

收稿日期：2021年10月6日；录用日期：2021年11月9日；发布日期：2021年11月16日

摘　要

运用特殊函数法和相关的分析技巧，考虑了带线性项的Carrier型问题，获得无论退化情形还是非退化情形都存在无穷多解，并对结论给出了适当的举例。

关键词

Carrier型问题，线性项，特殊函数法，无穷多解

Infinitely Many Solutions of Carrier Type Problems with Linear Term

Ronghua Zhong, Yue Wang*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 6th, 2021; accepted: Nov. 9th, 2021; published: Nov. 16th, 2021

Abstract

Carrier-type problem with linear term was considered by using the methods of special function and analysis techniques. We get that there exist infinitely many solutions whether degenerate case or non-degenerate case, and the examples are given at last.

Keywords

Carrier-Type Problem, Linear Term, Method of Special Function, Infinitely Many Solutions

*通讯作者。

文章引用: 钟荣花, 王跃. 带线性项 Carrier 型问题的无穷多解[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1803-1809.
DOI: 10.12677/pm.2021.1111203

1. 引言

1945 年，Carrier [1]在机械问题的研究中，构造了如下模型：

$$\left[1+\frac{\alpha^{-2}}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi^2(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\right]^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}$$

其中 $\alpha^2=\frac{T_0}{EA}$， $\xi=\frac{\pi x}{l}$， $\eta=\frac{\pi}{l}\left(\frac{T_0}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}t$ 为无量纲量，T_0 是静止位置的张力，E 是弦材料的恒定特性，A 是弦在静止位置的截面积，l 是弦材料的长度，ρ 表示单位体积的质量，φ 为一函数。由于此时该问题中的 ξ，η 利用了变量变换模式，而更一般的情形也随后得到了广泛的研究。同时在后面的研究者们将形如 $-M\left(t,x,\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(t,x,u)$ 的问题称为 Carrier 型问题。文献[2]中提出用 Faedo-Galerkin 方法和 Tartar 方法等方法解决 Carrier 型的非线性混合问题解的全局存在性；文献[3]考虑了 Kirchhof-Carrier 型非线性波动方程的 Robin-Dirichlet 问题，运用 Faedo-Galerkin 方法和非线性项线性化的方法，证明了弱解的存在性和唯一性；文献[4]利用不动点指标理论得到 Carrier 型问题的多个正解；文献[5]立足于 Banach 空间，利用 Ascoli-Arzelà 定理和 Lyapunov 约化泛函得到 Cauchy 型 Carrier 问题解的存在性和渐进性质；文献[6]考虑了一类非局部边值问题的正解的存在性，文献[7]考虑了一类退化非局部项的问题，利用不动点定理证明了正解的存在性；文献[8]考虑了一类非局部和非变分奇异摄动问题

$$\begin{cases}-\varepsilon^2A\left(\varepsilon^{-n}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=|u|^{p-1}u,\ \ x\in\mathbf{R}^N,\\ 0<u\in H^1\left(\mathbf{R}^N\right),\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=0\end{cases}$$

解的存在性，其中 $1<p<2^*-1$，$2\le q<2^*$，$A:(0,+\infty)\to[a,+\infty),V(x):\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ 是两个连续函数，$a>0$，而 $\varepsilon>0$ 是一个小的参数；文献[9]在有界矩体上考虑纯指数型右端项的一类新 Kirchhoff 型问题

$$-\left(a-b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=u^q,\quad x\in\Omega$$

古典解的存在性，其中常数 a，b 不同时为零，$q\ne-1$，$\Omega\subset\mathbf{R}^N$。文献[10]在光滑有界域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 上，考虑了一类退化的非局部问题的正解的存在、不存在和多重性；这类问题是近几年的研究热点之一，同时关于其解的存在性也已经有很多学者研究，如文献[11]在无界域上研究了具有临界项的广义问题，利用函数构造方式获得无穷多解。文献[12]考虑一类非局部椭圆问题

$$\begin{cases}-a\left(\int_\Omega|u|^q\,\mathrm{d}x\right)\Delta u=h_1(x,u)f\left(\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\right)+h_2(x,u)g\left(\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\right), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

的解的存在性，其中 $q,p,r\in[1,+\infty)$，$h_i:\bar{\Omega}\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，$i=1,2$，$a,f,g:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是连续函数，Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的光滑有界域，$N\ge1$。更多关于正负模量的 Kirchhoff 型问题以及 Carrier 型问题解的存在性研究，参见文献[13]-[18]以及他们的引用文献，在文献[14] [15]中给出了 Carrier 型问题的进展，通过系统建模和分析方法，说明了为何描述 Carrier 型问题并描述其确定性非线性现象，文献[16]给出的是正模量 Kirchhoff 型问题的研究进展，文献[17] [18]则阐述负模量 Kirchhoff 型问题研究。更多耦合型问题可参见

他们的引用和被引状况。

诸如文献[12]-[18]等，由于 Carrier 型和 Kirchhoff 型独立或耦合问题的研究越来越多，于是，受上述文献特别是文献[9] [11]方法的启发，本文考虑下述**带线性项的负模量 Carrier 型问题**

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N\ (N\geq 1)$ 为光滑有界域； a,b,λ 为任意实数，但至少有两个不同时为零。

2. 理论基础

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^N\ (N\geq 1)$ 是光滑有界域，在文献[19] [20]中提到关于下述方程

$$\begin{cases} -\Delta u=\mu u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

存在特征值序列 $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty\subset\mathbf{R}$ ，满足

$$0<\mu_1<\mu_2\leq\cdots\leq\mu_i\leq\cdots,\ \lim_{i\to\infty}\mu_i=+\infty,\ 0<\mu_1=\inf_{\varphi\in C_0^{2,2}(\Omega),\varphi\neq 0}\frac{\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega\varphi^2\mathrm{d}x}$$

及其对应的特征函数序列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty\subset C_0^2(\Omega)$, 同时有 $\int_\Omega|\nabla\varphi_i|^2\mathrm{d}x=\mu_i\int_\Omega\varphi_i^2\mathrm{d}x$, 当 $\mu\in\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ 时问题(2)有解 φ_i ，即 $t\varphi_i$ 是问题(2)的解，而当 $\mu\notin\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ 时问题(2)无解。

立足于上述事实，我们将对 a,b,λ 满足不同情形时问题(1)解的存在性及解的形式作讨论。由于问题(1)中出现的实数 a,b,λ 在符号上具有对称性，因此我们只给出 $a\geq 0$ 时 b,λ 在不同符号下问题(1)的解及状态，而当 $a<0$ 时问题(1)解的存在性问题类似可得，不再赘述。下面的理论都立足于实数范围。

3. 主要结论

定理 1 如果 $a>0,\lambda\geq 0$ ，则当 $b>0$ 时问题(1)有无穷多解 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ ；当 $b<0$ 时存在正数列 $\{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$ ，使得 $\lambda_i<\lambda\leq\lambda_{i+1}$ 时问题(1)至少有 i 个线性无关解 $\{u_n\}_{n=1}^i$ ，而 $\lambda\leq\lambda_1$ 时，只有零解。

证明 当 $i>1$ 时，我们考虑关于 t 的代数方程

$$a-b\int_\Omega(t\varphi_i)^2\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\mu_i} \tag{3}$$

当 $b\neq 0$ 时，方程(3)具有实数或复数型的解

$$t_\pm=\pm\left[\frac{a\mu_i-\lambda}{b\mu_i}\left(\int_\Omega\varphi_i^2\mathrm{d}x\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

且当 $\frac{a\mu_i-\lambda}{b}\geq 0$ 时其解总为实数。需要注意的是，此时直接可以验证 $-\Delta(t_\pm\varphi_i)=\mu_i(t_\pm\varphi_i)$ ，现让它与式(3)左右两边分别相乘，再联系到式(4)，则可得到

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_\Omega(t_\pm\varphi_i)^2\mathrm{d}x\right)\Delta(t_\pm\varphi_i)=\lambda(t_\pm\varphi_i), & x\in\Omega, \\ t_\pm\varphi_i=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

也就是说，当 $\frac{a\mu_i-\lambda}{b}=0$ 时有 $t_\pm\equiv 0$ ，而当 $\frac{a\mu_i-\lambda}{b}>0$ 时式(5)总成立，从而 $u_i=t_\pm\varphi_i$ 是问题(1)的解。

(i) $a>0,b>0,\lambda\ge 0$ 时，对于任意的 $\lambda>0$，必存在 $k\in N^*$，$k\ge 1$，使得 $\lambda<a\mu_{k+1}$；若 $\lambda\le a\mu_2$，则 $a\mu_{i+1}-\lambda>0$ 总成立。因此再根据式(4)和式(5)可得到问题(1)有解

$$u_i=t_{\pm}\varphi_i=\pm\left[\frac{a\mu_{i+1}-\lambda}{b\mu_{i+1}}\left(\int_\Omega\varphi_{i+1}^2\mathrm{d}x\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}\varphi_{i+1}=\pm\left(\frac{a\mu_{i+1}-\lambda}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left|\nabla\varphi_{i+1}\right|^2\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi_{i+1} \tag{6}$$

由于 $i=1,2,\cdots$，取 $n=1$ 对应 k，$n=2$ 对应 $k+1$，$\cdots$，则它们可以构成解序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$。另一方面，若 $a>0,b>0,\lambda=0$，此时原问题的解必然在 $a-b\int_\Omega u^2\mathrm{d}x=0$ 或者 $\Delta u\equiv 0$ 的函数集中取得。而满足 Δu 有界且 $\int_\Omega u^2\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$ 的函数 u 有无穷多，事实上对任意的 $v\in C_0^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，可得所有的

$$u:=\left(\frac{a}{b}\int_\Omega v^2\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{2}}v$$

都是问题(1)的解。

(ii) $a>0,b<0$，$0<\lambda_1\le\lambda_i<\lambda\le\lambda_{i+1}$ 时，因为有 $\lambda_i=a\mu_{i+1}$，$n=1,\cdots,i$，则 $\frac{\lambda_n-\lambda}{b\mu_{n+1}}=\frac{a\mu_{n+1}-\lambda}{b\mu_{n+1}}>0$ 恒成立，故方程(3)总有非零解可以表述为(4)，从而问题(1)至少有 i 对非平凡解

$$u_n=\pm\left(\frac{a\mu_n-\lambda}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left|\nabla\varphi_n\right|^2\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi_n,\quad n=1,\cdots,i$$

显然这些解至少有 i 个线性无关。当 $0<\lambda\le\lambda_1=a\mu_1$ 时，只有平凡解 $u\equiv 0$。事实上，如果此时 $u\ne 0$，则根据 $a>0,b<0$，$\lambda\le a\mu_1$，利用格林公式得出

$$a\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x<\left(a+|b|\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\le a\mu_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\le a\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2\mathrm{d}x$$

这显然构成矛盾。综上所述，不仅证明了定理 1 解的存在性，而且还给出了一类解的抽象形式。

定理 2 如果 $a=0$，则当 $b\lambda<0$ 时，问题(1)有无穷多解 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，而 $b\lambda\ge 0$ 时只有平凡解。

证明 若 $a=0,b\lambda<0$，则对 $i\ge 1$ 时的特征值 μ_i 和它对应的特征函数 φ_i，方程(3)变为

$$-|b|\int_\Omega\left(t\varphi_i\right)^2\mathrm{d}x=\frac{|\lambda|}{\mu_i}$$

关于 t 的方程总有实数解

$$t_{\pm}=\pm\left[\frac{|\lambda|}{|b|\mu_i}\left(\int_\Omega\varphi_i^2\mathrm{d}x\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\pm\left(\left|\frac{\lambda}{b}\right|\left(\int_\Omega\left|\nabla\varphi_i\right|^2\mathrm{d}x\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

则易知问题(1)有无穷多解，可以表示为

$$u_n=\pm\left(\left|\frac{\lambda}{b}\right|\int_\Omega\left|\nabla\varphi_i\right|^2\mathrm{d}x\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi_n,\quad i=1,2,\cdots$$

此外，若 $a=0,b\lambda\ge 0$ 时 u 是问题(1)的解，则根据格林公式有

$$|b|\left(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\Delta uv\mathrm{d}x=|\lambda|\int_\Omega uv\mathrm{d}x=-|b|\left(\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega\nabla v\nabla u\mathrm{d}x$$

特别取 $v=u$ 时便得出 $u=0$，因此 $a=0$ 且 $b\lambda\ge 0$ 时问题(1)只有平凡解。

注记 1 当$b=0$时，如果$\frac{\lambda}{a}\in\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$，则问题(1)存在无穷多解。

4. 应用

例 1 设$\Omega=(1,2)$，此时问题(1)为

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_{\Omega}u^2(x)\mathrm{d}x\right)u''(x)=\lambda u(x), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{7}$$

下面我们推导注记 1 和定理 1 的结论，即在$a>0$，$\lambda>0$的条件假设下有如下的结论：如果$b>0$，则问题(7)有无穷多解$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$；如果$b<0$，则存在正数列$\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$，使得$\lambda_i<\lambda\le\lambda_{i+1}$时问题(7)至少有$i$个线性无关解$\{u_n\}_{n=1}^{i}$；而$\lambda\le\lambda_1$时，问题(7)只有零解。根据文献[19] [20]中关于谱理论的阐述，对任意的非零整数i，$-\Delta u=\mu u$的特征值$\mu_i=i^2\pi^2$。因此通过直接验证，我们能够找到一个特征函数的无穷序列$\varphi_i=\sin\left[i\pi(x-1)\right]$，其中$i=1,2,\cdots,\infty$，而此时有

$$\int_1^2\left|\nabla\varphi_i\right|^2\mathrm{d}x=\frac{i^2\pi^2}{2}.$$

当$a>0,b=0,\lambda>0$时，只要取$\lambda_i=a\mu_i=ai^2\pi^2$，由于$i$的任意性，当$\frac{\lambda}{a}\in\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$，即存在某个$k$使得$\lambda=a\lambda_k=ak^2\pi^2$时直接验证可知问题(7)有无穷多解$u_{k,t}=t\sin\left[k\pi(x-1)\right]$，其中的无穷性由$t$的任意性决定；当$a>0,b>0$时，对于任意的$\lambda>0$，必存在$k\in N^*$，$k\ge1$，使得$\lambda<a\mu_{k+1}$，则对任意的正整数$n\ge k+1$，$a\mu_n-\lambda>0$总成立，因此我们直接可验证对任意的正整数$n\ge k+1$，函数

$$u_n(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{n\pi}\left[\frac{an^2\pi^2-\lambda}{b}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\left[n\pi(x-1)\right] \tag{8}$$

都满足方程(7)，也就是说，对任意的正整数$n\ge k+1$，(8)都是问题(7)的解。易知问题(7)有无穷解。

如果$b<0$，则对正数列$\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}=\left\{ai^2\pi^2\right\}_{i=0}^{\infty}$，如果$\lambda_i=ai^2\pi^2<\lambda\le\lambda_{i+1}=ai_{i+1}^2\pi^2$，则对于$n=0,\cdots,i$，总有$\frac{an^2\pi^2-\lambda}{b}>0$，因此问题(7)至少有$i$个线性无关解$\{u_n\}_{n=1}^{i}$，其表达式为(8)；而果$b<0$且$\lambda\le\lambda_1$时，很显然$\frac{an^2\pi^2-\lambda}{b}<0$，它的二次方根并不是一个实数，但零是其解并且能够利用格林公式得出问题(7)只有零解。

例 2 设$\Omega=(1,2)$，对任意非零整数i,m，当$a>0,b>0$，$\lambda=0$，取

$$u_{i,m}(x)=\pm\frac{1}{i\pi}\left[\frac{2a}{b}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\left[i\pi(x-1)+2m\pi\right],$$

这里的i,m为任意整数，那么

$$\begin{cases}u'_{i,m}(x)=\pm\frac{1}{i\pi}\left[\frac{2a}{b}\right]^{\frac{1}{2}}\cos\left[i\pi(x-1)+2m\pi\right],\\ -u''_{i,m}(x)=\pm\left[\frac{2a}{b}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\left[i\pi(x-1)+2m\pi\right],\end{cases}$$

显然 $u''_{i,m}(x)$ 是有界函数；另外，注意到此时 $u^2_{i,m}(x)=\pm\dfrac{2a}{b(i\pi)^2}\sin^2\left[i\pi(x-1)+2m\pi\right]$，于是

$$a-b\int_1^2 u^2_{i,m}(x)\mathrm{d}x=a-\frac{2a}{b(i\pi)^2}\int_1^2\sin^2\left[i\pi(x-1)+2m\pi\right]\mathrm{d}x=a-a=0,$$

也就是说 $u_{i,m}(x)$ 都是问题(7)的解。由于 i,m 的任意性，则可以得出问题(7)有无穷解。注意，当 $a>0,b>0,\lambda=0$ 时，除了 $u_{i,m}(x)$ 外，问题(7)的解还有很多，这里不再列举。

基金项目

贵州省研究生科研基金立项项目(黔教合 YJSCXJH[2020]083)，贵州民族大学科研项目(GZMUZK[2021]YB19)。

参考文献

[1] Carrier, G.F. (1945) On the Non-Linear Vibration Problem of the Elastic String. *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**, 157-165. https://doi.org/10.1090/qam/12351

[2] Miranda, M.M., Lourêdo, A.T. and Medeiros, L.A. (2015) On Nonlinear Wave Equations of Carrier Type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **432**, 565-582. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.070

[3] Huu, N.N., Phuong, N.L.T. and Thanh, L.N. (2018) On a Nonlinear Wave Equation of Kirchhoff-Carrier Type: Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solution in a Small Parameter. *Mathematical Problems in Engineering*, **2018**, Article ID: 3626543. https://doi.org/10.1155/2018/3626543

[4] Yan, B.Q. and Wang, D.C. (2016) The Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Nonlocal Elliptic Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **442**, 72-102. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.023

[5] Silva, V.F., Carvalho, R.R. and Miranda, M.M. (2016) On a Beam Equation in Banach Spaces. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2016**, 1-24. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.110

[6] Alves, C.O., Corrrea, F.J.S.A. and Ma, T.F. (2005) Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. *Computers & Mathematics with Applications*, **49**, 85-93. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.008

[7] Gasiński, L. and Junior, J.R.S. (2019) Multiplicity of Positive Solutions for an Equation with Degenerate Nonlocal Diffusion. *Computers & Mathematics with Applications*, **78**, 136-143. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.02.029

[8] Chen, Z.M. and Dai, Q.Y. (2019) Concentrated Solution for Some Non-Local and Non-Variational Singularly Perturbed Problems. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, 1-31. https://doi.org/10.1007/s00526-019-1626-9

[9] 王跃, 索洪敏, 韦维. 无边界约束的一类新 Kirchhoff 型问题的古典解[J]. 数学物理学报: A 辑, 2020, 40A(4): 857-868.

[10] Gasiński, L. and Junior, J.R.S. (2020) Nonexistence and Multiplicity of Positive Solutions for an Equation with Degenerate Nonlocal Diffusion. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **52**, 489-497. https://doi.org/10.1112/blms.12342

[11] 王跃, 熊宗洪, 魏其萍, 等. 椭圆型广义 Kirchhoff 问题的多重解[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2020, 23(5): 19-22.

[12] Alves, C.O. and Covei, D. (2015) Existence of Solution for a Class of Nonlocal Elliptic Problem via Sub-Supersolution Method. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **23**, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.11.003

[13] Park, J.Y., Bae, J.J. and Jung, I.H. (2001) On Existence of Global Solutions for the Carrier Model with Nonlinear Damping and Source Terms. *Applicable Analysis*, **77**, 305-318. https://doi.org/10.1080/00036810108840910

[14] Rega, G. (2004) Nonlinear Vibrations of Suspended Cables—Part I: Modeling and Analysis. *Applied Mechanics Reviews*, **57**, 443-478. https://doi.org/10.1115/1.1777224

[15] Rega, G. (2004) Nonlinear Vibrations of Suspended Cables—Part II: Deterministic Phenomena. *Applied Mechanics Reviews*, **57**, 479-514. https://doi.org/10.1115/1.1777225

[16] Pucci, P. and Rdulescu, V.D. (2019) Progress in Nonlinear Kirchhoff Problems. *Nonlinear Analysis*, **186**, 1-5. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.02.022

[17] Wang, Y., Suo, H.M. and Lei, C.Y. (2017) Multiple Positive Solutions for a Nonlocal Problem Involving Critical Ex-

ponent. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2017**, 1-11. https://doi.org/10.1155/2017/2495686

[18] Wang, Y. and Yang, X. (2020) Infinitely Many Solutions for a New Kirchhoff Type Equation with Subcritical Exponent. *Applicable Analysis*. https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1767288

[19] Evans, L.C. (2010) Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence.

[20] Strauss, W.A. (2007) Partial Differential Equations an Introduction. 2nd Edition, John Wiley & Sons Ltd., Hoboken.