Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1949-1955
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111217

Morrey空间到Bloch空间上Vloterra型算子的有界性

白田玉

广东工业大学，应用数学学院，广东 广州

收稿日期：2021年10月20日；录用日期：2021年11月23日；发布日期：2021年11月30日

摘 要

近年来Volterra型算子的有界性吸引了很多学者的兴趣，在这篇文章中，我们主要刻画了Vloterra型算子 J_g 和积分算子 I_g 从Morrey空间 $L^{2,\lambda}(D)$ 到Bloch空间B上的有界性，其中 $0<\lambda<1$。除此之外，我们还研究了算子 J_g 和算子 I_g 从 Q_p 空间到Bloch空间B上的有界性。以上研究，进一步完善了Volterra型算子的性质。

关键词

有界性，Volterra型算子，Bloch空间

The Boundedness of Vloterra-Type Operator from Morrey Space to Bloch Space

Tianyu Bai

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Oct. 20th, 2021; accepted: Nov. 23rd, 2021; published: Nov. 30th, 2021

Abstract

In recent years, the boundedness of Volterra-type operator has attracted many scholars' interests. In this paper, we characterize the boundedness of the Volterra-type operator J_g and integral operator I_g from Morrey space $L^{2,\lambda}(D)$ to Bloch space B, where $0<\lambda<1$. In addition, we also investigate the boundedness of operator J_g and operator I_g from Q_p space to Bloch space B. The above studies have further improved the properties of Volterra-type operator.

文章引用: 白田玉. Morrey 空间到 Bloch 空间上 Vloterra 型算子的有界性[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1949-1955.
DOI: 10.12677/pm.2021.1111217

Keywords

Boundedness, Volterra-Type Operator, Bloch Space

1. 引言

Vloterra 型算子 J_g 和积分算子 I_g 很早就引起了众多学者的研究，其中，学者 Pommerenke 第一次研究了在 Hardy 空间上的算子 J_g [1]。此后，众多学者研究了在 Hardy 空间和 Bergman 空间上的算子 J_g [2] [3] [4]。

学者 Siskakis 和 Zhao 又研究了在 BMOA 上的算子 J_g [5]，其中 BMOA 空间是由有界平均振动的解析函数构成。在文献[6]中，学者 Xiao 研究了 Q_p 空间上的算子 J_g 和算子 I_g。在文献[7]中，我们可以发现此文章研究了在 Fock 空间上关于算子 J_g 的有界性和紧性。作者 Wu 研究了从 Hardy 空间到解析 Morrey 空间的算子 J_g [8]。在文献[9]中，作者详细描绘了在解析 Morrey 空间上积分算子的相关性质，此空间正是我们文章中所研究的。本文主要研究 Morrey 空间 $L^{2,\lambda}(D)$、Bloch 空间 B 和 Q_p 空间，读者可以阅读参考文献[10] [11] [12] [13]详细了解以上空间。

本文主要刻画了 Vloterra 型算子 J_g 和积分算子 I_g 从 Morrey 空间 $L^{2,\lambda}(D)$ 到 Bloch 空间 B，其中 $0<\lambda<1$，以及从 Q_p 空间到 Bloch 空间 B 上的有界性。为此，我们先给出一些相关定义以及证明中需要用到的相关引理。此外，本文在证明中的 C 和 C' 均为常数且：$0<C,C'<\infty$。

2. 定义

令 $D=\{z:|z|<1\}$ 是复平面上的单位开圆盘以及 $\partial D=\{z:|z|=1\}$。$H(D)$ 是由 D 上所有解析函数组成的一个空间，而空间 $H^\infty(D)$ 是 D 上所有有界的解析函数所组成的。此外，对于 Hardy 空间 $H^2(D)$ 的相关定义和性质，读者可以阅读参考专著[10]。

定义 1.1 [9]令 $0<\lambda\le 1$，Morrey 空间 $L^{2,\lambda}(D)$ 是由 Hardy 空间 $H^2(D)$ 上的 f 组成并满足：

$$\sup_{I\in\partial D}\left(\frac{1}{|I|^\lambda}\int_I\left|f(\varsigma)-f_I\right|^2\frac{|\mathrm{d}\varsigma|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

其中弧 $I\subset\partial D$ 并且 $|I|=\frac{1}{2\pi}\int_I|\mathrm{d}(\varsigma)|$ 是 I 的标准长度。

定义 1.2 [10] Bloch 空间 B 是由 $f\in H(D)$ 并满足：$\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|<\infty$ 组成的一个空间，范数定义如下：

$$\|f\|_B=|f(0)|+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)|<\infty。$$

定义 1.3 对于 $0<p<\infty$，Q_p 空间由 $f\in H(D)$ 并满足：

$$\|f\|_{Q_p}=|f(0)|+\sup_{a\in D}\left[\int_D|f'(z)|\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p\mathrm{d}A(z)\right]^{\frac{1}{2}}<\infty$$

所组成的，其中 $a\in D$ 以及 $\sigma_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$。

定义 1.4 令 $g\in H(D)$，对于 $f\in H(D)$，Volterra 型算子 J_g 定义如下：

$$J_g f(z)=\int_0^z f(\varsigma)g'(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma,\quad z\in D。$$

另一个内积算子 I_g 定义如下：

$$I_g f(z)=\int_0^z f'(\varsigma)g(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma,\quad z\in D。$$

3. 引理

引理 2.1 [9] 令 $0<\lambda<1$，如果 $f\in L^{2,\lambda}(D)$，则存在一个常数 $C>0$ 使得：

$$|f(z)|\le C\frac{\|f\|_{L^{2,\lambda}}}{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}}。$$

引理 2.2 令 $0<\lambda<1$，如果 $f\in L^{2,\lambda}(D)$，则存在一个常数 $C>0$ 使得：

$$|f'(z)|\le C\frac{\|f\|_{L^{2,\lambda}}}{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}}。$$

引理 2.3 [9] 假设 $s>-1$、$r>0$ 和 $t>0$。如果 $t<s+2<r$，则存在一个常数 $C>0$ 使得：

$$\int_D\frac{\left(1-|z|^2\right)^s}{|1-\bar{b}z|^r|1-\bar{a}z|^t}\mathrm{d}A(z)\le C\frac{1}{\left(1-|b|^2\right)^{r-s-2}|1-\bar{a}b|^t},$$

其中 $a\in D$，$b\in D$。

引理 2.4 [9] 假设 $0<\lambda<1$ 以及 $f\in H(D)$，则下列条件等价：

(1) $f\in L^{2,\lambda}(D)$；

(2) $\sup\limits_{a\in D}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_D|f'(z)|^2\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)\mathrm{d}A(z)<\infty$，

其中 $\sigma_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$。

引理 2.5 令 $0<p<\infty$，如果 $f\in Q_p$，则存在一个常数 $C>0$ 使得：

$$|f(z)|\le C\log\frac{2}{1-|z|^2}\|f\|_{Q_p},$$

以及

$$|f'(z)|\le C\frac{1}{1-|z|^2}\|f\|_{Q_p}。$$

4. 主要结论

定理 3.1 令 $0<\lambda<1$ 以及 $g\in H(D)$，则有 $J_g:L^{2,\lambda}(D)\to \mathrm{B}$ 有界当且仅当 $\sup\limits_{z\in D}|g'(z)|<\infty$。

证明 必要性：证明当 $\sup\limits_{z\in D}|g'(z)|<\infty$ 时，$J_g:L^{2,\lambda}(D)\to \mathrm{B}$ 是有界的。

对任意 $f\in L^{2,\lambda}(D)$，我们有：

$$\|J_g f\|_{\mathrm{B}}=|J_g f(0)|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|J_g f'(z)|=0+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f(z)||g'(z)|,$$

因此，我们只需要考虑 $\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f(z)||g'(z)|$ 这一项，在此之前，我们先考虑 $(1-|z|^2)|f(z)||g'(z)|$。根据引理 1，我们可以得到：

$$(1-|z|^2)|f(z)||g'(z)|\le C(1-|z|^2)\frac{\|f\|_{L^{2,\lambda}}}{(1-|z|^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}|g'(z)|=C(1-|z|^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}\|f\|_{L^{2,\lambda}}|g'(z)|,$$

因为 $0<\lambda<1$，所以 $(1-|z|^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}$ 有界，又有 $\sup_{z\in D}|g'(z)|<\infty$，所以我们有

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f(z)||g'(z)|\le C\|f\|_{L^{2,\lambda}},$$

即 $J_g:L^{2,\lambda}(D)\to\mathrm{B}$ 是有界的。

充分性：证明当 $J_g:L^{2,\lambda}(D)\to\mathrm{B}$ 有界时，$\sup_{z\in D}|g'(z)|<\infty$。

令 $f_b(z)=(1-|b|^2)(1-\bar{b}z)^{\frac{\lambda-2}{2}}$，其中 $b\in D$ 是固定的，则有 $f_b'(z)=\frac{\lambda-2}{2}(-\bar{b})(1-|b|^2)(1-\bar{b}z)^{\frac{\lambda-4}{2}}$，所以，根据引理 3 我们可以得到：

$$\begin{aligned}
&\sup_{a\in D}(1-|a|^2)^{1-\lambda}\int_D|f_b'(z)|^2(1-|\sigma_a(z)|^2)\mathrm{d}A(z)\\
&=\sup_{a\in D}(1-|a|^2)^{1-\lambda}\int_D\frac{(\lambda-2)^2}{4}|\bar{b}|^2(1-|b|^2)^2\frac{1}{|1-\bar{b}z|^{4-\lambda}}\frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}\mathrm{d}A(z)\\
&\le C\sup_{a\in D}(1-|a|^2)^{2-\lambda}(1-|b|^2)^2\int_D\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{b}z|^{4-\lambda}|1-\bar{a}z|^2}\mathrm{d}A(z)\\
&\le C\sup_{a\in D}\frac{(1-|a|^2)^{2-\lambda}(1-|b|^2)^2}{(1-|b|^2)^{1-\lambda}|1-\bar{a}b|^2}=C\sup_{a\in D}\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)^{1+\lambda}}{|1-\bar{a}b|^2}<\infty
\end{aligned}$$

所以，根据引理 4 可知，$f_b(z)\in L^{2,\lambda}(D)$，又因为 $J_g:L^{2,\lambda}(D)\to\mathrm{B}$ 是有界的，所以有

$$\begin{aligned}
C\|f\|_{L^{2,\lambda}}&\ge\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f(z)||g'(z)|\\
&\ge(1-|b|^2)(1-|b|^2)(1-|b|^2)^{\frac{\lambda-2}{2}}|g'(b)|\\
&=(1-|b|^2)^{\frac{\lambda+2}{2}}|g'(b)|\\
&\ge C'|g'(b)|
\end{aligned}$$

因此对任意 $b\in D$，都有

$$\sup_{z\in D}|g'(z)|\le C\|f\|_{L^{\lambda}}<\infty。$$

综上，证明完成。

定理 3.2 令 $0<\lambda<1$ 以及 $g\in H(D)$，则有 $I_g:L^{2,\lambda}(D)\to \mathrm{B}$ 有界当且仅当 $\sup\limits_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}|g(z)|<\infty$。

证明 必要性：证明当 $\sup\limits_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}|g(z)|<\infty$ 时，$I_g:L^{2,\lambda}(D)\to \mathrm{B}$ 是有界的。

对任意 $f\in L^{2,\lambda}(D)$，我们有

$$\|I_g f\|_{\mathrm{B}}=|I_g f(0)|+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|I_g f'(z)|=0+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|$$

因此，我们只需要考虑 $\sup\limits_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|$ 这一项，在此之前，我们先考虑 $\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|$。根据引理 2 我们有：

$$\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|\le C\left(1-|z|^2\right)\frac{\|f\|_{L^{2,\lambda}}}{(1-|z|^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}|g(z)|=C\left(1-|z|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}\|f\|_{L^{2,\lambda}}|g(z)|$$

因为 $\sup\limits_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}|g(z)|<\infty$，所以我们有

$$\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|\le C\|f\|_{L^{2,\lambda}},$$

即 $I_g:L^{2,\lambda}(D)\to \mathrm{B}$ 是有界的。

充分性：证明当 $I_g:L^{2,\lambda}(D)\to \mathrm{B}$ 有界时，$\sup\limits_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}|g(z)|<\infty$。

令 $f_b(z)=\left(1-|b|^2\right)\left(1-\bar{b}z\right)^{\frac{\lambda-3}{2}}$，其中 $b\in D$ 是固定的，则有 $f_b'(z)=\dfrac{\lambda-3}{2}\left(-\bar{b}\right)\left(1-|b|^2\right)\left(1-\bar{b}z\right)^{\frac{\lambda-5}{2}}$，所以根据引理 3 我们可以得到：

$$\begin{aligned}
&\sup_{a\in D}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_D|f_b'(z)|^2\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)\mathrm{d}A(z)\\
&=\sup_{a\in D}\left(1-|a|^2\right)^{1-\lambda}\int_D\frac{(\lambda-3)^2}{4}|\bar{b}|^2\left(1-|b|^2\right)^2\frac{1}{|1-\bar{b}z|^{5-\lambda}}\frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}\mathrm{d}A(z)\\
&\le C\sup_{a\in D}\left(1-|a|^2\right)^{2-\lambda}\left(1-|b|^2\right)^2\int_D\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{b}z|^{5-\lambda}|1-\bar{a}z|^2}\mathrm{d}A(z)\\
&\le C\sup_{a\in D}\frac{\left(1-|a|^2\right)^{2-\lambda}\left(1-|b|^2\right)^2}{\left(1-|b|^2\right)^{2-\lambda}|1-\bar{a}b|^2}=C\sup_{a\in D}\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)^{\lambda}}{|1-\bar{a}b|^2}<\infty
\end{aligned}$$

由此，根据引理 4 可知，$f_b(z)\in L^{2,\lambda}(D)$，又因为 $J_g:L^{2,\lambda}(D)\to \mathrm{B}$ 是有界的，所以有：

$$\begin{aligned}
C\|f\|_{L^{2,\lambda}}&\ge\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|\\
&\ge C'\left(1-|b|^2\right)\left(1-|b|^2\right)\left(1-|b|^2\right)^{\frac{\lambda-5}{2}}|g'(b)|\\
&=C'\left(1-|b|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}|g(b)|
\end{aligned}$$

所以对任意 $b\in D$，都有

$$\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}|g(z)|\le C\|f\|_{L^{2,\lambda}}<\infty\text{。}$$

综上，证明完成。

定理 3.3 令 $0<p<2$ 以及 $g\in H(D)$，则有 $I_g:Q_p\to \mathrm{B}$ 有界当且仅当 $g(z)\in H^\infty(D)$。

证明 必要性：证明当 $g(z)\in H^\infty(D)$ 时，$I_g:Q_p\to \mathrm{B}$ 是有界的。

对任意 $f\in Q_p$，我们们有：

$$\|I_g f\|_{\mathrm{B}}=|I_g f(0)|+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|I_g f'(z)|=0+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|,$$

因此，我们只需要考虑 $\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|$ 这一项，在此之前，我们先考虑 $\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|$。根据引理 5 我们可以得到：

$$\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|\le C\left(1-|z|^2\right)\frac{\|f\|_{Q_p}}{1-|z|^2}|g(z)|=C\|f\|_{Q_p}|g(z)|,$$

因为 $g(z)\in H^\infty(D)$，所以我们有：

$$\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|\le C\|f\|_{Q_p},$$

即 $I_g:Q_p\to \mathrm{B}$ 是有界的。

充分性：证明当 $I_g:Q_p\to \mathrm{B}$ 有界时，$g(z)\in H^\infty(D)$。

令 $f_b(z)=\left(1-|b|^2\right)^5\left(1-\bar{b}z\right)^{-(p+2)}$，其中 $b\in D$ 是固定的，则有 $f_b'(z)=(p+2)\bar{b}\left(1-|b|^2\right)^5\left(1-\bar{b}z\right)^{-(p+3)}$，所以根据引理 3 我们可以得到：

$$\begin{aligned}\|f_b\|_{Q_p}&=|f_b(0)|+\sup_{a\in D}\left[\int_D|f_b'(z)|^2\left(1-|\sigma_a(z)|^2\right)^p\mathrm{d}A(z)\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left(1-|b|^2\right)^5+\sup_{a\in D}\left[\int_D(p+2)^2|\bar{b}|^2\left(1-|b|^2\right)^{10}\frac{1}{|1-\bar{b}z|^{2p+6}}\frac{\left(1-|a|^2\right)^p\left(1-|z|^2\right)^p}{|1-\bar{a}z|^{2p}}\mathrm{d}A(z)\right]^{\frac{1}{2}}\\&\le 1+C\sup_{a\in D}\left[\frac{\left(1-|a|^2\right)^p\left(1-|b|^2\right)^{10}}{\left|1-|b|^2\right|^{p+4}|1-\bar{a}b|^{2p}}\right]^{\frac{1}{2}}=1+C\sup_{a\in D}\frac{\left(1-|a|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left(1-|b|^2\right)^{\frac{6-p}{2}}}{|1-\bar{a}b|^p}<\infty\end{aligned}$$

由此定义可知，$f_b(z)\in Q_P$，又因为 $I_g:Q_p\to \mathrm{B}$ 是有界的，所以有

$$\begin{aligned}C\|f\|_{Q_p}&\ge\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)||g(z)|\\&\ge\left(1-|b|^2\right)(p+2)|\bar{b}|\left(1-|b|^2\right)^5\left(1-|b|^2\right)^{-(p+3)}|g(b)|\\&\ge C'\left(1-|b|^2\right)^{3-p}|g(b)|\end{aligned}$$

因为 $0<p<2$，所以 $\left(1-|b|^2\right)^{3-p}$ 有界，显然对任意 $b\in D$，都有：

$$\sup_{z\in D}|g(z)|\le C\|f\|_{Q_p}<\infty,$$

即 $g(z)\in H^{\infty}(D)$。

综上，证明完成。

定理 3.4 令 $0<p<2$ 以及 $g\in H(D)$，则当 $\sup\limits_{z\in D}\log\dfrac{2}{1-|z|^2}|g(z)|<\infty$ 时，$J_g:Q_p\to \mathrm{B}$ 有界。

证明： 对任意 $f\in Q_p$，我们有：

$$\|J_g f\|_{\mathrm{B}}=|J_g f(0)|+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|J_g f'(z)|=0+\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f(z)||g'(z)|$$

因此，我们只需要考虑 $\sup\limits_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f(z)||g'(z)|$ 这一项，在此之前，我们先考虑 $\left(1-|z|^2\right)|f(z)||g'(z)|$。根据引理 5 可得：

$$\left(1-|z|^2\right)|f(z)||g'(z)|\le C\left(1-|z|^2\right)\log\frac{2}{1-|z|^2}\|f\|_{Q_p}|g(z)|$$

因为 $\sup\limits_{z\in D}\log\dfrac{2}{1-|z|^2}|g(z)|<\infty$，所以我们有

$$\sup_{z\in D}\left(1-|z|^2\right)|f(z)||g'(z)|\le C\|f\|_{Q_p},$$

即 $J_g:Q_p\to \mathrm{B}$ 是有界的。

参考文献

[1] Pommerenke, C. (1977) Schlichte funktionen und analytische functionen von beschrankter mittlere Oszillation. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **52**, 591-602. (In German) https://doi.org/10.1007/BF02567392

[2] Aleman, A. and Cima, J.A. (2001) An Integral Operator on H^p and Hardy's Inequality. *Journal d'Analyse Mathématique*, **85**, 157-176. https://doi.org/10.1007/BF02788078

[3] Aleman, A. and Siskakis, A.G. (1995) An Integral Operator on H^p. *Complex Variables, Theory and Application*, **28**, 149-158. https://doi.org/10.1080/17476939508814844

[4] Aleman, A. and Siskakis, A.G. (1997) Integration Operators on Bergman Space. *Indiana University Mathematics Journal*, **46**, 337-356. https://doi.org/10.1512/iumj.1997.46.1373

[5] Siskakis, A.G. and Zhao, R. (1999) A Volterra Type Operator on Space of Analytic Function. 299-311.

[6] Xiao, J. (2008) The Q_p Carleson Measure Problem. *Advances in Mathematics*, **217**, 2075-2088. https://doi.org/10.1016/j.aim.2007.08.015

[7] Constantin, O. (2012) A Volterra-Type Integration Operator on Fock Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **140**, 4247-4257. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2012-11541-2

[8] Wu, Z. (2011) A New Characterization for Carleson Measure and Some Application. *Integral Equations and Operator Theory*, **71**, 161-180. https://doi.org/10.1007/s00020-011-1892-1

[9] Li, P.T., Liu, J.M. and Lou, Z.J. (2014) Integral Operators on Analytic Morrey Spaces. *Science China Mathematics*, **57**, 1961-1974. https://doi.org/10.1007/s11425-014-4811-5

[10] Zhu, K.H. (2007) Operator Theory in Function Spaces. American Mathematical Society, New York, 101-128. https://doi.org/10.1090/surv/138/05

[11] Adams, D. and Xiao, J. (2004) Nonlinear Potential Analysis on Morrey Space and Their Capacities. *Indiana University Mathematics Journal*, **53**, 1631-1666. https://doi.org/10.1512/iumj.2004.53.2470

[12] Adams, D. and Xiao, J. (2012) Morrey Space on Harmonic Analysis. *Ark Mat*, **50**, 201-230. https://doi.org/10.1007/s11512-010-0134-0

[13] Wu, Z. and Xie, C. (2003) Q_p Space and Morrey Space. *Journal of Functional Analysis*, **201**, 282-297. https://doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00020-X