Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(11), 1888-1896
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1111211

# 分数次极大算子在广义加权变指标Morrey空间上的有界性

徐　博

西北师范大学数学与统计学院，甘肃　兰州

收稿日期：2021年10月16日；录用日期：2021年11月17日；发布日期：2021年11月24日

## 摘　要

利用 $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ 权函数的性质以及调和分析的实方法，得到了分数次极大算子在广义加权变指标Morrey空间上的有界性，同时也给出了交换子的相应结果。

## 关键词

分数次极大算子，交换子，广义加权变指标Morrey空间，BMO空间

# Boundedness of Fractional Maximal Operator on Generalized Weighted Morrey Spaces with Variable Exponents

**Bo Xu**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Oct. 16th, 2021; accepted: Nov. 17th, 2021; published: Nov. 24th, 2021

## Abstract

**By applying the properties of $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ weighted functions and real-variable methods of harmonic analysis, the boundedness of the fractional maximal operator is obtained on generalized weighted Morrey spaces with variable exponent. Meanwhile, the corresponding result of its commutator is**

文章引用: 徐博. 分数次极大算子在广义加权变指标 Morrey 空间上的有界性[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1888-1896.
DOI: 10.12677/pm.2021.1111211

also given.


## Keywords

**Fractional Maximal Operator, Commutator, Generalized Weighted Morrey Space with Variable Exponent, BMO Space**




## 1. 引言及主要结果

设$0<\alpha<n$，分数次极大算子和分数次积分算子分别定义为：

$$M_\alpha f(x)=\sup_{t>0}\frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B(x,t)}|f(y)|\mathrm{d}y,\quad I_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y .$$

给定可测函数$b$，相应的交换子可定义如下：

$$[b,M_\alpha]f=M_\alpha(bf)-bM_\alpha(f),\quad [b,I_\alpha]f=I_\alpha(bf)-bI_\alpha(f),$$

同时给出定义：

$$M_{b,\alpha}f(x)=\sup_{t>0}\frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B(x,t)}|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

$$[b,I_\alpha]f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}[b(x)-b(y)]f(y)|x-y|^{\alpha-n}\mathrm{d}y .$$

当$b(x)\geq 0$时，对于任意的局部可积函数$f$，有$|[b,M_\alpha]f(x)|\leq M_{b,\alpha}f(x)$。

设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为无界开集，$\chi_E(x)$表示$E\subset\mathbb{R}^n$上的特征函数，$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|x-y|<r\}$，$\tilde{B}(x,r)=B(x,r)\cap\Omega$，本文中$\varphi(x,r),\varphi_1(x,r),\varphi_2(x,r)$均为$\Omega\times(0,\infty)$上的非负可测函数。

给定可测函数$p(\cdot):\Omega\to(1,\infty)$，变指标 Lebesgue 空间$L^{p(\cdot)}$定义为：

$$L^{p(\cdot)}(\Omega)=\left\{f:\exists\lambda>0,\ \text{st.}\int_\Omega|f(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

其上的 Luxemburg-Nakano 范数为：

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Omega\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\leq 1\right\}.$$

**定义 1.1** [1]设$\omega>0$为$\Omega$上的一个局部可积函数，它表示权函数。加权变指标 Lebesgue 空间$L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)$定义为：

$$L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)=\left\{f:\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)}\equiv\|f\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}<\infty\right\}.$$

**定义 1.2** [2]设$1\leq p(x)<\infty$，$x\in\Omega$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，变指标$A_{p(\cdot)}(\Omega)$权和变指标$A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$权可

分别定义为：

$$A_{p(\cdot)}(\Omega)=\left\{\omega:[\omega]_{A_{p(\cdot)}}\equiv\sup_{B(x,r)}|B(x,r)|^{-1}\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}<\infty\right\}$$

$$A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)=\left\{\omega:[\omega]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}\equiv\sup_{B(x,r)}|B(x,r)|^{\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{q(x)}-1}\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}<\infty\right\}.$$

**定义 1.3** [3]设$1\le p(x)<\infty$，$x\in\Omega$，则广义加权变指标 Morrey 空间$\mathcal{M}_{\omega}^{p(\cdot),\varphi}(\Omega)$定义为：

$$\mathcal{M}_{\omega}^{p(\cdot),\varphi}(\Omega)=\left\{f:\sup_{x\in\Omega,r>0}\frac{1}{\varphi(x,r)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}<\infty\right\}.$$

当$\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{q(x)}=\frac{\alpha}{n}$时，C. Capone 在文献[4]中证明了分数次极大算子从$L^{p(\cdot)}$到$L^{q(\cdot)}$是有界的，文献[5]中证明了带粗糙核的 Marcinkiewicz 积分在变指标 Morrey 空间上的有界性，文献[6]给出了局部互补广义变指标 Morrey 空间上几类奇异积分算子的有界性估计，分数次极大算子在广义加权 Morrey 空间上的有界性估计可参见文献[7]。最近作者在文献[8]中得到了 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在中心 Morrey-Orlicz 空间上的有界性。受上面研究的启发，本文将研究分数次极大算子及其交换子在广义加权变指标 Morrey 空间上的有界性。

**定义 1.4** [9]给定有界可测函数$p(x):\Omega\to[1,\infty)$，假设$1\le p_-\le p(\cdot)\le p_+<\infty$满足局部 log-Hölder 连续条件：

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{-\log|x-y|},x,y\in\Omega,|x-y|\le\frac{1}{2},\tag{1}$$

且满足 log-Hölder 在无穷远处的连续条件：存在$p_\infty$，使得

$$|p(x)-p_\infty|\le\frac{C}{\log(e+|x|)},x\in\Omega,\tag{2}$$

将满足上述条件的所有$p(x)$构成的集合记为$\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，其中$p_+=\operatorname{esssup}_{x\in\Omega}p(x)$，$p_-=\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega}p(x)$，$p_\infty=\lim_{x\to\infty}p(x)>1$。

**定义 1.5** [10]设$b\in L_{loc}^1(\Omega)$，且

$$\|b\|_{BMO}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|b(y)-b_{B(x,r)}|\mathrm{d}y<\infty,\tag{3}$$

其中

$$b_{B(x,r)}=\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}b(y)\mathrm{d}y.$$

则$BMO(\Omega)$空间可定义为：

$$BMO(\Omega)=\left\{b\in L_{loc}^1(\Omega):\|b\|_{BMO}<\infty\right\}.$$

**本文的主要结果如下：**

**定理 1** 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为无界开集，$0<\alpha<n$，$p\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，$p_+<\frac{n}{\alpha}$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，$\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，则对任意$f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$，有

$$\|M_\alpha f\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))} \le C\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))} \sup_{r>t} \|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))} \|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}, \tag{4}$$

其中 $C$ 与 $f, x\in\Omega$ 和 $r$ 均无关。

**定理 2** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为无界开集，$0<\alpha<n$，$p\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，$p_+<\frac{n}{\alpha}$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，$\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，且函数 $\varphi_1(x,r)$ 和 $\varphi_2(x,r)$ 满足条件

$$\sup_{r>t} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{r<s<\infty} \varphi_1(x,s)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,s))}}{\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}} \le C\varphi_2(x,t), \tag{5}$$

其中 $C$ 与 $x\in\Omega$ 和 $r$ 均无关，则 $M_\alpha$ 从 $\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)$ 到 $\mathcal{M}_\omega^{q(\cdot),\varphi_2}(\Omega)$ 上有界。

**定理 3** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为无界开集，$0<\alpha<n$，$p\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，$p_+<\frac{n}{\alpha}$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，$\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，$b\in BMO(\Omega)$，则对任意的 $f\in L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)$ 有

$$\|M_{b,\alpha} f\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))} \le C\|b\|_{BMO}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))} \sup_{r>t}\left(1+\ln\frac{r}{t}\right)\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}, \tag{6}$$

其中 $C$ 与 $f, x\in\Omega$ 和 $r$ 均无关。

**定理 4** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为无界开集，$0<\alpha<n$，$p\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，$p_+<\frac{n}{\alpha}$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，$\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，$b\in BMO(\Omega)$，且函数 $\varphi_1(x,r)$ 和 $\varphi_2(x,r)$ 满足条件

$$\sup_{r>t}\left(1+\ln\frac{r}{t}\right)\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{r<s<\infty}\varphi_1(x,s)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,s))}}{\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}} \le C\varphi_2(x,t) \tag{7}$$

其中 $C$ 与 $x\in\Omega$ 和 $r$ 均无关，则 $M_{b,\alpha}$ 从 $\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)$ 到 $\mathcal{M}_\omega^{q(\cdot),\varphi_2}(\Omega)$ 上有界。

## 2. 预备知识

**引理 2.1** [11]设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为无界开集，$0<\alpha<n$，$p\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，$p_+<\frac{n}{\alpha}$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，$\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，则 $M_\alpha$ 从 $L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)$ 到 $L_\omega^{q(\cdot)}(\Omega)$ 上有界。

**引理 2.2** [12]设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为无界开集，$0<\alpha<n$，$p\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，$p_+<\frac{n}{\alpha}$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，$\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，$b\in BMO(\Omega)$，则 $[b,I_\alpha]$ 从 $L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)$ 到 $L_\omega^{q(\cdot)}(\Omega)$ 上有界。

**引理 2.3** [12]设 $1<p(x)<\infty$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，且 $\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，则 $\omega^{-1}\in A_{q'(\cdot),p'(\cdot)}(\Omega)$。

**引理 2.4** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为无界开集，$0<\alpha<n$，$p\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\Omega)$，$p_+<\frac{n}{\alpha}$，$\frac{1}{q(x)}=\frac{1}{p(x)}-\frac{\alpha}{n}$，$\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，则下列条件等价：

(i) $b\in BMO(\Omega)$；

(ii) $M_{b,\alpha}$ 从 $L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)$ 到 $L_\omega^{q(\cdot)}(\Omega)$ 上有界。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 $f\in L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)$ 且 $b\in BMO(\Omega)$，则由引理 2.2 可知

$$\|M_{b,\alpha} f\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\Omega)} \le C\|[b,I_\alpha]f\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\Omega)} \le C\|b\|_{BMO}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\Omega)}。$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) 设 $M_{b,\alpha}$ 从 $L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$ 到 $L_{\omega}^{q(\cdot)}(\Omega)$ 上有界，则由广义 Hölder 不等式和变指标 $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ 权的性质可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{\tilde{B}(x,t)}\left|b(z)-b_{B(x,t)}\right|\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{\tilde{B}(x,t)}\left|b(z)-\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}b(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{\tilde{B}(x,t)}\frac{1}{|B(x,t)|}\left|\int_{B(x,t)}b(z)-b(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}z\\&\le\frac{1}{|B(x,t)|^{1+\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,t)}\frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B(x,t)}|b(z)-b(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{\tilde{B}(x,t)}\left|b(z)-b_{B(x,t)}\right|\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{\tilde{B}(x,t)}\left|b(z)-\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)}b(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{\tilde{B}(x,t)}\frac{1}{|B(x,t)|}\left|\int_{B(x,t)}b(z)-b(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}z\\&\le\frac{1}{|B(x,t)|^{1+\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,t)}\frac{1}{|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B(x,t)}|b(z)-b(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

**引理 2.5** **[12]**设 $b\in BMO(\Omega)$， $p\in\mathcal{P}_{\infty}^{\log}(\Omega)$，且 $\omega\in A_{p(\cdot)}(\Omega)$，则 $M_b$ 在 $L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$ 上有界。

**引理 2.6** **[13]**设 $b\in BMO(\Omega)$，则存在常数 $C>0$，使得

$$\left|b_{\tilde{B}(x,r)}-b_{\tilde{B}(x,t)}\right|\le C\|b\|_{BMO}\ln\frac{t}{r},0<2r<t, \tag{8}$$

其中 $C$ 与 $b,x,r$ 和 $t$ 均无关。

**引理 2.7** **[14]**设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为无界开集， $p\in\mathcal{P}_{\infty}^{\log}(\Omega)$，且 $\omega$ 为 Lebesgue 可测函数。若 $\omega\in A_{p(\cdot)}(\Omega)$，则范数 $\|\cdot\|_{BMO}$ 与范数 $\|\cdot\|_{BMO_{p(\cdot),\omega}}$ 等价，其中对于任意的局部可积函数 $f$，有

$$\|f\|_{BMO_{p(\cdot),\omega}}=\sup_{x\in\Omega,r>0}\frac{\left\|\left(f(\cdot)-f_{\tilde{B}(x,r)}\right)\chi_{\tilde{B}(x,r)}\right\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}{\left\|\chi_{\tilde{B}(x,r)}\right\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}.$$

**引理 2.8** **[15]**设 $p\in\mathcal{P}_{\infty}^{\log}(\Omega)$，若 $\omega\in A_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$，则 $\omega(\cdot)^{q(\cdot)}\in A_{\infty}$。

## 3. 主要结果的证明

**定理 1 的证明** 设 $f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)$，分解 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1(y)=f(y)\chi_{\tilde{B}(x,2t)}(y)$，$f_2(y)=f(y)\chi_{\Omega\setminus\tilde{B}(x,2t)}(y)$， $t>0$，则有

$$\|M_\alpha f\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\le\|M_\alpha f_1\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}+\|M_\alpha f_2\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}。\tag{9}$$

由引理 2.1，有

$$\|M_\alpha f_1\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\le\|M_\alpha f_1\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\Omega)}\le C\|f_1\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)}=C\|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,2t))}。$$

另一方面，

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,2t))} &\le C|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,2t))}\sup_{r>2t}|B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1}\\
&\le C|B(x,t)|^{1-\frac{\alpha}{n}}\sup_{r>2t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}|B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1}\\
&\le C\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>2t}|B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\
&\le C\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>2t}|B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\
&\le C\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}|B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega^{-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\
&\le C[\omega]_{A_{p(\cdot),q(\cdot)}}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|^{-1}_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,2t))} \le C\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|^{-1}_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}, \tag{10}
$$

则有

$$
\|M_\alpha f_1\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))} \le C\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|^{-1}_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}。 \tag{11}
$$

设对于任意 $z\in B(x,r)$，若 $B(z,r)\cap(B(x,2t))^c\ne\varnothing$，则 $r>t$。事实上，若 $y\in B(z,r)\cap(B(x,2t))^c$，则 $r>|y-z|\ge|x-y|-|x-z|\ge 2t-r>t$。另一方面，当 $y\in B(z,r)\cap(B(x,2t))^c$，有 $|x-y|\le|y-z|+|x-z|<t+r<2r$。因此，$B(z,r)\cap(B(x,2t))^c\subset B(x,2r)$。则由广义 Hölder 不等式和变指数 $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ 权的定义可得，

$$
\begin{aligned}
M_\alpha f_2(z) &= \sup_{r>0}\frac{1}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(z,r)}|f_2(y)|\mathrm{d}y\\
&= \sup_{r>0}\frac{1}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(z,r)\cap(\tilde{B}(x,2t))^c}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \sup_{r>t}\frac{1}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,2r)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&= \sup_{r>t}\frac{|B(x,2r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\frac{1}{|B(x,2r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,2r)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C\sup_{r>t}\frac{1}{|B(x,2r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,2r)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C\sup_{r>2t}\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{B(x,2r)}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\le C\sup_{r>t}\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|^{-1}_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\|M_\alpha f_2\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))} \le C\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|^{-1}_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}。 \tag{12}
$$

由式(9)，(11)和(12)即可得到定理 1。

**定理 2 的证明** 设 $f\in\mathcal{M}_{\omega}^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)$，则由定理 1 和式(5)可得

$$\begin{aligned}\|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{q(\cdot),\varphi_2}(\Omega)}&=\sup_{x\in\Omega,t>0}\frac{1}{\varphi_2(x,t)\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}\|M_\alpha f\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\\&\le C\sup_{x\in\Omega,t>0}\frac{1}{\varphi_2(x,t)}\sup_{r>t}\|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\\&\le C\|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)}\sup_{x\in\Omega,t>0}\frac{1}{\varphi_2(x,t)}\sup_{r>t}\frac{\varphi_1(x,r)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}{\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}\\&\le C\|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)}\end{aligned}$$

**定理 3 的证明** 设 $b\in BMO(\Omega)$， $f\in L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))$，由定理 1 的证明，记 $f=f_1+f_2$，则有

$$\|M_{b,\alpha}f\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\le\|M_{b,\alpha}f_1\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}+\|M_{b,\alpha}f_2\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}。\tag{13}$$

由引理 2.4，有

$$\|M_{b,\alpha}f_1\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\le\|M_{b,\alpha}f_1\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\Omega)}\le C\|b\|_{BMO}\|f_1\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\Omega)}=C\|b\|_{BMO}\|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,2t))},$$

则由式(10)有

$$\|M_{b,\alpha}f_1\|_{L_{\omega}^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\le C\|b\|_{BMO}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\|f\|_{L_{\omega}^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}。\tag{14}$$

设对任意 $z\in B(x,r)$，若 $B(z,r)\cap(B(x,2t))^c\ne\varnothing$，则 $r>t$。事实上，若 $y\in B(z,r)\cap(B(x,2t))^c$，则 $r>|y-z|\ge|x-y|-|x-z|\ge 2t-r>t$。另一方面，当 $y\in B(z,r)\cap(B(x,2t))^c$，有 $|x-y|\le|y-z|+|x-z|<t+r<2r$。因此，$B(z,r)\cap(B(x,2t))^c\subset B(x,2r)$。

$$\begin{aligned}M_{b,\alpha}f_2(z)&=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(z,r)}|b(y)-b(z)||f_2(y)|\mathrm{d}y\\&=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(z,r)\cap(\tilde{B}(x,2t))^c\ne\varnothing}|b(y)-b(z)||f(y)|\mathrm{d}y\\&\le\sup_{r>t}\frac{1}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,2r)}|b(y)-b(z)||f(y)|\mathrm{d}y\\&=\sup_{r>t}\frac{|B(x,2r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}{|B(z,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\frac{1}{|B(x,2r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,2r)}|b(y)-b(z)||f(y)|\mathrm{d}y\\&\le C\sup_{r>t}\frac{1}{|B(x,2r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,2r)}|b(y)-b(z)||f(y)|\mathrm{d}y\\&\le C\sup_{r>2t}\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,r)}|b(y)-b(z)||f(y)|\mathrm{d}y\\&\le C\sup_{r>t}\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,r)}|b(y)-b_{\tilde{B}(x,r)}||f(y)|\mathrm{d}y\\&\quad+C\sup_{r>t}\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_{\tilde{B}(x,r)}|b(z)-b_{\tilde{B}(x,r)}||f(y)|\mathrm{d}y\\&=:I_1+I_2,\end{aligned}$$

对于 $I_1$，由广义 Hölder 不等式，定义 1.2，引理 2.7 和变指数 $A_{p(\cdot),q(\cdot)}$ 权的定义可知，

$$\begin{aligned}I_1&\le C\sup_{r>t}\left|B(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\left\|b(\cdot)-b_{\tilde{B}(x,r)}\right\|_{L_{\omega^{-1}}^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\&\le C\|b\|_{BMO}\sup_{r>t}\left|B(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\left\|\chi_{\tilde{B}(x,r)}\right\|_{L_{\omega^{-1}}^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\&=C\|b\|_{BMO}\sup_{r>t}\left|B(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\&\le C\|b\|_{BMO}\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\end{aligned}$$

另一方面，对于 $I_2$，由引理 2.6 和广义 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}I_2&\le C\sup_{r>t}\left|B(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left|b(z)-b_{\tilde{B}(x,t)}\right|\left|\int_{\tilde{B}(x,r)}\left|f(y)\right|\mathrm{d}y\right.\\&\quad+C\sup_{r>t}\left|B(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left|b_{\tilde{B}(x,t)}-b_{\tilde{B}(x,r)}\right|\int_{\tilde{B}(x,r)}\left|f(y)\right|\mathrm{d}y\\&\le C\sup_{r>t}\left|B(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\left|b(z)-b_{\tilde{B}(x,t)}\right|\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\&\quad+C\|b\|_{BMO}\sup_{r>t}\left|B(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\ln\frac{r}{t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\left\|\omega^{-1}\right\|_{L^{p'(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\\&\le CM_b\chi_{B(x,t)}(z)\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\\&\quad+C\|b\|_{BMO}\sup_{r>t}\ln\frac{r}{t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\end{aligned}$$

则由引理 2.5，有

$$\begin{aligned}\left\|M_{b,\alpha}f_2\right\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}&\le\|I_1\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}+\|I_2\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\\&\le C\|b\|_{BMO}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\\&\quad+C\left\|M_b\chi_{B(x,t)}\right\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\\&\quad+C\|b\|_{BMO}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\ln\frac{r}{t}\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\\&\le C\|b\|_{BMO}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\sup_{r>t}\left(1+\ln\frac{r}{t}\right)\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\end{aligned}$$

由式(13)和式(14)即可得到定理 3。

**定理 4 的证明** 设 $f\in\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)$，则由定理 3 和式(7)可得

$$\begin{aligned}\left\|M_{b,\alpha}f\right\|_{\mathcal{M}_\omega^{q(\cdot),\varphi_2}(\Omega)}&=\sup_{x\in\Omega,t>0}\frac{1}{\varphi_2(x,t)\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}}\left\|M_{b,\alpha}f\right\|_{L_\omega^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,t))}\\&\le C\|b\|_{BMO}\sup_{x\in\Omega,t>0}\frac{1}{\varphi_2(x,t)}\sup_{r>t}\left(1+\ln\frac{r}{t}\right)\|f\|_{L_\omega^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}^{-1}\\&\le C\|b\|_{BMO}\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)}\sup_{x\in\Omega,t>0}\frac{1}{\varphi_2(x,t)}\sup_{r>t}\left(1+\ln\frac{r}{t}\right)\frac{\varphi_1(x,r)\|\omega\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}{\|\omega\|_{L^{q(\cdot)}(\tilde{B}(x,r))}}\\&\le C\|b\|_{BMO}\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)}\\&\le C\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p(\cdot),\varphi_1}(\Omega)}\end{aligned}$$

## 参考文献


[1] Cruz-Uribe, D., Diening, L. and Hst, P. (2011) The Maximal Operator on Weighted Variable Lebesgue Spaces. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **14**, 361-374. https://doi.org/10.2478/s13540-011-0023-7

[2] Hasanov, J.J. and Musayev, A.M. (2019) Oscillatory Integral Operators and Their Commutators in Modified Weighted Morrey Spaces with Variable Exponent. *International Journal of Applied Mathematics*, **32**, 521-535. https://doi.org/10.12732/ijam.v32i3.12

[3] Guliyev, V.S., Hasanov, J.J. and Badalov, X.A. (2018) Maximal and Singular Integral Operators and Their Commutators on Generalized Weighted Morrey Spaces with Variable Exponent. *Mathematical Inequalities and Applications*, **21**, 41-61. https://doi.org/10.7153/mia-2018-21-04

[4] Capone, C., Cruz-Uribe, D. and Fiorenza, A. (2007) The Fractional Maximal Operator and Fractional Interals on Variable $L^{p(\cdot)}$ Spaces. *Revista Matemática Iberoamericana*, **23**, 743-770. https://doi.org/10.4171/RMI/511

[5] Qu M. and Wang, L. (2020) On the Commutator of Marcinkiewicz Integrals with Rough Kernels in Variable Morrey-Type Spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, **72**, 1080-1099. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01843-5

[6] Guliyev, V.S., Hasanov, J.J. and Samko, S.G. (2013) Maximal, Potential and Singular Operators in the Local Complementary Variable Exponent Morrey Type Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **401**, 72-84. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.03.041

[7] Ismayilova, A.F. (2019) Fractional Maximal Operator and Its Higher Order Commutators on Generalized Weighted Morrey Spaces. *Transactions Issue Mathematics*, *Azerbaijan National Academy of Sciences*, **39**, 84-95.

[8] Maligranda, L. and Matsuoka, K. (2020) Calderon-Zygmund Singular Integrals in Central Morrey-Orlicz Spaces. *Tohoku Mathematical Journal*, **72**, 235-259. https://doi.org/10.2748/tmj/1593136820

[9] Diening, L., Harjulehto, P., Hasto, P. and Ruzicka, M. (2011) Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponent. Vol. 2017. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8

[10] John, F. and Nirenberg, L. (1961) On Functions of Bounded Mean Oscillation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **14**, 415-426. https://doi.org/10.1002/cpa.3160140317

[11] Cruz-Uribe, D. and Wang, L. (2017) Extrapolation and Weighted Norm Inequalities in the Variable Lebesgue Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **369**, 1205-1235. https://doi.org/10.1090/tran/6730

[12] Guliyev, V.S., Hasanov, J.J., Badalov, X.A. (2019) Commutators of Riesz Potential in the Vanishing Generalized Weighted Morrey Spaces with Variable Exponent. *Mathematical Inequalities & Applications*, **22**, 331-351. https://doi.org/10.7153/mia-2019-22-25

[13] Janson, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[14] Ho, K.P. (2016) Singular Integral Operators, John-Nirenberg Inequalities and Triebel-Lizorkin Type Spaces on Weighted Lebesgue Spaces with Variable Exponents. *Revista De La Union Matematica Argentina*, **57**, 85-101.

[15] 王子剑, 朱月萍. 分数次极大算子在加权变指数 Lebesgue 空间上的有界性[J]. 南京大学学报: 数学半年刊, 2016, 33(1): 57-81.