

几类特殊图的完美匹配的计数

杨思齐^{1*}, 边红^{1#}, 于海征², 魏丽娜¹

¹新疆师范大学, 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学, 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2021年12月1日; 录用日期: 2022年1月4日; 发布日期: 2022年1月11日

摘要

图的完美匹配的计数问题已经被证实是NP-困难问题, 因此想要得到一般图的完美匹配数是非常困难的。根据图中饱和某个顶点的完美匹配进行分类讨论, 得到图的相应完美匹配数的递推关系式, 通过求出递推关系式的通解, 从而求出图的完美匹配数, 是一种有效计算图的完美匹配数的方法。而对于一些直接利用饱和某个顶点进行分类讨论求解不出来的图类, 则可以通过对图进行合适的变换得到相应的变换图, 再利用饱和某个顶点, 对两个图的完美匹配进行分类讨论, 从而得到两组有关联的完美匹配数的递推关系式, 间接求出图的完美匹配数。本文利用上述方法给出了几类特殊图中完美匹配数的递推公式。

关键词

完美匹配, 分类, 递推关系式, 通解

The Counting of Perfect Matchings on Some Special Graphs

Siqi Yang^{1*}, Hong Bian^{2#}, Haizheng Yu², Lina Wei¹

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Dec. 1st, 2021; accepted: Jan. 4th, 2022; published: Jan. 11th, 2022

Abstract

The counting problem of perfect matchings of graphs has been confirmed to be NP-hard and therefore obtaining the number of perfect matchings of general graph is very difficult. According to the perfect matching that saturates a certain vertex in graph, we can give the classification of

*第一作者。

#通讯作者。

perfect matchings of graphs, and obtain the recursive relation for the corresponding number of perfect matchings of the graph. It is an effectively method to calculate the number of perfect matchings of graph by presenting the general solution of the recursive relation. And for some graphs that cannot be solved by using above method, by constructing transformation graph, we can give the recursive relations of the number of perfect matchings of original graph and corresponding transformation graph. In this paper, we give the recursive formulae for the number of perfect matchings in some special classes of graphs, and present the exact number of perfect matchings of these special graphs.

Keywords

Perfect Matching, Classification, Recursive Relation, General Solution

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图的完美匹配计数理论具有较强的物理、化学背景，其研究结果在多个领域都有广泛应用[1] [2] [3] [4]。Valiant 在 1979 年证明了图的完美匹配的计数问题是 NP-困难问题，因此想要得到一般图的完美匹配的计数公式是非常困难的[5]。目前，已有一些文献对特殊图类的完美匹配数作了相关的研究[6]-[11]。本文利用分类、递推、消元的方法给出了四类特殊图的完美匹配的计数公式。

定义 1 [1] 若图 G 有一个 1-正则生成子图，则称该生成子图称为图 G 的完美匹配。

定义 2 [1] 设图 G 是一个有完美匹配的图，若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同，则称 M_1 和 M_2 是 G 两个不同的完美匹配。

定义 3 设四个点的三角格子图 T_r^i 的顶点集合为 $V(T_r^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}\} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ，分别连接 T_r^i 和 T_r^{i+1} 的顶点 u_{i2} 和 $u_{i+1,1}$ 及 u_{i3} 和 $u_{i+1,4}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$) 所得的图记为 $2-nT_r$ ，如图 1 所示。

定义 4 图 G 中的每一条边用 P_3 替换得到的变换图称为图 G 的剖分图，记为 $S(G)$ 。 K_3 为三个点的完全图。设 K_3 剖分图的顶点集合为 $V(S(K_3)^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}\} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ，分别连接 $S(K_3)^i$ 和 $S(K_3)^{i+1}$ 的顶点 u_{i1} 和 $u_{i+1,1}$ 及 u_{i3} 和 $u_{i+1,5}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$) 所得的图记为 $2-nS(K_3)$ ，如图 2 所示。

定义 5 设 F_6 为在六个点 $\{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}\} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 的圈中，连接 u_{i1} 和 u_{i4} ， u_{i2} 和 u_{i5} ， u_{i3} 和 u_{i6} 得到的图。将 F_6^i 中的两个顶点 u_{i2} 和 u_{i3} 分别连接 F_6^{i+1} 中 $u_{i+1,6}$ 和 $u_{i+1,5}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n-1$)，得到的分图记为 $4-nF_6$ ，如图 3 所示。

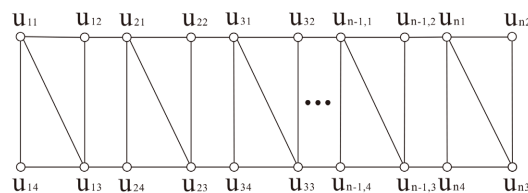


Figure 1. $2-nT_r$

图 1. $2-nT_r$

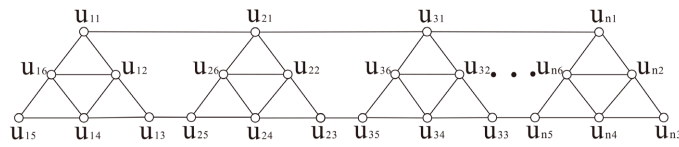


Figure 2. $2-nS(K_3)$

图 2. $2-nS(K_3)$

定义 6 K_4 为四个点的完全图。设 K_4 的顶点集合为 $V(K_4)^i = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}\} (i=1, 2, 3, \dots, n)$ ，分别连接 K_4^i 和 K_4^{i+1} 的顶点 u_{i1} 和 $u_{i+1,1}$ ， u_{i4} 和 $u_{i+1,2}$ 及 u_{i3} 和 $u_{i+1,3}$ ($i=1, 2, 3, \dots, n-1$) 所得的图记为 $3-nK_4$ ，如图 4 所示。

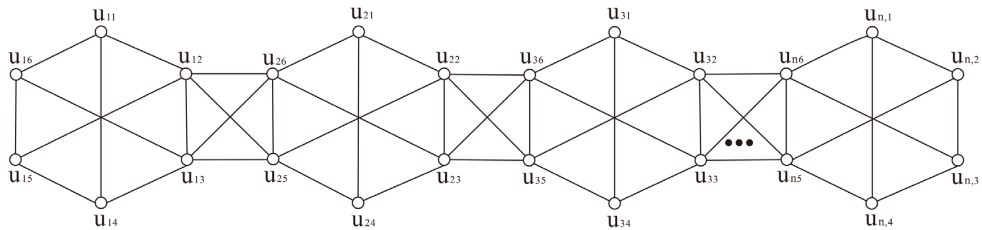


Figure 3. $4-nF_6$

图 3. $4-nF_6$

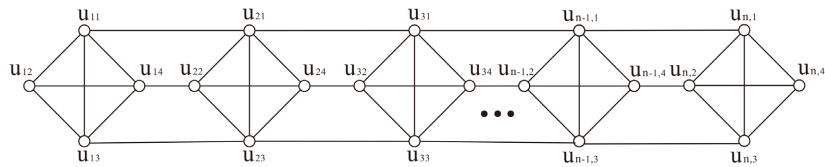


Figure 4. $3-nK_4$

图 4. $3-nK_4$

2. 引理及主要结论

定理 1 设图 $2-nT_r$ 的完美匹配数为 $\alpha(n)$ ，则 $\alpha(n) = 2^n$ 。

证明 图 $2-nT_r$ 显然存在完美匹配。设图 $2-nT_r$ 完美匹配的集合为 P ，图 $2-nT_r$ 含 $u_{11}u_{12}$ 、 $u_{11}u_{13}$ 、 $u_{11}u_{14}$ 的完美匹配集合分别为 P_1 、 P_2 、 P_3 ，则 $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$ ， $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ ，故 $\alpha(n) = |P| = |P_1| + |P_2| + |P_3|$ 。

P_1 中含边 $u_{11}u_{12}$ 和 $u_{13}u_{14}$ 。观察图 $2-nT_r$ 可知没有包含边 $u_{11}u_{13}$ 的完美匹配。 P_3 中含边 $u_{11}u_{14}$ 和 $u_{12}u_{13}$ 。由 $\alpha(n)$ 的定义， $|P_1| = |P_3| = \alpha(n-1)$ ， $|P_2| = 0$ 。

所以 $\alpha(n) = 2\alpha(n-1) = 2^{n-1}\alpha(1)$ 。

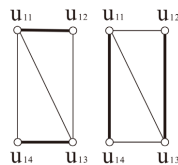


Figure 5. Two perfect matchings of $\alpha(1)$ (bold edges represent the matching edges)

图 5. $\alpha(1)$ 中的两个完美匹配(粗边代表匹配边)

由图 5 知, $\alpha(1)=2$, 故 $\alpha(n)=2^n$ 。

定理证毕。

定理 2 设图 $2-nS(K_3)$ 的完美匹配数为 $\eta(n)$, 则

$$\eta(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot (1+\sqrt{5})^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot (1-\sqrt{5})^n.$$

证明 图 $2-nS(K_3)$ 显然存在完美匹配。设图 $2-nS(K_3)$ 完美匹配的集合为 P , 图 $2-nS(K_3)$ 含 $u_{15}u_{14}$ 、 $u_{15}u_{16}$ 的完美匹配集合分别为 P_1 、 P_2 , 则 $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $P = P_1 \cup P_2$, 故 $\eta(n) = |P| = |P_1| + |P_2|$ 。

P_1 划分为三类。 P_1 中含 $u_{15}u_{14}$ 、 $u_{12}u_{13}$ 、 $u_{11}u_{16}$ 的完美匹配的集合记为 P_1^1 ; P_1 中含 $u_{15}u_{14}$ 、 $u_{16}u_{12}$ 、 $u_{13}u_{25}$ 、 $u_{11}u_{21}$ 、 $u_{22}u_{26}$ 、 $u_{23}u_{24}$ 的完美匹配的集合记为 P_1^2 ; P_1 中含 $u_{15}u_{16}$ 、 $u_{16}u_{12}$ 、 $u_{13}u_{25}$ 、 $u_{11}u_{21}$ 、 $u_{22}u_{23}$ 、 $u_{24}u_{26}$ 的完美匹配的集合记为 P_1^3 。则 $P_1^1 \cap P_1^2 \cap P_1^3 = \emptyset$, $P_1 = P_1^1 \cup P_1^2 \cup P_1^3$, 由 $\eta(n)$ 的定义知, $|P_1^1| = \eta(n-1)$, $|P_1^2| = |P_1^3| = \eta(n-2)$ 。 $|P_1| = \eta(n-1) + 2\eta(n-2)$ 。

P_2 划分为三类。 P_2 中含 $u_{15}u_{16}$ 、 $u_{13}u_{14}$ 、 $u_{11}u_{12}$ 的完美匹配的集合记为 P_2^1 ; P_2 中含 $u_{15}u_{16}$ 、 $u_{12}u_{14}$ 、 $u_{13}u_{25}$ 、 $u_{11}u_{21}$ 、 $u_{22}u_{26}$ 、 $u_{23}u_{24}$ 的完美匹配的集合记为 P_2^2 ; P_2 中含 $u_{15}u_{16}$ 、 $u_{12}u_{14}$ 、 $u_{13}u_{25}$ 、 $u_{11}u_{21}$ 、 $u_{22}u_{23}$ 、 $u_{24}u_{26}$ 的完美匹配的集合记为 P_2^3 。则 $P_2^1 \cap P_2^2 \cap P_2^3 = \emptyset$, $P_2 = P_2^1 \cup P_2^2 \cup P_2^3$, 由 $\eta(n)$ 的定义知, $|P_2^1| = \eta(n-1)$, $|P_2^2| = |P_2^3| = \eta(n-2)$ 。 $|P_2| = \eta(n-1) + 2\eta(n-2)$ 。

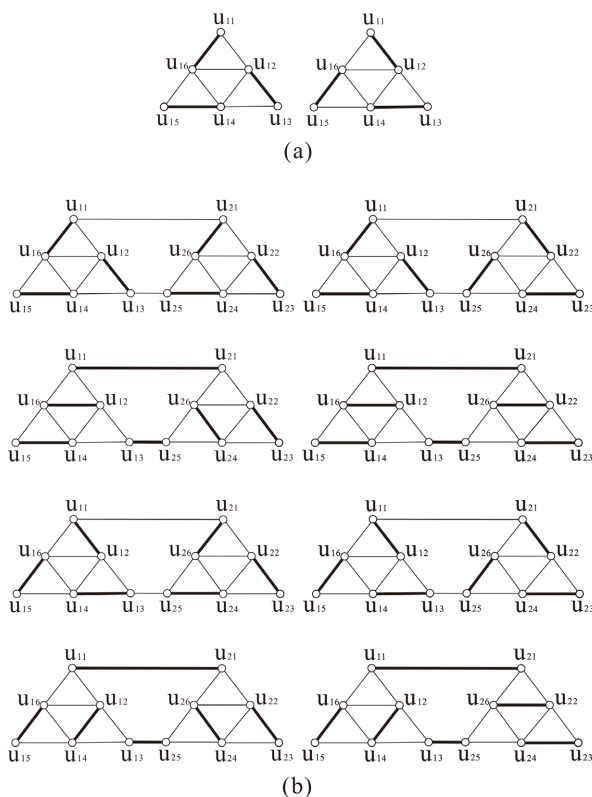


Figure 6. (a) Two perfect matchings of $\eta(1)$ (bold edges represent the matching edges); (b) Eight perfect matchings of $\eta(2)$ (bold edges represent the matching edges)

图 6. (a) $\eta(1)$ 中的两个完美匹配(粗边代表匹配边); (b) $\eta(2)$ 中的八个完美匹配(粗边代表匹配边)

综上所述

$$\eta(n) = 2\eta(n-1) + 4\eta(n-2). \tag{1}$$

递推式(1)的递推方程为 $x^2 - 2x - 4 = 0$ ，特征根为 $1 \pm \sqrt{5}$ 。

递推式(1)的通解为 $\eta(n) = c_1(1 + \sqrt{5})^n + c_2(1 - \sqrt{5})^n$ ， c_1 、 c_2 为待定常数。

由图 6 知， $\eta(1) = 2$ ， $\eta(2) = 8$ 。

故

$$\eta(n) = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot (1 + \sqrt{5})^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot (1 - \sqrt{5})^n.$$

定理证毕。

定理 3 设图 $4-nF_6$ 的完美匹配数为 $\beta(n)$ ，则

$$\beta(n) = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot (4 + 2\sqrt{3})^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot (4 - 2\sqrt{3})^n.$$

证明 图 $4-nF_6$ 显然存在完美匹配。欲求 $\beta(n)$ 的解析式，先定义图 G_1 ，并求出它的完美匹配数的递推式。把路 ab 的端点 a 、 b 分别与图 $4-nF_6$ 的顶点 u_{15} 、 u_{16} 连两条边，得到的图记为 G_1 ，如图 7 所示。

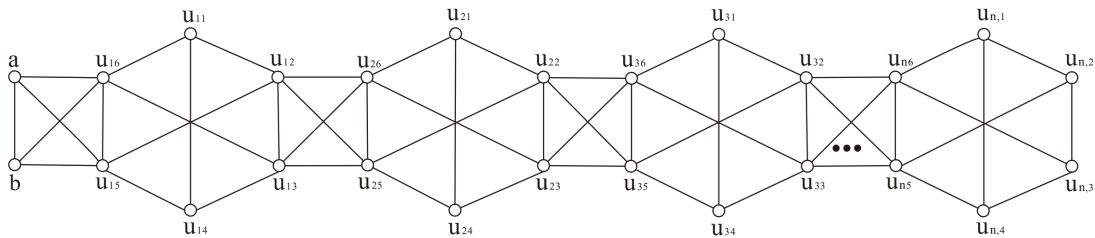


Figure 7. G_1

图 7. G_1

图 G_1 显然存在完美匹配。 $\gamma(n)$ 表示图 G_1 的完美匹配数，设图 G_1 完美匹配的集合为 P ，图 G_1 含 ab 、 au_{16} 、 bu_{15} 的完美匹配集合分别为 P_1 、 P_2 、 P_3 ，则 $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$ ， $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ ，故 $\eta(n) = |P| = |P_1| + |P_2| + |P_3|$ 。

P_1 中含 ab ，由 $\beta(n)$ 的定义知， $|P_1| = \beta(n)$ 。

P_2 划分为两类。 P_2 中含 au_{16} 、 bu_{15} 、 $u_{11}u_{14}$ 的完美匹配的集合记为 P_2^1 ； P_2 中含 au_{16} 、 bu_{15} 、 $u_{11}u_{12}$ 、 $u_{13}u_{14}$ 的完美匹配的集合记为 P_2^2 。则 $P_2^1 \cap P_2^2 = \emptyset$ ， $P_2 = P_2^1 \cup P_2^2$ ，由 $\gamma(n)$ 和 $\beta(n)$ 的定义知， $|P_2^1| = \gamma(n-1)$ ， $|P_2^2| = \beta(n-1)$ 。 $|P_2| = \gamma(n-1) + \beta(n-1)$ 。

P_3 划分为两类。 P_3 中含 au_{15} 、 bu_{16} 、 $u_{11}u_{14}$ 的完美匹配的集合记为 P_3^1 ； P_3 中含 au_{15} 、 bu_{16} 、 $u_{11}u_{12}$ 、 $u_{13}u_{14}$ 的完美匹配的集合记为 P_3^2 。则 $P_3^1 \cap P_3^2 = \emptyset$ ， $P_3 = P_3^1 \cup P_3^2$ ，由 $\gamma(n)$ 和 $\beta(n)$ 的定义知， $|P_3^1| = \gamma(n-1)$ ， $|P_3^2| = \beta(n-1)$ 。 $|P_3| = \gamma(n-1) + \beta(n-1)$ 。

故

$$\gamma(n) = \beta(n) + 2\gamma(n-1) + 2\beta(n-1). \tag{2}$$

再求 $\beta(n)$ 的递推式。设图 $4-nF_6$ 完美匹配的集合为 W ，图 $4-nF_6$ 含 $u_{16}u_{11}$ 、 $u_{16}u_{13}$ 、 $u_{16}u_{15}$ 的完美匹

配集合分别为 W_1 、 W_2 、 W_3 ，则 $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$ ， $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ ，故 $\beta(n) = |W| = |W_1| + |W_2| + |W_3|$ 。

W_1 划分为两类。 W_1 中含 $u_{16}u_{11}$ 、 $u_{14}u_{15}$ 的完美匹配的集合记为 W_1^1 ； W_1 中含 $u_{16}u_{11}$ 、 $u_{12}u_{15}$ 、 $u_{13}u_{14}$ 的完美匹配的集合记为 W_1^2 。则 $W_1^1 \cap W_1^2 = \emptyset$ ， $W_1 = W_1^1 \cup W_1^2$ ，由 $\gamma(n)$ 和 $\beta(n)$ 的定义知， $|W_1^1| = \gamma(n-1)$ ， $|W_1^2| = \beta(n-1)$ 。 $|W_1| = \gamma(n-1) + \beta(n-1)$ 。

W_2 划分为两类。 W_2 中含 $u_{16}u_{13}$ 、 $u_{11}u_{12}$ 、 $u_{14}u_{15}$ 的完美匹配的集合记为 W_2^1 ； W_2 中含 $u_{16}u_{13}$ 、 $u_{11}u_{14}$ 、 $u_{12}u_{15}$ 的完美匹配的集合记为 W_2^2 。则 $W_2^1 \cap W_2^2 = \emptyset$ ， $W_2 = W_2^1 \cup W_2^2$ ，由 $\beta(n)$ 的定义知， $|W_2^1| = |W_2^2| = \beta(n-1)$ ， $|W_2| = 2\beta(n-1)$ 。

W_3 划分为两类。 W_3 中含 $u_{16}u_{15}$ 、 $u_{11}u_{14}$ 的完美匹配的集合记为 W_3^1 ； W_3 中含 $u_{16}u_{15}$ 、 $u_{11}u_{12}$ 、 $u_{13}u_{14}$ 的完美匹配的集合记为 W_3^2 。则 $W_3^1 \cap W_3^2 = \emptyset$ ， $W_3 = W_3^1 \cup W_3^2$ ，由 $\gamma(n)$ 和 $\beta(n)$ 的定义知， $|W_3^1| = \gamma(n-1)$ ， $|W_3^2| = \beta(n-1)$ ， $|W_3| = \gamma(n-1) + \beta(n-1)$ 。

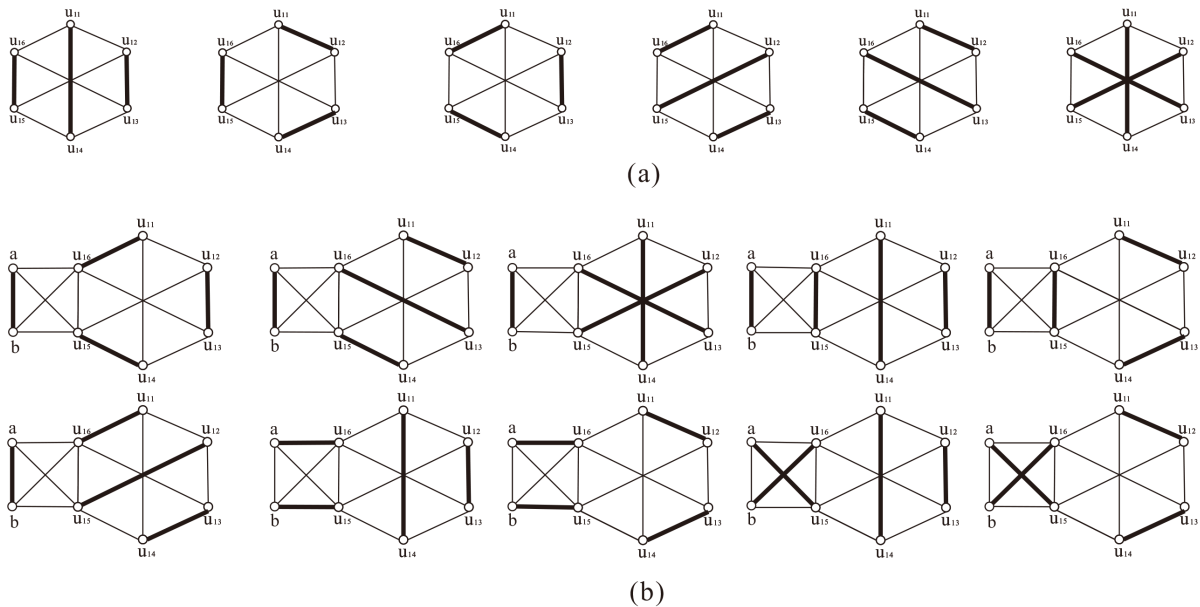


Figure 8. (a) Six perfect matchings of $\beta(1)$ (bold edges represent the matching edges); (b) Ten perfect matchings of $\gamma(1)$ (bold edges represent the matching edges)

图 8. (a) $\beta(1)$ 中的六个完美匹配(粗边代表匹配边); (b) $\gamma(1)$ 中的十个完美匹配(粗边代表匹配边)

综上所述

$$\beta(n) = 4\beta(n-1) + 2\gamma(n-1). \tag{3}$$

由(2)得

$$\gamma(n-1) = \beta(n-1) + 2\gamma(n-2) + 2\beta(n-2). \tag{4}$$

将(4)代入(3)得

$$\beta(n) = 6\beta(n-1) + 4\beta(n-2) + 4\gamma(n-2). \tag{5}$$

由(3)得

$$\beta(n-1) = 4\beta(n-2) + 2\gamma(n-2). \tag{6}$$

将(6)代入(5)得

$$\beta(n) = 8\beta(n-1) - 4\beta(n-2). \tag{7}$$

递推式(7)的递推方程为 $x^2 - 8x + 4 = 0$ ，特征根为 $4 \pm 2\sqrt{5}$ 。

递推式(7)的通解为 $\beta(n) = c_1(4 + 2\sqrt{5})^n + c_2(4 - 2\sqrt{5})^n$ ， c_1 、 c_2 为待定常数。

由图 8 知， $\beta(1) = 6, \gamma(1) = 10$ 。

所以由(3)得， $\beta(2) = 44$ 。

故

$$\beta(n) = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot (4 + 2\sqrt{3})^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot (4 - 2\sqrt{3})^n.$$

定理证毕。

定理 4 设图 $3-nK_4$ 的完美匹配数为 $\omega(n)$ ，则

$$\omega(n) = 4\omega(n-1) - \omega(n-3).$$

其中： $\omega(1) = 3, \omega(2) = 12, \omega(3) = 47$ 。

证明 图 $3-nK_4$ 显然存在完美匹配。欲求 $\omega(n)$ 的解析式，先定义图 G_2 ，并求出它的完美匹配数的递推式。把路 ab 的端点 a 、 b 分别与图 $3-nK_4$ 的顶点 u_{11} 、 u_{12} 连一条边，得到的图记为 G_2 ，如图 9 所示。再定义图 G_3 。把路 ab 的端点 a 、 b 分别与图 $3-nK_4$ 的顶点 u_{13} 、 u_{12} 连一条边，得到的图记为 G_3 ，如图 10 所示。

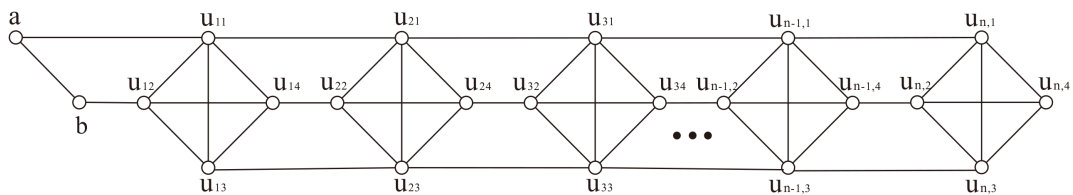


Figure 9. G_2

图 9. G_2

图 G_2 存在完美匹配， $\psi(n)$ 表示图 G_2 的完美匹配数。图 G_3 也存在完美匹配， $\pi(n)$ 表示图 G_3 的完美匹配数。显然， $\psi(n) = \pi(n)$ 。设图 G_2 完美匹配的集合为 P ，图 G_2 含 ab 、 au_{11} 的完美匹配集合分别为 P_1 、 P_2 ，则 $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ ， $P = P_1 \cup P_2$ ，故 $\psi(n) = |P| = |P_1| + |P_2|$ 。

P_1 中含 ab ，由 $\omega(n)$ 的定义知， $|P_1| = \omega(n)$ 。

P_2 中含 au_{11} 、 bu_{12} ，由 $\pi(n)$ 和 $\psi(n)$ 的定义知， $|P_2| = \pi(n-1) = \psi(n-1)$ 。

故

$$\psi(n) = \omega(n) + \psi(n-1). \tag{8}$$

再求 $\omega(n)$ 的递推式。设图 $3-nK_4$ 完美匹配的集合为 W ，图 $3-nK_4$ 含 $u_{12}u_{11}$ 、 $u_{12}u_{13}$ 、 $u_{12}u_{14}$ 的完美匹配集合分别为 W_1 、 W_2 、 W_3 ，则 $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$ ， $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ ，故 $\omega(n) = |W| = |W_1| + |W_2| + |W_3|$ 。

W_1 中含 $u_{12}u_{11}$ 的完美匹配的集合记为 W_1 。 $|W_1| = \pi(n-1) = \psi(n-1)$ 。

W_2 中含 $u_{12}u_{13}$ 的完美匹配的集合记为 W_2 。 $|W_2| = \psi(n-1)$ 。

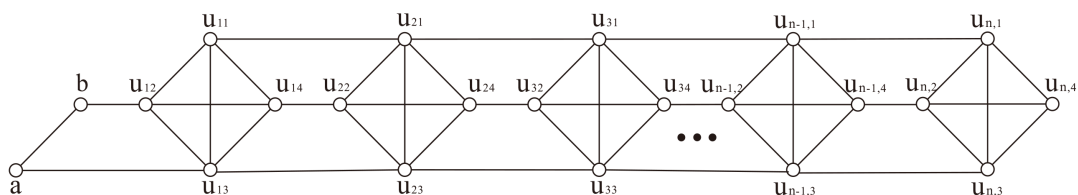


Figure 10. G_3
图 10. G_3

W_3 划分为两类。 W_3 中含 $u_{12}u_{14}$ 、 $u_{11}u_{13}$ 的完美匹配的集合记为 W_3^1 ； W_1 中含 $u_{12}u_{14}$ 、 $u_{11}u_{21}$ 、 $u_{13}u_{23}$ 、 $u_{22}u_{24}$ 的完美匹配的集合记为 W_3^2 。则 $W_3^1 \cap W_3^2 = \emptyset$ ， $W_3 = W_3^1 \cup W_3^2$ ，由 $\omega(n)$ 的定义知， $|W_3^1| = \omega(n-1)$ ， $|W_3^2| = \omega(n-2)$ 。 $|W_3| = \omega(n-1) + \omega(n-2)$ 。

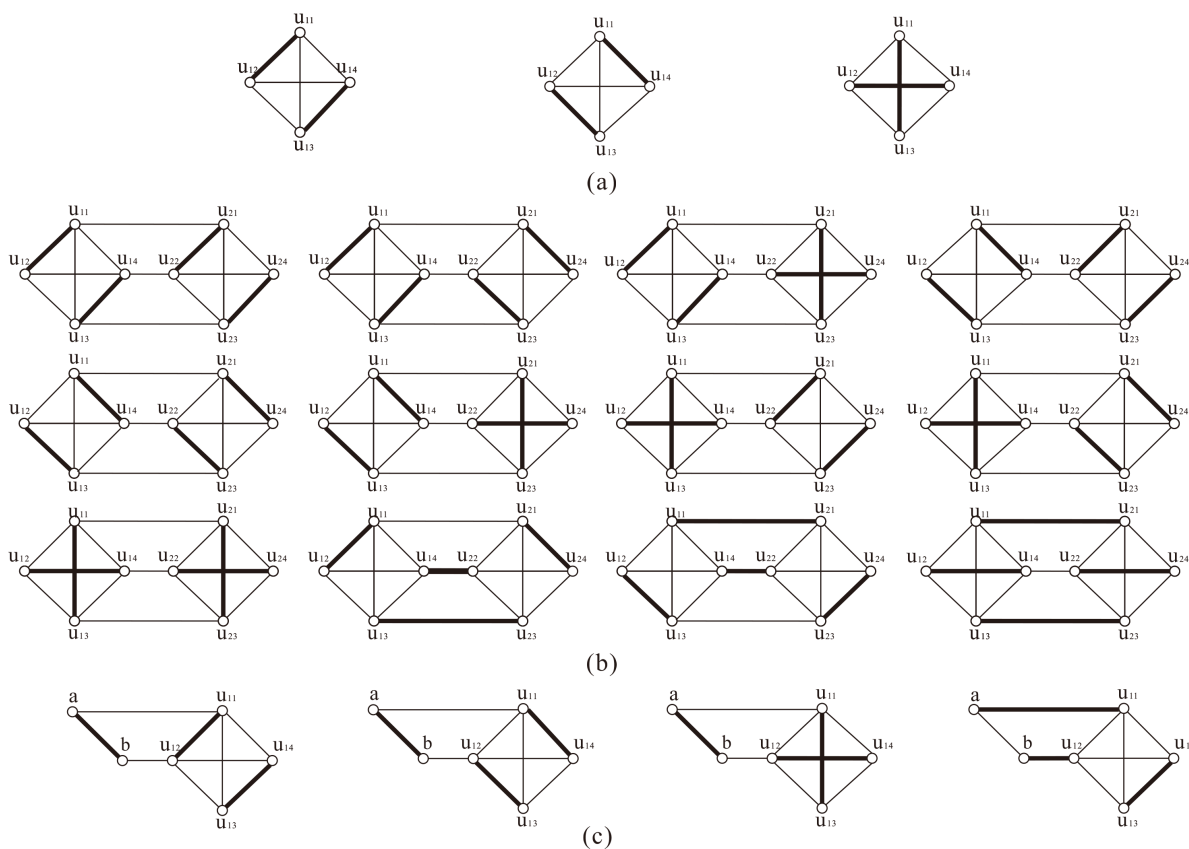


Figure 11. (a) Three perfect matchings of $\omega(1)$ (bold edges represent the matching edges); (b) Twelve perfect matchings of $\omega(2)$ (bold edges represent the matching edges); (c) Four perfect matchings of $\psi(1)$ (bold edges represent the matching edges)

图 11. (a) $\omega(1)$ 的三个完美匹配(粗边代表匹配边); (b) $\omega(2)$ 的十二个完美匹配(粗边代表匹配边); (c) $\psi(1)$ 的四个完美匹配(粗边代表匹配边)

综上所述

$$\omega(n) = 2\psi(n-1) + \omega(n-1) + \omega(n-2). \tag{9}$$

由(8)得

$$\psi(n-1) = \omega(n-1) + \psi(n-2). \quad (10)$$

将(10)代入(9)得

$$\omega(n) = 3\omega(n-1) + 2\psi(n-2) + \omega(n-2). \quad (11)$$

由(9)得

$$\omega(n-1) = 2\psi(n-2) + \omega(n-2) + \omega(n-3). \quad (12)$$

将(12)代入(11)得

$$\omega(n) = 4\omega(n-1) - \omega(n-3). \quad (13)$$

由图 11 知, $\omega(1) = 3$, $\omega(2) = 12$, $\psi(1) = 4$ 。

所以由(11)得, $\omega(3) = 47$ 。

故

$$\omega(n) = 4\omega(n-1) - \omega(n-3).$$

其中: $\omega(1) = 3$, $\omega(2) = 12$, $\omega(3) = 47$ 。

定理证毕。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2021 年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020 年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助。

参考文献

- [1] Cyvin, S.J. and Gutman, I. (1988) Kekulé Structures in Benzenoid Hydrocarbons. Springer Pres, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00892-8>
- [2] Ciucu, M. (1997) Enumeration of Perfect Matchings in Graphs with Reflective Symmetry. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **77**, 87-97. <https://doi.org/10.1006/jcta.1996.2725>
- [3] Jockusch, W. (1994) Perfect Matchings and Perfect Squares. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **67**, 100-115. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(94\)90006-X](https://doi.org/10.1016/0097-3165(94)90006-X)
- [4] Lovász, L. and Plummer, M. (1986) Matching Theory. North-Holland Press, New York.
- [5] Valiant, L.G. (1979) The Complexity of Computing the Permanent. *Theoretical Computer Science*, **8**, 189-201. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(79\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(79)90044-6)
- [6] 唐保祥, 任韩. 2 类图完美匹配数按匹配顶点分类的递推求法[J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(2): 309-313.
- [7] 唐保祥, 任韩. 图 $2-2nP_5$ 和 $2-nK(1,1,1,3)$ 完美匹配的计数[J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(4): 859-863.
- [8] 唐保祥, 任韩. 2 类图完美对集数的计算公式[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(10): 13-15.
- [9] 唐保祥, 任韩. 2 类特殊图的完美对集数的分类递推求法[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2021, 44(1): 1-5.
- [10] 唐保祥, 任韩. 两类图完美对集数的分类递推计算[J]. 昆明理工大学学报(自然科学版), 2021, 46(2): 135-139.
- [11] Wei, S.L., Chen, N.D., Ke, X.L., Hao, G.L., Huang, J.W., Tang, N.S. (2021) Perfect Matchings in Random Octagonal Chain Graphs. *Journal of Mathematics*, **2021**, Article ID 2324632. <https://doi.org/10.1155/2021/2324632>