Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 653-664
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124075

扇形算子情形下时滞发展方程周期解的存在性

韦启林

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年3月16日；录用日期：2022年4月18日；发布日期：2022年4月25日

摘 要

本文讨论了Banach 空间X中时滞发展方程

$$u'(t) + Au(t) = f(t, u(t), u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)), \quad t \in \mathbb{R},$$

周期解的存在性，其中$A : D(A) \subset X \to X$ 为扇形算子，$-A$ 生成X中指数稳定的解析半群$T(t)(t \geq 0)$，$f : \mathbb{R} \times X^{n+1} \to X$ 连续，关于t以ω为周期，$\tau_1, \cdots, \tau_n > 0$。我们应用不动点定理，获得了方程$\omega$-周期mild 解的存在性结果。

关键词

时滞发展方程，不动点定理，ω-周期mild 解，存在性

Existence of Periodic Solutions for Delayed Evolution Equation with Sector Operator

Qilin Wei

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 16^{th}, 2022; accepted: Apr. 18^{th}, 2022; published: Apr. 25^{th}, 2022

文章引用: 韦启林. 扇形算子情形下时滞发展方程周期解的存在性[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 653-664.
DOI: 10.12677/pm.2022.124075

Abstract

This paper deals with the existence of periodic solutions for delayed evolution equation in a Banach space X,

$$u'(t) + Au(t) = f(t, u(t), u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)), \quad t \in \mathbb{R},$$

where $A : D(A) \subset X \to X$ is a sector operator and $-A$ generates a exponential stability analytic semigroup $T(t)(t \geq 0)$ on X, $f : \mathbb{R} \times X^{n+1} \to X$ is a continuous function mapping and it is ω-periodic in t, $\tau_1, \cdots, \tau_n > 0$. Existence results of ω-periodic mild solutions are obtained by using the fixed point theorem.

Keywords

Delayed Evolution Equation, Fixed Point Theorem, ω-Periodic Mild Solutions, Existence

1. 引言

时滞发展方程, 又称时滞演化方程或时滞进化方程, 是指未知函数含有关于时间变量t的导数(偏导数)的微分方程, 如时滞热方程、时滞波方程、时滞电报方程、时滞Schrödinger方程、时滞抛物型方程、时滞反应扩散方程等, 以及由这类方程通过适当方式耦合起来的方程组, 都属于时滞发展方程的范畴. 因此, 时滞发展方程具有十分丰富的研究内容及广泛的应用价值, 见文献 [1,2]. 而对于部分时滞偏微分方程, 我们常借助于算子半群方法将某个Banach 空间X 中的扇形算子下抽象时滞发展方程来处理, 进而讨论其解的存在性、唯一性. 改写后的扇形算子下抽象时滞发展方程一般形如

$$u'(t) + Au(t) = f(t, u(t), u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

其中 $A : D(A) \subset X \to X$ 为 X 中的扇形算子, $-A$ 生成 X 中指数稳定的解析半群 $T(t)(t \geq 0)$, $f : \mathbb{R} \times X^{n+1} \to X$ 为非线性映射, $\tau_i > 0(i = 1, \cdots, n)$ 为常数. 在这些偏微分方程中, 时间周期解的存在性引起了人们的关注, 已被许多学者研究, 见文献 [3]. 本文假设$f(t, x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 关于t 以ω 为周期, 在一般Banach 空间X 中研究抽象发展方程(1) ω-周期mild 解的存在性.

对不含时滞的抽象发展方程周期问题, 其解的存在性已有较深入的研究. 对一般 Banach 空间 X 中的半线性发展方程

$$u'(t) + Au(t) = f(t,\ u(t)), \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

文献 [4]中, 杨和在A为扇形算子的情形下, 建立了方程(2)ω-周期古典解存在的上下解定理. 作者利用正算子半群的特征和单调迭代方法, 获得了ω-周期古典解的存在性和唯一性定理, 并在不假定上下解存在的条件下, 得到了方程(2)ω-周期古典解的存在唯一性和渐近性态.

而含时滞的抽象发展发展方程

$$u'(t) + Au(t) = f(t,\ u(t),\ u(t-\tau)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

其周期解的存在性也被一些作者研究, 见文献 [5–9]. 在文献 [5]中, J. Liu 在一般Banach 空间X 中由初值问题mild 解的有界性和最终有界性获得了方程(3)的ω-周期mild 解的存在性. 文献 [6]研究了A 为Hilbert 空间正定算子情形多时滞发展方程(1)的周期问题, 其应用解析半群理论与一个含时滞的积分不等式获得到了周期解的存在性与渐进稳定性. 文献 [7, 8]讨论了X 为有序Banach 空间, $T(t)(t \geq 0)$ 为正C_0-半群的情形, 时滞发展方程(3) ω-周期mild 解的存在性. 文献 [7]的作者应用单调迭代方法获得了最小与最大周期mild 解的存在性. 文献 [8]运用正算子半群理论及Leray-Schauder 不动点定理得到了方程(3) 正周期mild 解的存在唯一性与渐近稳定性. 文献 [9]通过对解算子的周期延拓, 利用相关的不动点定理, 获得了时滞发展方程(3)ω-周期mild解的存在性结果.

不同于上述文献讨论的特殊情况, 本文在一般Banach空间X上研究扇形算子情形下多时滞发展方程周期问题(1). 运用Schauder 不动点定理, 获得了当非线性项f满足一次增长条件时多时滞发展方程(1)的存在性结果. 运用Banach压缩映射原理得到了扇形算子情形下多时滞发展方程(1)周期解的唯一性, 取消了以往在有序Banach 空间上的限制, 使其应用更加广泛.

本文第二节给出了论文所需符号及引理, 第三节给出了存在唯一性定理及其证明, 第四节给出了应用的例子, 第五节总结全文及展望.

2. 预备知识

设X 为Banach 空间, $A : D(A) \subset X \to X$ 为扇形算子, $-A$ 生成X 中指数稳定的解析半

群$T(t)(t \geq 0)$. 设$A^\alpha(\alpha \geq 0)$为算子A的分数幂, $X_\alpha = (D(A^\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$, 即$X_\alpha$为$A^\alpha$的定义域$D(A^\alpha)$按图像范数$\|\cdot\|_\alpha = \|A^\alpha\|$构成的Banach空间. 存在常数$M \geq 1$, $M_\alpha \geq 1$, $\delta > 0$使得

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad t > 0.$$

设E为另一个Banach空间, 其范数定义为$\|\cdot\|_E$, 且存在$0 < \alpha < 1$使得

$$X_\alpha \hookrightarrow E \hookrightarrow X,$$

故存在常数$C > 0$, 有

$$\|x\|_E \leq C\|x\|_\alpha, \quad x \in X_\alpha.$$

记$C_\omega(\mathbb{R}, X)$, $C_\omega(\mathbb{R}, E)$, $C_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha)$分别是全体以$\omega$为周期的$X$, E, X_α值的连续函数按范数$\|u\|_C = \max\limits_{t\in[0,\,\omega]} \|u(t)\|$, $\|u\|_{C_E} = \max\limits_{t\in[0,\,\omega]} \|u(t)\|_E$, $\|u\|_{C_\alpha} = \max\limits_{t\in[0,\,\omega]} \|u(t)\|_\alpha$构成的Banach空间, 易见$C_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha) \hookrightarrow C_\omega(\mathbb{R}, E)$.

设$h \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, 考虑$X$ 中的线性发展方程

$$u'(t) + A\,u(t) = h(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

ω-周期解的存在性. 假设半群$T(t)(t \geq 0)$ 指数稳定, 即满足式(4), 由Gelfand 谱半径公式及(4)式

$$r(T(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n(\omega)\|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M}\, e^{-\delta} = e^{-\delta} < 1.$$

因此, 1为算子 $T(\omega)$ 的正则值, 从而 $\mathrm{I} - T(\omega)$ 有有界逆算子 $(\mathrm{I} - T(\omega))^{-1}$, 且

$$(\mathrm{I} - T(\omega))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n\omega), \tag{6}$$

为了方便, 以下记

$$\rho = \|\mathrm{I} - T(\omega))^{-1}\|.$$

当 $h \in C^1_\omega(\mathbb{R}, X)$ 时, 由熟知的结果 [10], 易验证方程(5)存在唯一的 ω- 周期解

$$u(t) = (\mathrm{I} - T(\omega))^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\, h(s)\, ds := (Ph)(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

且该解$u \in C^1_\omega(\mathbb{R}, X) \cap C_\omega(\mathbb{R}, X_1)$. 对一般的$h \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, 由(7)式确定的$u = Ph \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, u 不一定可微, 是方程(5)的一种ω-周期的广义解, 称为ω- 周期mild 解 [11]. 按(7)式, 线性方程(5)的ω-周期解算子$P : C_\omega(\mathbb{R}, X) \to C_\omega(\mathbb{R}, X)$ 为线性有界算子.

同样地, 对扇形算子发展方程(1), 类似于线性方程(5), 若 $u \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ 满足积分方程

$$u(t) = (\mathrm{I} - T(\omega))^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\, f(s,\, u(s),\, u(s-\tau_1), \cdots, u(s-\tau_n))\, ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

则称u 为方程(1)的ω-周期mild 解. 当$f : \mathbb{R} \times X^{n+1} \to X$为$C^1$-映射时, 按mild 解的正则性[[10], Chapter3, Theorem 1.5], 方程(1)的ω-周期mild 解$u \in C^1_\omega(\mathbb{R}, X) \cap C_\omega(\mathbb{R}, X_1)$ 是古典解.

引理1 ([12]Arzela-Ascoli)集合$D \subset C(J, X)$相对紧的充分必要条件是:D是等度连续的, 并且对$\forall t \in J$, 集合$D(t)$是X中的相对紧集.

引理2 ([13]Banach压缩映射原理)设X为完备的度量空间, Q为X上的压缩映射. 则Q在X中有且只有一个不动点.

引理3 ([14]Schauder不动点定理)设X为Banach空间, D为X中的有界凸闭集. 若$Q : D \to D$全连续, 则Q在D 中至少存在一个不动点.

3. 主要结果

定理1 设 $A : D(A) \subset X \to X$ 为X 中的扇形算子, $-A$生成X 中指数稳定的解析半群$T(t)(t \geq 0)$. $f : \mathbb{R} \times X^{n+1} \to X$ 关于t 以ω 为周期, 满足Lipschitz 条件. 且满足下列条件

(A1) 存在常数 $C_i > 0\ (i = 0, 1, \cdots, n)$, 使得对任意的$x_i,\, y_i \in E\ (i = 1, \cdots, n)$, 有

$$\|f(t, x_0, \cdots, x_n) - f(t, y_0, \cdots, y_n)\|_\alpha \leq \sum_{i=0}^{n} C_i \|x_i - y_i\|_E, \quad t \in \mathbb{R},$$

(A2) $CM_\alpha \rho \cdot \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} < 1$,

则扇形算子下时滞发展方程(1)存在唯一 ω-周期 mild 解.

定理1的证明 我们在$C_\omega(\mathbb{R}, X)$中定义算子Q

$$Qu = (P \circ F)u,$$

其中P为(7)式所定义线性发展方程周期问题的解算子, $F : C_\omega(\mathbb{R}, E) \to C_\omega(\mathbb{R}, X)$ 为如下定义的算子

$$F(u)(t) = f(t,\, u(t),\, u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)), \qquad t \in \mathbb{R},\, u \in C_\omega(\mathbb{R}, E).$$

从而

$$Qu(t) = (I - T(\omega))^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s) f(t,\, u(t),\, u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)) ds, \qquad t \in \mathbb{R},\, u \in C_\omega(\mathbb{R}, E). \tag{9}$$

易证$Q: C_\omega(\mathbb{R}, E) \to C_\omega(\mathbb{R}, X_\alpha) \hookrightarrow C_\omega(\mathbb{R}, E)$. 按(7)式, 可知扇形算子下时滞发展方程(1)的ω周期mild解等价于算子Q的不动点.

由假设(A1)及(9)式知, 对$\forall u, v \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$及$t \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
\|Qu(t) - Qv(t)\|_E &\le C\|Qu(t) - Qv(t)\|_\alpha \\
&= C\|(\mathrm{I} - T(\omega))^{-1} \int_{t-\omega}^{t} T(t-s)\,(f(t, u(t), u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)) \\
&\quad -f(t, u(t), u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)))ds\|_\alpha \\
&\le C\rho \int_{t-\omega}^{t} \|A^\alpha T(t-s)\| \cdot \|(f(t, u(t), u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)) \\
&\quad -f(t, u(t), u(t-\tau_1), \cdots, u(t-\tau_n)))ds\| \\
&\le CM_\alpha\rho \int_{t-\omega}^{t} (t-s)^{-\alpha}(C_0\|u(s) - v(s)\|_E \\
&\quad +C_1\|u(s-\tau_1) - v(s-\tau_1)\|_E + \cdots + C_1\|u(s-\tau_n) - v(s-\tau_n)\|_E)ds \\
&\le CM_\alpha\rho \cdot \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \int_{t-\omega}^{t} (t-s)^{-\alpha} ds \cdot \|u - v\|_{C_E} \\
&= CM_\alpha\rho \cdot \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \|u - v\|_{C_E},
\end{aligned}$$

由条件(A2)可得

$$\|Qu - Qv\|_{C_E} \le CM_\alpha\rho \cdot \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \|u - v\|_{C_E} < \|u - v\|_{C_E}.$$

这说明$Q: C_\omega(\mathbb{R}, E) \to C_\omega(\mathbb{R}, E)$为压缩映射. 由Banach压缩映射原理知, 算子Q在$C_\omega(\mathbb{R}, E)$中存在唯一不动点u, 该不动点为时滞发展方程(1)的ω-周期mild解. □

定理2 设 $A: D(A) \subset X \to X$ 为X中的扇形算子, $-A$生成X中的指数稳定的解析半群$T(t)(t \ge 0)$ 是紧半群. 若条件(A2)及

(A3) $f: \mathbb{R} \times E^{n+1} \to X$, 对$\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t, \cdot, \cdot, \cdots, \cdot, \cdot): E^{n+1} \to X$连续; 对$\forall x_i \in E$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$, $f(\cdot, x_0, x_1, \cdots, x_n): \mathbb{R} \to X$强可测,

(A4) 存在常数 $C_i \ge 0\,(i = 0, 1, \cdots, n)$及$M \ge 0$, 使得对$\forall t \in \mathbb{R}$及$x_i \in E(i = 0, 1, \cdots, n)$, 有

$$\|f(t, x_0, x_1, \cdots, x_n)\| \le \sum_{i=0}^{n} C_i\|x_i\|_E + M,$$

对$\forall R > 0$及$x_i \in E(i = 0, 1, \cdots, n)$, 如果$\|x_i\|_E \le R$, 有

$$\|f(t, x_0, x_1, \cdots, x_n)\| \le R\sum_{i=0}^{n} C_i + M := h_R(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

且

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{R}\int_{t-\omega}^{t}\frac{h_R(s)}{(t-s)^\alpha}ds=\sum_{i=0}^{n}C_i\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha}>0$$

成立, 则扇形算子下时滞发展方程(1)至少存在一个 ω-周期 mild 解.

定理2的证明 设算子Q是定理1的证明中所定义的算子, 下面分四步证明.

第一步, $QD_R\subset D_R$.

对$\forall R>0$, 设

$$D_R=\{u\in C_\omega(\mathbb{R},\,E)|\|u(t)\|_E\le R,\quad t\in\mathbb{R}\},$$

则$\exists R>0$, 使得$QD_R\subset D_R$. 否则, 对$\forall R>0,t\in\mathbb{R},\exists u_R\in D_R$, 使得$R<\|Qu_R(t)\|_E$, 有

$$\begin{aligned}
R &< \|Qu_R(t)\|_E\\
&\le C\|(I-T(\omega))^{-1}\|\cdot\int_{t-\omega}^{t}\|A^\alpha T(t-s)\|\cdot\|f(s,\,u_R(s),\,u_R(s-\tau_1),\cdots,u_R(s-\tau_n))\|\,ds\\
&\le CM_\alpha\rho\cdot\int_{t-\omega}^{t}\frac{R\sum_{i=0}^{n}C_i+M}{(t-s)^\alpha}\,ds\\
&= CM_\alpha\rho\cdot\int_{t-\omega}^{t}\frac{h_R(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds,
\end{aligned}$$

上式两端同乘$\frac{1}{R}$, 有

$$1\le CM_\alpha\rho\cdot\int_{t-\omega}^{t}\frac{h_R(s)}{(t-s)^\alpha}\cdot\frac{1}{R}\le CM_\alpha\rho\sum_{i=0}^{n}C_i\cdot\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

与假设条件(A2)矛盾! 故$\exists R>0$, 使得$QD_R\subset D_R$.

第二步, $Q:D_R\to D_R$连续.

设$\{u_n\}\in D_R$, 满足$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u\in D_R$. 由假设(A3)中$f(t,\,x_0,\cdots,x_n)$关于$x_i(i=0,\cdots,n)$的连续性知

$$f(t,\,u_n(t),\,u_n(t-\tau_1),\cdots,u_n(t-\tau_n))\to f(t,\,u(t),\,u(t-\tau_1),\cdots,u(t-\tau_n)),\qquad(n\to\infty),$$

而

$$\|f(t,\,u_n(t),\,u_n(t-\tau_1),\cdots,u_n(t-\tau_n))-f(t,\,u(t),\,u(t-\tau_1),\cdots,u(t-\tau_n))\|\le 2h_R(t),\qquad t\in\mathbb{R},$$

函数$\frac{2h_R(s)}{(t-s)^\alpha}$Lebesgue可积, 故由Lebesgue控制收敛定理可知

$$
\begin{aligned}
\|Qu_n(t)-Qu(t)\|_E &\le C\|Qu_n(t)-Qu(t)\|_\alpha \\
&\le C\|(\mathrm{I}-T(\omega))^{-1}\|\cdot\int_{t-\omega}^{t}\|A^\alpha T(t-s)\|\cdot\|\,f(t,\,u_n(t),\,u_n(t-\tau_1),\cdots,u_n(t-\tau_n)) \\
&\quad -f(t,\,u(t),\,u(t-\tau_1),\cdots,u(t-\tau_n))\,\|ds \\
&\le CM_\alpha\rho\cdot\int_{t-\omega}^{t}\frac{1}{(t-s)^\alpha}\cdot\|\,f(t,\,u_n(t),\,u_n(t-\tau_1),\cdots,u_n(t-\tau_n)) \\
&\quad -f(t,\,u(t),\,u(t-\tau_1),\cdots,u(t-\tau_n))\,\|ds \\
&\le CM_\alpha\rho\cdot\int_{t-\omega}^{t}\frac{2h_R(s)}{(t-s)^\alpha}ds \\
&\to 0,\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

因此, $Q:D_R\to D_R$连续.

第三步, $H(t)=\{Qu(t)|u\in D_R\}$连续.

对$\forall 0\le t_1<t_2\le\omega$及$\forall u\in D_R$, 有

$$
\begin{aligned}
Qu(t_2)-Qu(t_1) &= (I-T(\omega))^{-1}\int_{t_2-\omega}^{t_2}T(t_2-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds \\
&\quad -(I-T(\omega))^{-1}\int_{t_1-\omega}^{t_1}T(t_1-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds \\
&= (I-T(\omega))^{-1}\int_{t_2-\omega}^{t_1}(T(t_2-s)-T(t_1-s))\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds \\
&\quad -(I-T(\omega))^{-1}\int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega}T(t_1-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds \\
&\quad +(I-T(\omega))^{-1}\int_{t_1}^{t_2}T(t_2-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds \\
&:= I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

从而

$$\|Qu(t_2)-Qu(t_1)\|_E\le\|I_1\|_E+\|I_2\|_E+\|I_3\|_E.$$

只需证当$t_2-t_1\to 0$时, $\|I_i\|\to 0(i=1,2,3)$即可. 由强连续半群的性质, 有

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\le C\|I_1\|_\alpha \\
&\le C\|(I-T(\omega))^{-1}\|\cdot\int_{t_2-\omega}^{t_1}\|(T(t_2-s)-T(t_1-s))\cdot\ f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\|_\alpha\,ds \\
&\le CM\rho\cdot\int_{t_2-\omega}^{t_1}\|(T(t_2-t_1)-I)\cdot\ f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\|_\alpha\,ds \\
&\to 0,\ (t_2-t_1\to 0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\leq C\|I_2\|_\alpha \\
&\leq C\|(I-T(\omega))^{-1}\| \cdot \int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega} \|A^\alpha T(t_1-s)\cdot f(s,u(s),u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\|_\alpha\, ds \\
&\leq CM_\alpha\rho \cdot \int_{t_1-\omega}^{t_2-\omega} \frac{h_R(s)}{(t_1-s)^\alpha}\, ds \\
&\to 0,\ (t_2-t_1\to 0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq C\|I_3\|_\alpha \\
&\leq C\|(I-T(\omega))^{-1}\| \cdot \int_{t_1}^{t_2} \|A^\alpha T(t_2-s)\cdot f(s,u(s),u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\|_\alpha\, ds \\
&\leq CM_\alpha\rho \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{h_R(s)}{(t_2-s)^\alpha}\, ds \\
&\to 0,\ (t_2-t_1\to 0).
\end{aligned}
$$

即$\|Qu(t_2)-Qu(t_1)\|_E\to 0(t_2-t_1\to 0)$, 与$u\in D_R$的选取无关, 故$H(t)$等度连续.

第四步, 再证$H(t)=\{Qu(t)|u\in D_R\}$相对紧.

对$\forall t\in\mathbb{R}$, $u\in D_R$, $0<\delta<\omega$.

令

$$
\begin{aligned}
(Q_\delta u)(t) &= (I-T(\omega))^{-1}\int_{t-\omega}^{t-\delta} T(t-s)f(s,u(s),u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))ds \\
&= T(\delta)(I-T(\omega))^{-1}\int_{t-\omega}^{t-\delta} T(t-s-\delta)f(s,u(s),u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))ds,
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\|(Q_\delta u)(t)\|_\alpha &\leq \|(I-T(\omega))^{-1}\|\int_{t-\omega}^{t-\delta}\|T(t-s)f(s,u(s),u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\|_\alpha ds \\
&\leq \rho\int_{t-\omega}^{t-\delta}\|A^\alpha T(t-s)\|\cdot\|f(s,u(s),u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\|_\alpha ds \\
&\leq M_\alpha\rho\int_{t-\omega}^{t-\delta}\frac{h_R(s)}{(t-s)^\alpha}ds := T<\infty,
\end{aligned}
$$

由算子$T_\alpha(\delta)$是X_α中的紧算子可知, 对$\forall t\in\mathbb{R}$, $(Q_\delta D_R)(t)$在X_α中相对紧.

对$\forall u\in D_R,\ t\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\|Qu(t)-Q_\delta u(t)\|_\alpha &= \|(I-T(\omega))^{-1}\int_{t-\omega}^{t}T(t-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds\\ &\quad -(I-T(\omega))^{-1}\int_{t-\omega}^{t-\delta}T(t-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds\|_\alpha\\ &= \|(I-T(\omega))^{-1}(\int_{t-\omega}^{t}T(t-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\,ds\\ &\quad -\int_{t-\omega}^{t-\delta}T(t-s)\,f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n)))\,ds\|_\alpha\\ &\le \|(I-T(\omega))^{-1}\|\int_{t-\delta}^{t}\|A^\alpha T(t-s)f(s,\,u(s),\,u(s-\tau_1),\cdots,u(s-\tau_n))\|ds\\ &\le M_\alpha\rho\int_{t-\delta}^{t}\frac{h_R(s)}{(t-s)^\alpha}ds.\end{aligned}$$

从而可知, $H(t)$在E中相对紧.

综上所述, 由Arzela-Ascoli定理可知, 集合H在$C_\omega(\mathbb{R},\,E)$中相对紧, $Q:D_R\to D_R$为全连续算子. 由全连续算子的Schauder不动点定理知, Q在D_R中至少存在一个不动点, 该不动点即为扇形算子下时滞发展方程(1)的ω-周期mild解. □

4. 应用

例 扇形算子情形下时滞抛物型偏微分方程的时间周期解.

设$\Omega\subset\mathbb{R}^N$有界区域,其边界$\partial\Omega$充分光滑, $g\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{n+1})$, $g(x,\,t,\,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$关于$t$以$\omega$为周期, $\tau>0$ 为常数, 考虑多时滞抛物型边值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=g(x,\,t,\,u(x,t),\,u(x,t-\tau_1),\cdots,u(x,t-\tau_n))\,, & (x,\,t)\in\Omega\times\mathbb{R}\\ u\,|_{\partial\Omega}=0, & \end{cases}\tag{10}$$

的时间ω-周期解的存在, 有

定理3 若下列条件成立

(A5)存在$M_i\ge 0,\ M\ge 0(i=0,1,\cdots,n)$, 设$g\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{n+1})$, $g(x,\,t,\,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 关于t以ω为周期. 若g满足条件:

$$|g(x,\,t,\,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)|\le\sum_{i=0}^{n}M_i+M,\tag{11}$$

(A6)$CM_\alpha\|(\mathrm{I}-T(\omega))^{-1}\|<\frac{1-\alpha}{\omega^{1-\alpha}\cdot\sum_{i=0}^{n}M_i}$,

则扇形算子情形下时滞抛物型方程时间周期问题(10)至少存在一个时间ω-周期mild解.

证明 取$X = L^p(\Omega)$ $(p > N)$, 作X 中的算子A:

$$D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \qquad Au = -\Delta\, u. \tag{12}$$

按[10, Chapter 7, Theorem 3.6], $-A + \lambda_1 \mathrm{I}$ 生成X中压缩解析半群$S_p(t)(t \geq 0)$, 其中λ_1 为Laplace算子$-\Delta$在边界条件$u\,|_{\partial\Omega} = 0$下的第一特征值. 由$S_p(t)(t \geq 0)$的压缩性, $-A$ 生成的半群$T_p(t) = e^{-\lambda_1 t} S_p(t)$ 满足指数稳定条件. 按$T_p(t)$ 的解析性与A 的预解式的紧性, $T_p(t)$也是X中的紧半群. 定义非线性映射$f : \mathbb{R} \times X^{n+1} \to X$:

$$f(t,\, v_0,\, v_1, \cdots, v_n) = g(\cdot,\, t,\, v_0(\cdot),\, v_1(\cdot), \cdots, v_n(\cdot)), \tag{13}$$

则由(12)式易见, $f : \mathbb{R} \times X^{n+1} \to X$连续, 且满足条件(A2). 这样, 扇形算子情形下时滞抛物型边值问题(10) 化为X 中的扇形算子下时滞发展方程(1). 按定理2, 对应的方程(10)存在时间ω-周期mild解$u \in C_\omega(\mathbb{R},\, X)$(在半群$T_p(t)$意义下). □

5. 总结

在C_0-半群的前提下, 我们运用解析算子半群理论、全连续算子相关不动点定理研究了当非线性项f满足一次增长条件时, 时滞发展方程的ω-周期mild解的存在性与唯一性, 并给出了应用的例子. 近些年来, 对含时滞项的发展方程周期解研究成果丰硕, 而含时滞项脉冲发展方程周期解研究较少, 故含时滞项脉冲发展方程周期解的研究有着广泛的应用背景和现实意义.

参考文献

[1] Hale, J. and Lunel, S. (1993) Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7_1

[2] Wu, J. (1996) Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York.

[3] Vejvoda, O. (1982) Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions. Martinus Nijhoff Publishers, Boston. https://doi.org/10.1007/978-94-009-7672-6

[4] 杨和. 扇形算子发展方程的周期解及渐近性态[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2008.

[5] Liu, J. (1998) Bounded and Periodic Solutions of Finite Delay Evolution Equations. *Nonlinear Analysis*, **34**, 101-111. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00606-8

[6] Li, Y. (2011) Existence and Asymptotic Stability of Periodic Solution for Evolution Equations with Delays. *Journal of Functional Analysis*, **261**, 1309-1324. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2011.05.001

[7] Li, Q. (2018) Monotone Iterative Technique for Delayed Evolution Equation Periodic Problems in Banach Spaces. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, **14**, 393-417. https://doi.org/10.4310/PAMQ.2018.v14.n2.a4

[8] Li, Q. and Li, Y. (2021) Positive Periodic Solutions for Abstract Evolution Equations with Delay. *Positivity*, **25**, 379-397. https://doi.org/10.1007/s11117-020-00768-4

[9] 李强. 时滞发展方程周期mild解的存在性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2018, 41(2): 287-294.

[10] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin.

[11] 李永祥. 散度抛物型变分边值问题的周期解[J]. 应用数学, 1994, 7(3): 287-293.

[12] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2000.

[13] 夏道行, 严绍宗. 实变函数与应用泛函分析基础[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.

[14] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2015.